Συλλογισμός

Syllogismos

History and Epistemology for Mathematics Education

Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Libri e idee *(a cura di G.T. Bagni)*
Appunti di storia per la didattica della matematica

Premessa
Storia e Geografia della Matematica prima dell'introduzione della stampa

Tratteggiare in una breve premessa la storia della Matematica fino al XV secolo sarebbe improponibile. Lo sviluppo della Matematica dalle origini al primo libro di Matematica pubblicato a stampa, *Larte de labbacho* (Treviso 1478), è vasto e complesso, ed una sua anche sommaria presentazione richiederebbe un ampio trattato (si vedano ad esempio i testi citati nell'Introduzione).

In questa premessa, tuttavia, proporremo alcune osservazioni attraverso la considerazione di un celebre esempio collegato alle grandi tradizioni matematiche dell'Antichità; cercheremo dunque di illustrare alcuni elementi storici (e storiografici) influenzati dalla grande invenzione di Gutenberg.

La diffusione della stampa ha determinato infatti una svolta anche nel lavoro dello storico: il problema delle fonti è stato radicalmente semplificato dalla disponibilità di testi a stampa, pubblicati, inoltre, in un ben determinato anno ed in un ben determinato luogo (informazioni dichiarate nelle pubblicazioni).

Ci occuperemo, in particolare, della ricerca delle *terne pitagoriche*, ovvero delle terne di numeri interi positivi (a; b; c) tale che: $a^2+b^2 = c^2$ (ricordiamo che una terna pitagorica primitiva è una terna pitagorica in cui a, b, c non hanno alcun fattore comune). In base al teorema di Pitagora, tali terne forniscono le misure dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo[1].

La storia della ricerca delle terne pitagoriche è molto antica, certamente precedente al periodo (580?-500? a.C.) in cui viene collocata la figura di Pitagora di Samo. Alcune tecniche risalgono addirittura ai Babilonesi: ci riferiamo particolarmente alla tavoletta Plimpton 322, databile tra il 1900 ed il 1600 a.C. (Neugebauer, 1974; Van der Waerden, 1983, p. 2; Weil, 1993, p. 10). In essa troviamo una tabella (di quindici righe) della quale riportiamo le prime righe:

2; 0	1; 59	2; 49
57; 36	56; 7	1; 20; 25
1; 20; 0	1; 16; 41	1; 50; 49
3; 45; 0	3; 31; 49	5; 9; 1
...	...	...

Si tratta di numeri scritti in base sessagesimale; posti in forma decimale, essi sono facilmente riconoscibili come terne pitagoriche:

[1] Anche tale caratteristica determinò l'importanza attribuita alla conoscenza delle terne pitagoriche in molte tradizioni matematiche: mediante una terna pitagorica era semplice disegnare un triangolo rettangolo (ovvero costruire un angolo retto).

120; 119; 169 ($120^2+119^2 = 169^2$)
3456; 3367; 4825 ($3456^2+3367^2 = 4825^2$)
4800; 4601; 6649 ($4800^2+4601^2 = 6649^2$)
13500; 12709; 18541 ($13500^2+12709^2 = 18541^2$)

A tempi più vicini a noi risalgono le formule attribuite a Platone (427-347 a.C.) da Proclo di Alessandria (410-485, autore di un *Commento al I libro degli Elementi*), il quale ricorda anche qualche leggendaria ricerca di Pitagora:

$$a = 2x$$
$$b = x^2-1$$
$$c = x^2+1$$

(Boyer, 1982; Kline, 1991; Bagni, 1996, I).

Oggi osserveremmo che per $x = 0$, $x = 1$ esse non portano a risultati significativi (si tratta delle terne: 0, -1, 1 e 2, 0, 2; ricordiamo peraltro che 0 e 1 non erano considerati veri e propri "numeri" dai Greci).

Per $x = 2$ otteniamo:

$a = 4$ $b = 3$ $c = 5$

Si tratta dell'unica terna pitagorica così ottenuta per la quale è: $b<a$ (per tutte le altre terne risulta infatti: $a<b<c$).

Osserviamo che per x dispari si ottengono terne pitagoriche non primitive (costituite da tre numeri pari):

$x = 3$	$a = 6$	$b = 8$	$c = 10$
(multipla di:	$a = 3$	$b = 4$	$c = 5$)
$x = 4$	$a = 8$	$b = 15$	$c = 17$
$x = 5$	$a = 10$	$b = 24$	$c = 26$
(multipla di:	$a = 5$	$b = 12$	$c = 13$)
$x = 6$	$a = 12$	$b = 35$	$c = 37$
$x = 7$	$a = 14$	$b = 48$	$c = 50$
(multipla di:	$a = 7$	$b = 24$	$c = 25$)

... ...

Con le formule di Platone si trovano tutte le terne pitagoriche della forma (a; b; b+2): ma non tutte le terne pitagoriche (primitive) hanno tale caratteristica. Dunque le formule platoniche non forniscono una soluzione completa al problema della determinazione di terne pitagoriche.

In un testo cinese del periodo Han (collocabile tra il 200 a.C. e il 220 d.C.: Van der Waerden, 1983, pp. 1 e 5-8; Martzloff, 1987; Needham, 1985; ma la datazione delle opere matematiche cinesi è sempre impresa delicata: il materiale riportato nella redazione finale potrebbe essere più antico) (Bagni & D'Amore, 1994) si trova la corretta risoluzione del problema presentato. Dopo avere scritto:

$$a^2+b^2 = c^2 \quad \text{da cui} \quad (c+b)(c-b) = a^2$$

consideriamo un numero dispari: $a = mn$. L'ultima equazione è verificata da:

$$\begin{array}{lcl} c+b = m^2 & & c = (m^2+n^2)/2 \\ & \text{da cui} & \\ c-b = n^2 & & b = (m^2-n^2)/2 \end{array}$$

Ad esempio possiamo scrivere:

$$\begin{array}{lll} a = 3 \cdot 1 = 3 & \text{da cui} & b = 4 \ \text{e} \ c = 5 \\ a = 5 \cdot 1 = 5 & \text{da cui} & b = 12 \ \text{e} \ c = 13 \\ a = 5 \cdot 3 = 15 & \text{da cui} & b = 8 \ \text{e} \ c = 17 \end{array}$$

Un'analoga soluzione compare nel Problema I del VI libro dell'*Aritmetica* di Diofanto di Alessandria (vissuto tra il 250 e il 350 d.C.). Consideriamo un numero pari: $a = 2pq$; l'equazione:

$$(c+b)(c-b) = a^2$$

può essere verificata da:

$$c+b = 2p^2 \qquad\qquad c = p^2+q^2$$

da cui

$$c-b = 2q^2 \qquad\qquad b = p^2-q^2$$

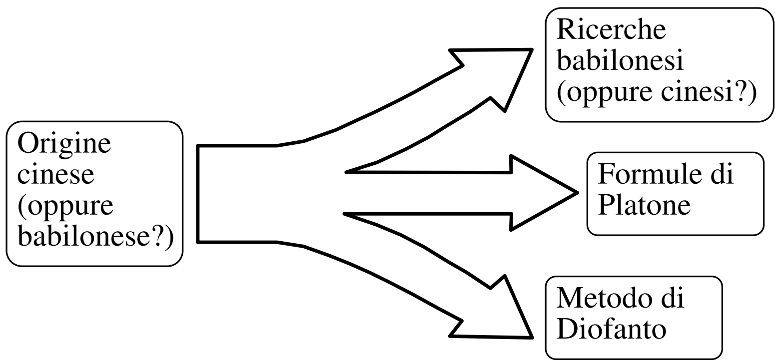
Si noti che la soluzione cinese, sopra indicata, equivale alla soluzione diofantea sostituendo (m, n) con ($p+q$; $p-q$). È possibile provare (Van der Waerden, 1983, p. 2) che *tutte le terne pitagoriche primitive possono essere ottenute dalle formule ricordate*.

Dunque la soluzione cinese del problema sembra essere la più antica delle soluzioni complete. Ma quale influenza possono avere avuto i Cinesi nello sviluppo della Matematica di altre civiltà? Quali legami possiamo ipotizzare tra l'impostazione cinese e quella, ad esempio, diofantea? È opinione comune (Boyer, 1982; Struik, 1981) che la Matematica cinese abbia avuto un'influenza trascurabile sulla Matematica occidentale[2]. Questa conclusione potrebbe però essere affrettata: per quanto riguarda la Matematica cinese, una fonte autorevole è Needham (1985), che parla di "contatti che sembra vi siano stati fra matematici cinesi e di altre grandi aree culturali del mondo antico", sebbene "in misura limitata" (Needham, 1985, p. 183). Needham si riferisce a "concezioni matematiche propagate dalla Cina verso il Meridione [verso l'India] e l'Occidente" e ricorda i numerali, l'estrazione di radici quadrate e cubiche, la *regola del tre*, la scrittura di frazioni, l'idea di numeri negativi, elementi di Geometria (tra i quali una dimostrazione del teorema di Pitagora), il metodo di *falsa posizione*, il triangolo di Tartaglia-Pascal. Per quanto riguarda l'Analisi indeterminata (dunque la ricerca delle terne pitagoriche), sembra che dalla Cina siano passate alcune idee in India (intorno al V-VII sec. d.C.) e da

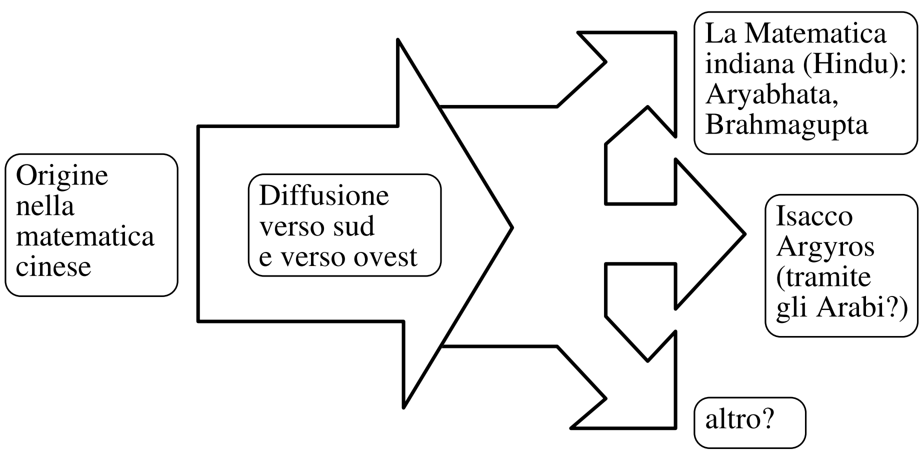
[2] Kline (1991) addirittura ignora quasi completamente la Matematica cinese; ma riteniamo tale scelta nettamente discutibile.

lì, forse, al monaco bizantino Isacco Argyros (XIV sec. d.C.), probabilmente con la mediazione araba (Needham, 1985, p. 185).

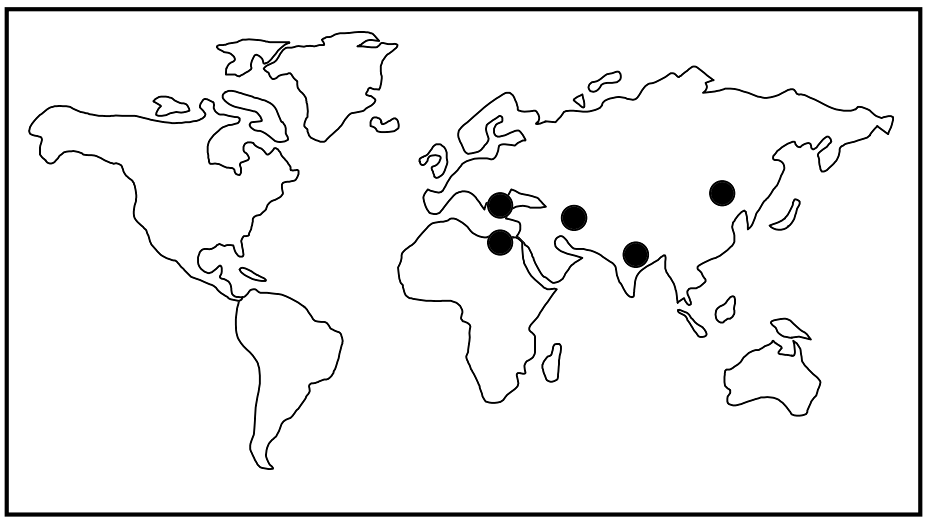
Dunque possiamo così ipotizzare gli eventuali contatti che avrebbero portato i matematici occidentali (oppure del vicino oriente) a conoscere le originali ricerche cinesi (oppure babilonesi) sulle terne pitagoriche,alcuni secoli prima di Cristo:



Alcuni secoli dopo Cristo, invece, avrebbe potuto verificarsi la situazione così schematizzata:



L'ipotesi della comune origine (forse cinese) delle ricerche sulle terne pitagoriche è sostenuta da B.L. Van der Waerden, il quale osserva che "con pochissime eccezioni, le grandi scoperte in Matematica, in Fisica e in Astronomia sono state fatte una volta sola" (Van der Waerden, 1983, p. 10). La tesi di Van der Waerden è supportata dalla distribuzione geografica delle ricerche sopra presentate, che riassumiamo nella figura seguente:



Pur senza voler smentire l'ipotesi di Van der Waerden, non possiamo non osservare che la ricerca di terne pitagoriche è una questione che può sorgere spontaneamente (come abbiamo sottolineato nella nota 1, anche per ragioni pratiche): il fatto di trovare molti matematici che, in epoche ed in paesi diversi, si sono interessati ad essa non ci dovrebbe dunque sorprendere e non ci sembra un elemento determinante per propendere per una comune origine delle ricerche in tale campo.

Concludendo questa breve rassegna, non pretendiamo di dare una risposta ai molti interrogativi che ancora restano a proposito dell'origine e dello sviluppo delle ricerche sulle terne pitagoriche. Riteniamo però significativa la presenza stessa di tali questioni aperte: la ricostruzione scientifica della storia (e della geografia) della Matematica antica (e medievale) non è sempre agevole; e *le difficoltà che si presentano a tale riguardo sono spesso collegate all'assenza di testi scritti sicuramente databili*. Anche da questo punto di vista, dunque, il libro deve essere considerato un grande protagonista della storia della cultura umana e, in particolare, della storia della Matematica.

Bibliografia della Premessa

Bagni, G.T. & D'Amore, B. (1994), *Alle radici storiche della prospettiva*, Angeli, Milano.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).

Boyer, C.B. (1982), *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).

Eves, H. (1983), *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York.

Fauvel, J. & van Maanen, L, (a cura di) (2000), *History of Matyhematics in Mathematics Education*, ICMI-Study Book, Kluwer, Dordrecht.

Freguglia, P. (1982), *Fondamenti storici della Geometria*, Feltrinelli, Milano.
Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.
Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).
Martzloff, A. (1987), *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris (*A History of Chinese Mathematics*, Springer, Berlin 1997).
Needham, J. (1985), *Scienza e civiltà in Cina*, III, La Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia, Einaudi, Torino (*Science and civilisation in China*, Cambridge Un. Pr. 1959).
Neugebauer, O. (1974), *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano (*The exact sciences in Antiquity*, Brown Un. Pr., Providence Rhode Island 1957).
Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33.
Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).
Van der Waerden, B.L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, Berlin.
Weil, A. (1993), *La teoria dei numeri*, Einaudi, Torino (*Number theory*, Birkhäuser, Boston 1984).