Periodico di Matematiche (1995), VII, 1, 1, 32-40

La funzione ζ e la congettura di Riemann

PIERO PLAZZI
Istituto di Matematica Generale
Università di Bologna

GIORGIO T. BAGNI
Professore a contratto (1995-1996)
Dipartimento di Matematica,
Università di Bologna

Summary. In this paper, we discuss some questions about the Riemann zeta function (ζ), with historical remarks, particularly about the link between the zeta function and the prime numbers, based on a famous Eulerian product (1737). In 1859, Riemann defined the zeta function for complex numbers; he conjectured that all nontrivial zeroes of ζ: $x \to \zeta(x)$ are on the line $\mathrm{Re}(x) = ½$; this hypothesis has never been proved; computations of the zeroes of ζ have been made, and the first 1,500,000,001 nontrivial zeroes of ζ are on the line $\mathrm{Re}(x) = ½$ (1986).

INTRODUZIONE

Un importante campo di ricerca nella teoria dei numeri è collegato allo studio della funzione ζ, introdotta e studiata (1737) come funzione reale di variabile reale da Leonhard Euler (1707-1783) ([3], pp. 970-971).

Bernhard Riemann (1826-1866), considerando la funzione ζ come funzione complessa di variabile complessa, propose una congettura riguardante i suoi zeri non reali in **C**: in particolare, egli suppose che la parte reale di questi zeri sia ½. A tale celebre supposizione sono collegate molte questioni sulla distribuzione dei numeri primi nell'insieme dei naturali ([1], pp. 347-349).

Nel presente articolo sarà ripercorsa, in termini elementari, la storia della funzione ζ e della congettura di Riemann, uno degli affascinanti problemi aperti che ancora impegnano gli studiosi della teoria dei numeri.

LEONHARD EULER E LA FUNZIONE ζ

La funzione zeta, ζ: $D \to \mathbf{R}$ (con $D \subseteq \mathbf{R}$), introdotta da Euler, è espressa da:

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \ldots$$

Euler osservò che la serie al secondo membro è convergente per i tutti i reali $x>1$ ([5], p. 156); conseguentemente, la funzione ζ risulta definita per i reali maggiori di 1, ovvero il dominio di ζ è: $D = \{x \in \mathbf{R}: x>1\}$. Si prova che:

$$\lim_{x \to 1^+} \zeta(x) = +\infty$$

(per la dimostrazione, si veda [2], p. 247) e che la funzione ζ è continua e indefinitamente derivabile nel proprio dominio ([5], p. 156).

Per quanto riguarda i valori assunti da $\zeta(x)$, lo stesso Euler calcolò i valori di $\zeta(x)$ per x intero positivo pari, da 2 a 26 ([8], p. 41); ad esempio, egli provò che ([2], p. 245, [5], p. 157):

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

I valori calcolati $\zeta(x)$ (per x intero positivo pari, da 2 a 26) da Euler sono tutti della forma $\alpha \cdot \pi^x$, con $\alpha \in \mathbf{Q}$; ad esempio ([6], p. 108, [8], p. 41):

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90}$$
$$\zeta(6) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots = \frac{\pi^6}{945}$$

Ancora a Euler è dovuto un importante risultato sulla ζ: egli dimostrò (1737) che tale funzione può essere scritta nella forma del prodotto infinito:

$$\zeta(x) = \frac{2^x}{2^x - 1} \cdot \frac{3^x}{3^x - 1} \cdot \frac{5^x}{5^x - 1} \cdot \frac{7^x}{7^x - 1} \cdot \frac{11^x}{11^x - 1} \cdot \ldots$$

dove i numeratori sono le potenze dei numeri primi ([2], p. 246, [5], p. 156, [8], pp. 33-34). Tale formula merita una giustificazione, almeno... informale.

Innanzitutto, notiamo che il prodotto:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{kx}} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^{kx}}$$

ovvero:

$$\left(1+\frac{1}{2^x}+\frac{1}{4^x}+\frac{1}{8^x}+...+\frac{1}{2^{kx}}+...\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{9^x}+\frac{1}{27^x}+...+\frac{1}{3^{kx}}+...\right)$$

può essere scritto nella forma:

$$1\cdot\left(1+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{9^x}+...+\frac{1}{3^{kx}}+...\right)+\frac{1}{2^x}\left(1+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{9^x}+...+\frac{1}{3^{kx}}+...\right)+...$$

Possiamo dunque concludere che il prodotto $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{kx}}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{kx}}$ è costituito dalla somma di tutte le frazioni del tipo:

$$\frac{1}{2^{ix}3^{jx}}$$

ovvero aventi denominatore (solamente) con fattori 2^x e 3^x.

Se estendiamo queste considerazioni a $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{kx}}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{kx}}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{5^{kx}}$, giungiamo alla somma di tutte le frazioni del tipo:

$$\frac{1}{2^{ix}3^{jx}5^{lx}}$$

ovvero aventi denominatore (solamente) con fattori 2^x, 3^x e 5^x.

Se vogliamo giungere a $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}$, somma di *tutte* le frazioni del tipo $\frac{1}{n^x}$, con n intero positivo, dobbiamo analogamente considerare:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{kx}}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{kx}}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{5^{kx}}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{7^{kx}}\cdot\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{11^{kx}}\cdot...=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}=\zeta(x)$$

dove gli esponenziali ai denominatori hanno per base le potenze dei numeri primi; e ricordando che:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{kx}}=\frac{2^x}{2^x-1}\qquad\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{kx}}=\frac{3^x}{3^x-1}\qquad\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{5^{kx}}=\frac{5^x}{5^x-1}\qquad...$$

giungiamo infine alla formula euleriana:

$$\zeta(x) = \frac{2^x}{2^x - 1} \cdot \frac{3^x}{3^x - 1} \cdot \frac{5^x}{5^x - 1} \cdot \frac{7^x}{7^x - 1} \cdot \frac{11^x}{11^x - 1} \cdot \ldots$$

Proprio questa elegante affermazione è alla base della notevole importanza assunta dalla ζ nella teoria dei numeri, in particolare per quanto riguarda la distribuzione dei numeri primi nell'insieme dei naturali.

Fondamentale, infatti, fu l'applicazione di concetti e di procedimenti analitici nella ricerca in teoria dei numeri, caratteristica metodologica propria del XIX secolo ([3], pp. 968-971). Senza dubbio, le radici della *teoria analitica dei numeri* non furono idealmente distanti dal punto di vista euleriano che, come vedremo, sarà ripreso, almeno per quanto riguarda lo studio delle proprietà della funzione ζ, da Riemann.

Sono note molte applicazioni della funzione ζ: ad esempio, si dimostra che la probabilità che due numeri interi, scelti a caso, non abbiano alcun fattore comune e la probabilità che un numero, scelto a caso, non sia divisibile per un quadrato sono entrambe ([8], pp. 34-35):

$$\frac{1}{\zeta(2)} = 0{,}607927\ldots$$

Analogamente, la probabilità che tre numeri interi, scelti a caso, non abbiano alcun fattore comune è ([8], p. 36):

$$\frac{1}{\zeta(3)} = 0{,}831907\ldots$$

L'IRRAZIONALITÀ DI ζ(3)

La determinazione di $\zeta(x)$ per x intero positivo *dispari* (maggiore di 1) è un problema assai delicato; ad esempio, è stato calcolato che:

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots = 1{,}202056\ldots$$

([8], p. 41); è stato recentemente provato (Apéry, 1978) che $\zeta(3)$ è un numero irrazionale [7], ma ancora non si sa se è un trascendente.

Presentiamo brevemente la dimostrazione di Roger Apéry.

Dall'uguaglianza:

$$\sum_{k=1}^{K}\frac{a_1a_2\ldots a_{k-1}}{(x+a_1)\ldots(x+a_k)}=\frac{1}{x}-\frac{a_1a_2\ldots a_K}{(x+a_1)\ldots(x+a_K)}$$

applicata con $x = n^2$ e $a_k = -k^2$ segue (dopo alcuni calcoli) ([1]):

$$\zeta(3)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3}=\frac{5}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}$$

Ciò consentirà di riscrivere l'espressione di $\zeta(3)$ in modo da rendere possibile l'applicazione di un noto criterio di irrazionalità. A tale proposito, si consideri la formula:

$$n^3u_n+(n-1)^3u_{n-2} = (34n^3-51n^2+27n-5)u_{n-1} \qquad n \geq 2$$

Sia $\{b_n\}$ la successione definita da:

$$b_0 = 1 \qquad b_1 = 5 \qquad b_n = u_n$$

e sia $\{a_n\}$ la successione definita da:

$$a_0 = 0 \qquad a_1 = 6 \qquad a_n = u_n$$

Si può allora dimostrare che la successione $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ è interamente costituita da razionali e converge a $\zeta(3)$.

Proprio studiando questa convergenza, Apéry riesce a provare l'irrazionalità di $\zeta(3)$; infatti è noto il seguente criterio:

Criterio di irrazionalità. Considerato il reale β, se esiste un $\delta>0$ ed una successione $\left\{\frac{p_n}{q_n}\right\}$ di razionali tale che $\frac{p_n}{q_n}\neq\beta$ e che:

([1]) Quanto ora scritto ([7], p. 197) non sarebbe direttamente equivalente all'affermazione: $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{a_1a_2\ldots a_{k-1}}{(x+a_1)\ldots(x+a_k)}=\frac{1}{x}$ (come citato in [7], p. 195). Quanto provato appare comunque sufficiente nel contesto della dimostrazione di Apéry.

$$\left|\beta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{1+\delta}} \qquad n = 1, 2, ...$$

allora β è irrazionale.

Nel caso di ζ(3), Apéry dimostra che:

$$\left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}}$$

e giunge a provare l'esistenza del reale positivo δ (previsto dal criterio di irrazionalità) ed a calcolare peraltro:

$$\delta = \frac{\log_e \left(1+\sqrt{2}\right)^4 - 3}{\log_e \left(1+\sqrt{2}\right)^4 + 3} = 0{,}080529431...$$

(dove il valore $\alpha = \left(1+\sqrt{2}\right)^4$ è stato determinato utilizzando la valutazione asintotica della successione $\{b_n\}$).

Ciò consente di applicare il criterio di irrazionalità e di concludere dunque che ζ(3) è irrazionale.

Interessante è la scrittura di ζ(3) in frazione continua:

$$\zeta(3) = \cfrac{6}{5 - \cfrac{1}{117 - \cfrac{64}{535 - \cfrac{729}{\ldots - \cfrac{n^6}{34n^3 + 51n^2 + 27n + 5 - \ldots}}}}}$$

L'OPERA DI BERNHARD RIEMANN

Una fase di notevole importanza nello studio della funzione ζ è associata agli studi di Riemann, il quale propose (1859) di definire tale funzione per $x \in \mathbf{C}$ e si occupò del prolungamento analitico di ζ all'intero piano complesso ([5], p. 161).

Gli zeri della funzione ζ così prolungata (ζ ammette un polo per $z = 1$) sono:

- $x = -2$, $x = -4$, $x = -6$, ... detti *zeri banali* di ζ;

- alcuni numeri complessi (non reali) x, con parte reale $0 \le \mathrm{Re}(x) \le 1$.

Riemann suppose che *tutti gli zeri non banali* di ζ siano caratterizzati dalla proprietà di avere parte reale $\mathrm{Re}(x)=½$. La congettura indicata da Riemann non è ancora stata provata né smentita; nel 1914, G.H. Hardy giunse a dimostrare che ζ ha infiniti zeri non banali per i quali risulta verificata la supposizione riemanniana ([3], p. 971, [5], p. 181).

Molte verifiche della congettura in casi particolari sono state condotte sugli zeri di ζ: il primo lavoro in tale direzione fu condotto nel 1903 da J.P. Gram, il quale calcolò i primi 15 zeri non banali di ζ; nel 1935, E.C. Titchmarsh giunse alla determinazione dei primi 1041 zeri non banali di ζ ([5], p. 182).

Con la diffusione dei mezzi per il calcolo automatico, questo genere di ricerche subì un impulso notevole: nel 1986, grazie all'utilizzo di un elaboratore per più di 1000 ore di tempo-macchina, la congettura di Riemann è stata verificata da J. Van de Lune, H.J.J. te Riele e D.T. Winter per il primo miliardo e mezzo di radici non banali della funzione ζ ([5], p. 182, [8], p. 34), ma evidentemente tutto ciò non comporta alcunché per quanto riguarda la validità in generale della supposizione in esame. Nel 1984, una dimostrazione della congettura, annunciata dal giapponese Matzumoto, si è rivelata errata ([8], pp. 33-34).

LA CONGETTURA DI RIEMANN E I NUMERI PRIMI

L'importanza della congettura di Riemann, come precedentemente osservato, è strettamente collegata ad alcune questioni sui numeri primi; molte ricerche sulla distribuzione dei numeri primi nell'insieme dei numeri naturali sono state condotte assumendo come ipotesi la validità della congettura di Riemann. Illustreremo, nel seguito, un celebre esempio a tale proposito.

Il numero di primi compresi nell'insieme $\{x \in \mathbf{N}: x \le n\}$ è indicato con $\pi(n)$ e può essere stimato con la quantità:

$$\pi(n) \sim \int_0^n \frac{dx}{\log_e x}$$

([3], pp. 969-970, [8], p. 284). Tale stima, per valori di n relativamente piccoli (ovvero dell'ordine delle centinaia di milioni, [8], pp. 284-285) è approssimata per eccesso; ma nel 1914 J.E. Littlewood provò che tale approssimazione passa ad essere per difetto, e poi ancora per eccesso, e poi ancora per difetto un infinito numero di volte ([5], p. 179, [8], pp. 284-285), se *n* viene scelto abbastanza grande. È possibile provare che il primo di questi passaggi (da approssimazione per eccesso ad approssimazione per difetto) avviene per un valore di *n* minore di :

$$10^{10^{10^{34}}}$$

([5], pp. 179-180). Tale numero è detto *numero di Skewes*, dal nome del matematico S. Skewes che lo introdusse nel 1933 ([4] e [8], p. 285); ma questa originaria dimostrazione venne resa possibile solamente dall'accettazione della validità della congettura di Riemann, e dunque la validità di questa celebre affermazione sulla distribuzione dei numeri primi venne fatta dipendere inscindibilmente dalla (eventuale) dimostrazione della congettura di Riemann.

Solo in un secondo momento, nel 1955, lo stesso Skewes modificò i propri metodi di ricerca e riuscì a determinare una diversa limitazione per il sopra ricordato valore di *n*, senza obbligatoriamente ricorrere all'accettazione della congettura di Riemann; il risultato di Skewes venne ulteriormente migliorato nel 1966 da R.S. Lehman e nel 1986 da H.J.J. te Riele ([5], p. 180).

Riferimenti bibliografici

[1] **U. Bottazzini**, *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino 1990.

[2] **G.H. Hardy-E.M. Wright**, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford 1938 (5th edition, 1979).

[3] **M. Kline**, *La storia della matematica. II. Dal Settecento ad oggi*, Einaudi, Torino 1991.

[4] **J.E. Littlewood**, *A Mathematician's Miscellany*, Methuen, London 1963. Sul numero di Skewes si veda inoltre: **R.P. Boas**, *The Skewes Number*, in: **R. Honsberger**, *Mathematical Plums*, Mathematical Association of America, 1979.

[5] **P. Ribenboim**, *The Book of Prime Number Records*, Springer-Verlag, New York 1980 (2nd edition, 1989).

[6] **M.R. Spiegel**, *Manuale di matematica*, Schaum, ETAS, Milano 1974 (ediz. orig.: *Mathematical Handbook*, McGraw-Hill Book Company, New York 1968).

[7] **A. Van der Poorten**, *A Proof that Euler Missed... Apéry's Proof of the Irrationality of ζ(3)*, "Mathematical Intelligencer", 1 (1978-1979), pp. 195-203.

[8] **D. Wells**, *Numeri memorabili*, Zanichelli, Bologna 1991 (ediz. orig.: *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, Penguin Group, London 1986; 2nd edition, 1987).