Rivista di Matematica dell'Università degli Studi di Parma, 5, 4, 1995, 7-13

Le equazioni differenziali nelle opere di Jacopo e di Vincenzo Riccati

GIORGIO T. BAGNI

SUNTO. Jacopo (1676-1754) e Vincenzo Riccati (1707-1775) studiarono l'integrazione di molti tipi di equazioni differenziali: in particolare, Jacopo ottiene alcune trasformazioni per ridurre l'ordine dell'equazione; Vincenzo imposta la risoluzione di equazioni con procedimenti non usuali, basati su modelli fisici.

ABSTRACT. Jacopo (1676-1754) and Vincenzo Riccati (1707-1775) studied several kinds of differential equations: in particular, Jacopo achieved some transformations to reduce equation's order; Vincenzo solved some differential equations by methods based upon physical models.

INTRODUZIONE

Le figure di Jacopo Riccati (1676-1754) e dei suoi figli Vincenzo (1707-1775) e Giordano (1709-1790) [2] si collocano in uno dei periodi più stimolanti della storia della matematica e, più in generale, della cultura: l'intero ambiente scientifico europeo è pervaso dall'entusiasmo per l'introduzione e la progressiva precisazione dei concetti del Calcolo infinitesimale. Il ruolo delle ricerche riccatiane merita alcune specifiche considerazioni: approfondiremo pertanto la posizione dei Riccati, ed in particolare di Jacopo e di Vincenzo, nell'àmbito della storia dell'Analisi settecentesca, particolarmente per quanto riguarda lo studio e l'integrazione delle equazioni differenziali.

L'EQUAZIONE DIFFERENZIALE DI JACOPO RICCATI

Nella storia della scienza, Jacopo Riccati è ricordato per i suoi contributi nel campo dell'Analisi matematica, tra i quali spicca l'equazione differenziale di Riccati, equazione non lineare originariamente presentata da Jacopo Riccati [5] e quindi generalizzata da J.B. d'Alembert (1717-1783). Modernamente, l'equazione di Riccati è così scritta:

$$y' = \mathrm{A}(x)y^2+\mathrm{B}(x)y+\mathrm{C}(x)$$

mentre la sua formulazione originale è [5]:

$$x^m+dq = du+uudx:q \qquad \text{con: } q = x^n$$

Così l'analista V. Brunacci (1768-1818) ricorda l'equazione di Riccati:

"Andiamo... a parlare della separazione delle variabili nella celebre equazione conosciuta sotto il nome di equazione Riccatiana, perché il Conte Jacopo Riccati è stato il primo che ne abbia cercata la separazione delle variabili, ed abbia assegnati i casi, nei quali questa separazione succede" ([3], III, p. 99).

L'integrazione di questa equazione è possibile grazie ad un'applicazione del metodo di separazione delle variabili ed è tradizionalmente attribuita a D. Bernoulli (1700-1782). Ricordiamo però che approfondite ricerche storiche, condotte da L. Grugnetti [4] [5], hanno rivalutato radicalmente il contributo di Riccati nella ricerca sull'integrazione dell'equazione: questi studi hanno messo in luce che egli non si limita a proporre l'equazione e ad esaminare alcuni casi particolari di separazione di variabili. La ricerca di Riccati è ben più profonda, e va considerata decisiva per la precisazione del metodo di integrazione.

OPERE ANALITICHE DI VINCENZO RICCATI

Da un primo raffronto tra le opere di Vincenzo Riccati e quelle del padre suo Jacopo, emerge chiaramente una differenza nettissima tra i caratteri scientifici dei due studiosi: a fronte dell'indole poliedrica, tipicamente enciclopedica di Jacopo, gli interessi di Vincenzo appaiono concentrati sulle scienze matematiche e fisiche [1] [2]. Il prediletto campo di ricerca di Vincenzo è l'Analisi, e segnatamente l'impostazione della trattazione analitica di problemi meccanici, condotta attraverso la risoluzione di equazioni differenziali, opportunamente costruite.

Tra le opere di Vincenzo Riccati, particolare attenzione merita *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius*, un trattato pubblicato nel 1752 [8]. In tale lavoro, Vincenzo Riccati, dopo aver ricordato studi dei Bernoulli, di J. Hermann, di G. Manfredi e del proprio padre Jacopo sull'integrazione di equazioni con il procedimento di separazione delle variabili (interessante è il metodo riccatiano della "dimezzata separazione" [7]), indica la possibilità di ottenere importanti quadrature anche evitando il ricorso a tale metodo; egli cita una tecnica proposta da L. Euler (1707-1783):

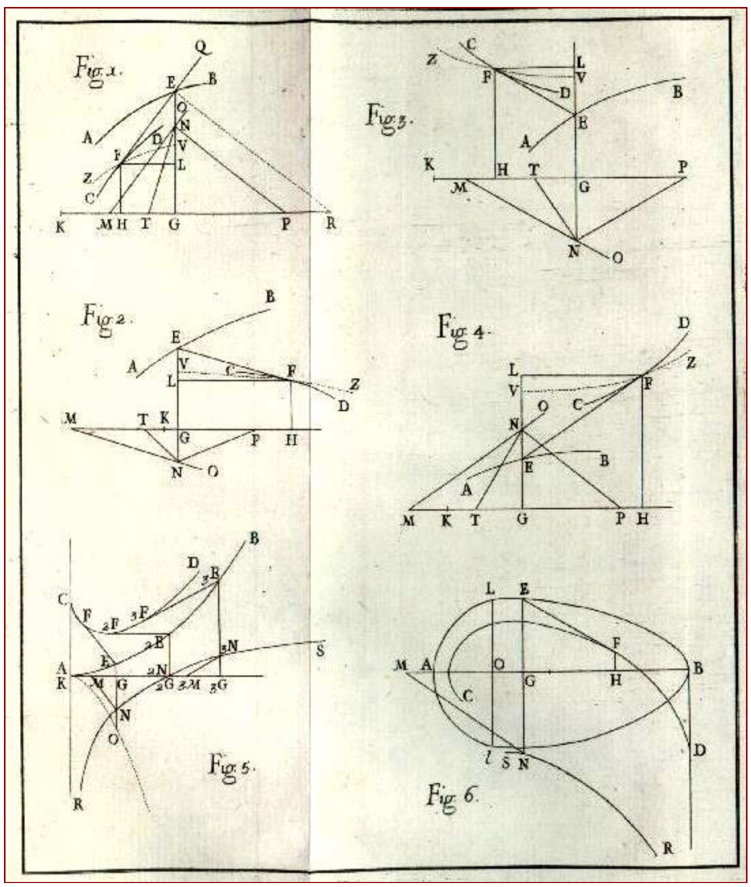
"Primus, ac solus Eulerus, quantum quidem mihi constat, in tomo sexto Ac. Petrop. aequationis peculiaris maxime simplicis constructionem invenit per rectificationem ellypsis, in qua aequatione non solum indeterminatae non separantur, sed ne separari quidem posse, constructio docet" ([8], p. 4).

Incoraggiato dal successo euleriano, Vincenzo Riccati si impegna nella ricerca di un nuovo metodo per la risoluzione di equazioni differenziali, con l'ausilio di un modello fisico, procedimento non presente nella memoria di Euler.

Lo spunto dal quale prende le mosse la ricerca ([8], pp. 4 e 7) è individuabile in una nota di A. C. Clairaut (1713-1765) pubblicata a Parigi ("in monumentis Ac. Reg. Paris.") nel 1742. La proposta di Clairaut non è però accompagnata da una completa dimostrazione; perciò Riccati si impegna nell'approfondimento di tale spunto. Il procedimento ottenuto, nota Riccati, è semplice ed efficace, essendo applicabile ad una vasta classe di equazioni.

Apprendiamo inoltre dall'Autore che la ricerca presentata in [8] è condotta con la collaborazione della matematica milanese M. G. Agnesi (1718-1799), già corrispondente di Jacopo Riccati ed autrice del manuale *Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana*, pubblicato a Milano nel 1748.

Il Capitolo I ([8], pp. 7-18) è dedicato alle "equazioni che possono essere costruite mediante la curva trattòria a tangente costante, con metodo diretto": l'Autore propone una casistica di quattro possibilità, ovvero di quattro diverse esemplificazioni fisiche che danno origine ad altrettante equazioni differenziali.



In ciascuno di questi quattro casi, si considera una curva, detta "trattòria" (secondo la proposta di Clairaut), AB, descritta da ([8], pp. 7-8):

$$\begin{cases} x = 2a\int T dt \\ y = al\dfrac{1}{t} \end{cases}$$

dove "*a* est constans pro libito accepta", sottolinea Clairaut ([8], p. 7).

Riccati considera tale curva percorsa dall'estremo E di un filo EF, il cui secondo estremo viene a muoversi su di una seconda curva, CD; l'Autore ricorda le parole di Clairaut:

"Filo EF= *a* describatur curva CD tractoria curvae AB. Si externus angulus GEQ bifariam dividatur recta ER, ordinata *p* curvae erit = GR/GE" ([8], p. 7).

Ma Clairaut non procede oltre, e Riccati si impegna così autonomamente nell'approfondimento dell'idea del matematico francese.

Riccati presenta contemporaneamente i quattro casi considerati, ciascuno dei quali contrassegnato mediante una distinzione di segno: la figura e le equazioni qui riportate sono tuttavia quelle relative alla prima scelta del segno (e quindi al modello fisico considerato fondamentale). Per l'ordinata FH si ottiene:

$$FH = \int \frac{q}{b} dz = \frac{q}{b} z$$

In base alle caratteristiche geometriche, si ricava:

$$\text{MG : GN = FL : LE} \quad \Rightarrow \quad b : q = (x - z) : \left(y - \int \frac{q}{b} dz \right)$$

$$\text{MG : NM = FL : FE} \quad \Rightarrow \quad b : \sqrt{b^2 + q^2} = (x - z) : a$$

$$z = x - \frac{ab}{\sqrt{b^2 + q^2}} \quad \Rightarrow \quad dz = dx - d\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2 + q^2}} \right)$$

Sostituendo queste espressioni nella prima equazione otteniamo:

$$b : q = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + q^2}} : \left\{ y - \frac{1}{b} \cdot \int \left[q dx - abq \cdot d\left(\frac{1}{\sqrt{b^2 + q^2}} \right) \right] \right\}$$

da cui si perviene infine all'equazione differenziale:

$$\frac{abdq}{\sqrt{b^2+q^2}}+qdx=bdy$$

Il procedimento è chiarito dall'Autore attraverso la presentazione di esempi in cui alcune equazioni vengono ridotte al caso generale ed integrate ([8], pp. 9-10). Nel secondo capitolo, Riccati propone un procedimento sostanzialmente inverso (dal punto di vista tecnico) a quello descritto nel primo; e nei capitoli seguenti l'Autore applica i procedimenti proposti ad altre equazioni.

Il lavoro esaminato è quindi un'opera dichiaratamente tecnica e propone un procedimento per la trattazione di equazioni differenziali certamente interessante, rigoroso e completo. Pur senza contenere la presentazione di ricerche teoriche innovative, di veri ampliamenti concettuali, esso è originale e profondo nel contenuto e corretto nell'esposizione: l'importanza (e la novità) del metodo proposto da Vincenzo Riccati, come sarà ribadito nel paragrafo seguente, consiste nel ricercare l'integrazione di una vasta classe di equazioni evitando il ricorso al metodo classico di separazione delle indeterminate (procedimento che troviamo spesso utilizzato nelle opere di Jacopo Riccati [1] [2] [7]).

NOVITÀ DELL'APPROCCIO RICCATIANO

Sarebbe riduttivo limitare la portata del contributo riccatiano alla storia delle equazioni differenziali all'equazione di Riccati o agli studi fisico-matematici di Jacopo e di Vincenzo Riccati (ripresi anche da Giordano).

Storicamente, infatti, l'importanza connessa alle equazioni differenziali di Jacopo Riccati è da attribuire all'innovativa impostazione dei metodi risolutivi proposti: soprattutto in *Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali di primo grado, e della riduzione delle equazioni differenziali del seondo grado, e d'altri gradi ulteriori* (in [7], pp. 433-598), grazie ad un cambiamento di variabili, Riccati può ridurre l'equazione proposta del secondo ordine ad un'equazione del primo ordine. Scrive a tale proposito M. Kline:

'L'opera di Riccati è significativa non soltanto perché considerò equazioni differenziali del second'ordine, ma anche perché ebbe l'idea di ricondurre le equazioni del second'ordine a equazioni del prim'ordine. Quest'idea di ridurre l'ordine di un'equazione differenziale ordinaria con un qualche artificio si rivelerà uno dei metodi fondamentali per la trattazione delle equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore" ([6], pp. 564-565).

Nella risoluzione riccatiana di alcune equazioni, quindi, è contenuto ed esemplificato uno spunto assai fecondo: la ricerca di una trasformazione per ottenere la riduzione dell'ordine dell'equazione. Proprio questa idea porterà, nel volgere di pochi anni, L. Euler ad elaborare il metodo generale per l'integrazione delle equaz ioni lineari non omogenee di ordine qualsiasi.

Anche per quanto riguarda le ricerche di Vincenzo Riccati sull'integrazione delle equazioni differenziali va notato che non raramente, nella storia della matematica, l'importanza del risultato ottenuto è super ata dall'interesse per il procedimento seguito: i procedimenti indicati da Vincenzo Riccati devono quindi essere inquadrati proprio in rapporto alla ricerca di nuove e più potenti tecniche di integrazione delle equazioni, nell'àmbito della cultura analitic a, già tecnicamente consolidata, del Settecento matematico. Così M. Kline descrive lo stato della ricerca sulle equazioni differenziali nel Settecento:

'La ricerca di metodi generali per l'integrazione delle equazioni differenziali ordinarie terminò intorno al 1775... In effetti, l'interesse per i metodi generali di soluzione scemò, perché vennero trovati metodi parziali che si adattavano però a quei tipi di equazioni richieste nelle applicazioni. Ancora oggi mancano dei principi generali e di vasta portata per la soluzione delle equazioni differenziali ordinarie. Nel complesso, questo campo di ricerche ha continuato a essere una serie di tecniche separate per i vari tipi di equazioni" ([6], pp. 584-585).

Con il lavoro *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius* [8], Vincenzo Riccati non si impegna nel tentativo di ottenere metodi generali di integrazione: egli rivolge piuttosto la propria attenzione ad alcuni tipi particolari di equazioni differenziali e ne propone la risoluzione con un procedimento inusuale (basato su di un modello fisico). Vincenzo Riccati si mostra aggiornato conoscitore dei principali risultati del calcolo e delle tecniche analitiche messe a punto dai matematici del proprio tempo, nonché ricercatore coerente: la sua scelta è per certi versi opposta (dal punto di vista squisitamente tecnico) a quella del padre Jacopo, in quanto non si basa sulla possibilità, ormai ampiamente sfruttata, di separazione delle variabili, ma persegue un diverso approccio all'integrazione.

Vincenzo Riccati inserisce il trattato del 1752 [8] in un fecondo filone di ricerca, personalmente seguito già da alcuni anni; annota Brunacci, riferendosi ad un altro studio riccatiano (anch'esso parallelo ad un lavoro di Clairaut):

"Anch e Clairaut nel 1734, e Vincenzio Riccati nel 1747, adoprando, per integrare un'equazione differenziale, l'artifizio di differenziarla, per ottenerne una equazione di un ordine superiore, ma scomponibile in due fattori... [ottennero] due integrali differenti, uno dei quali era l'integrale completo, l'altro una relazione tra le variabili priva di costante arbitraria" ([3], v. IV, p. 43).

Possiamo concludere affermando che le molte equazioni proposte ed integrate dai Riccati incidono, storicamente, nel processo di formazione del pensiero analitico contemporaneo non tanto in qualità di esempi isolati e, sostanzialmente, particolari: l'importanza delle ricerche analitiche di Jacopo e di Vincenzo Riccati nella storia della matematica deve essere ricercata nella versatilità dei procedimenti proposti e nella piena, moderna consapevolezza palesata dai due studiosi a proposito del ruolo assunto dalla strategia risolutiva nella trattazione e nell'integrazione delle equazioni differenziali.

L'autore desidera ringraziare il Prof. Bruno D'Amore del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna ed i Prof. Lucia Grugnetti e Francesco Speranza del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma per la collaborazione e per i preziosi suggerimenti.

Riferimenti bibliografici

[1] **G.T. Bagni**, *Jacopo Riccati matematico*, "La matematica e la sua didattica", II, 3 (1988), 45-51.

[2] **G.T. Bagni**, *Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati e la matematica del Settecento*, Teorema, Treviso 1993.

[3] **V. Brunacci**, *Corso di Matematica sublime*, Allegrini, Firenze 1804.

[4] **L. Grugnetti**, *L'equazione di Riccati: un carteggio inedito tra Jacopo Riccati e Nicola II Bernoulli*, "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", VI, 2 (1986), 45-82.

[5] **L. Grugnetti**, *Sulla vecchia ed attuale equazione di Riccati*, "Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari", LV, 1, (1985), 7 - 24.

[6] **M. Kline**, *Storia del pensiero matematico. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino 1991.

[7] **J. Riccati**, *Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali di primo grado, e della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori*, *Opere*, I, Giusti, Lucca 1761, 433-598.

[8] **V. Riccati**, *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius*, Lelio della Volpe, Bologna 1752.