*Atti del Convegno per i sessantacinque anni di Francesco Speranza* (1997),
D'Amore, B. (a cura di), Bologna, 12-17

# Differenziale e infinitesimo alle origini del Calcolo infinitesimale: note storiche ed esperienze didattiche

GIORGIO T. BAGNI (*)

NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

***Summary.*** In this paper, the original idea of differential is briefly studied and the contraposition of potential and actual infinitesimal is underlined. Some researches about the status of infinitesimal concepts in didactics are remembered: the introduction of infinitesimal methods is tacitally considered in the sense of potential, not in the sense of actual infinitesimal.

## Introduzione

I manuali di analisi matematica in uso nelle scuole secondarie propongono un'introduzione basata sulla moderna nozione di limite e tale impostazione viene generalmente mantenuta nei manuali universitari ([1]): alla presentazione del concetto di limite fa seguito, tradizionalmente, quella della derivata (intesa come limite della funzione rapporto incrementale) e quindi dell'integrale (anch'esso basato sul concetto di limite); in generale, il concetto di differenziale viene citato dopo lo studio della derivata, e la sua definizione fa riferimento alla derivata. La didattica dei concetti infinitesimali, unitamente agli atteggiamenti assunti dagli allievi, sono stati recentemente studiati da numerosi ricercatori ([2]).

Indubbiamente le radici storiche del calcolo infinitesimale affondano nell'antichità: spesso ad alcune tecniche archimedee (in particolare al metodo dimostrativo che sarà detto di esaustione) vengono idealmente avvicinati i procedimenti che, nel XVII secolo, portarono alla nascita dell'analisi matematica ([3]). In questo lavoro, tuttavia, ci occuperemo specificamente della fase storica che portò ad una definizione moderna dei concetti infinitesimali, definizione che faremo coincidere con le fondamentali ricerche di Newton e di Leibniz.

---

(*) Professore a contratto presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.

([1]) Alcuni Autori preferiscono evidenziare il ruolo dell'integrazione (ad esempio; Apostol, 1977); del tutto particolare è l'impostazione dell'analisi non-standard (Robinson, 1974).

([2]) Per una bibliografia didattica: D'Amore, 1996; storica: Barbieri e Pepe, 1992; per una presentazione storica: Castelnuovo, 1938; Geymonat, 1947; Boyer, 1969; Arrigo e D'Amore, 1992; Edwards, 1994. Alcuni studî didattici sono: Cornu, 1980; Schwarzenberger, 1980; Cornu, 1981; Tall and Vinner, 1981; Orton, 1983; Tall, 1985; Davis and Vinner, 1986; Mamona, 1987; Sierpinska, 1987; Mamona-Downs, 1990; Monaghan, 1991; Tsamir and Tirosh, 1992; Dimarakis, 1996; Dimarakis e Gagatsis, 1996 e 1997; Fischbein, Jehiam and Cohen, 1996; Bagni, 1997a. In particolare, sulla visualizzazione: Vinner, 1992; Duval, 1993 e 1994.

([3]) Così N. Bourbaki ricorda il procedimento di esaustione: "Senza far uso di particolari artifici, il principio di esaustione è il seguente: con una decomposizione in 'somme di Riemann' si ottengono degli estremi superiori ed inferiori per la quantità studiata, estremi che

Il Seicento fu un periodo assai fecondo per quanto riguarda la ricerca matematica; le grandi opere newtoniane e leibniziane ebbero infatti molti importanti precursori, tra i quali Valerio, Kepler, Cavalieri, Pascal, Roberval, Torricelli, Barrow, Wallis, Fermat (Castelnuovo, 1938; Boyer, 1969; Edwards, 1994).

## Dalle flussioni newtoniane al differenziale leibniziano

L'importanza di Newton nella storia della scienza in generale e della matematica in particolare è ampiamente riconosciuta ([4]); per quanto riguarda il calcolo infinitesimale, è ormai accertato che Newton fu il primo a mettere a punto un'analisi matematica assai simile a quella modernamente considerata ([5]).

In Newton i concetti di fondamentali sono quelli di fluente (una quantità che varia in funzione del tempo) e di flussione (la corrispondente derivata rispetto al tempo; si veda: Newton, 1740). Il ricavo della flussione di una fluente assegnata avviene così: considerata la $f(x;\ y) = 0$, si sostituiscono a $x$ ed a $y$ rispettivamente $x+\dot{x}o$ e $y+\dot{y}o$ ($o$ è un infinitesimo "che sostituisce il nostro *dt*": Castelnuovo, 1938, p. 104); quindi si sviluppa $f(x+\dot{x}o+y+\dot{y}o) = 0$, si divide per $o$ e si annulla infine $o$ (fase che corrisponderebbe al nostro passaggio al limite). Si tratta del procedimento che era stato applicato, ma soltanto in alcuni casi particolari, da Fermat (Bottazzini, Freguglia e Toti Rigatelli, 1992, pp. 258-260).

---

vengono confrontati direttamente con l'espressione prevista per tale quantità, oppure con gli estremi corrispondenti per un problema analogo già risolto"; egli osserva che una presentazione formalmente analoga venne data da Archimede alla determinazione della tangente alla spirale (Archimede, 1913-1915, II, 62-76), "risultato isolato, ed il solo che si possa citare come antica fonte del «calcolo differenziale», oltre alla determinazione relativamente facile delle tangenti alle coniche ed a qualche problema sui massimi e sui minimi". Inoltre: "Se per quanto concerne l'integrazione, un immenso campo di ricerche si apriva ai matematici greci, non solo per la teoria delle aree e dei volumi, ma anche per la statica e l'idrostatica, es si, mancando l'impulso di problemi di cinematica, non ebbero l'occasione di affrontare seriamente la differenziazione" (Bourbaki, 1963, p. 173). Per una trattazione storica: Rufini, 1926; Castelnuovo, 1938, p. 29; Smith, 1959; Euclide, 1970; Carruccio, 1972; Archimede, 1974; Freguglia, 1982, pp. 60-70; Giusti, 1983, p. 255; van der Waerden, 1983; Kline, 1991, p. 399; Bottazzini, Freguglia e Toti Rigatelli, 1992, pp. 217-225; Bagni, 1996, I e II.

([4]) "I grandi progressi della matematica e della scienza hanno quasi sempre origine nell'opera di molti studiosi che portano ciascuno il loro contributo...; alla fine, un uomo d'ingegno abbastanza acuto per saper distinguere le idee valide nella gran massa dei suggerimenti e delle dichiarazioni dei suoi predecessori, dotato dell'immaginazione occorrente per incastonare le varie tessere in un nuovo mosaico e audace quanto basta per costruire un progetto generale, compie il passo culminante. Nel caso del Calcolo infinitesimale quest'uomo fu Newton" (Kline, 1991, I). Inoltre: Frajese, 1969; Struik, 1981; Per le opere originali: Cavalieri, 1989; Fermat, 1891-1922; Newton; 1925 e 1965; con riferimento a: Valerio, 1661: Maracchia, 1992.

([5]) "Le sistemazioni che Newton ideò per il calcolo infinitesimale furono due: il cosiddetto calcolo delle flussioni e quello delle prime e ultime ragioni. Malgrado la maggior speditezza di quello rispetto a questo... è degno di nota che nei *Principia* egli abbia posto a fondamento della sua trattazione della meccanica il metodo delle prime e ultime ragioni" (Geymonat, 1970, II, p. 630). Importanti sono gli studî: Koyré, 1983; Westfall, 1989.

Caposaldo dell'impostazione leibniziana (sviluppatasi indipendentemente da quella newtoniana: Bottazzini, Freguglia e Toti Rigatelli, 1992, pp. 280-281) è la memoria *Nova methodus...* (Leibniz, 1684). La sua importanza, assoluta per la (pressoché definitiva) sistemazione del linguaggio dell'analisi, è inizialmente meno nitida per i rapporti tra il ruolo del differenziale ed il ricavo della derivata.

Sottolineiamo che, ad una prima lettura, l'introduzione che Leibniz dà del differenziale e della derivata può apparire viziata di circolo (Castelnuovo, 1938, pp. 110-112): egli infatti innanzitutto (Leibniz, 1684) definisce il differenziale di $y = f(x)$ sulla base del coefficiente angolare della retta tangente al grafico (dunque della derivata prima) ([6]); quindi fornisce, senza dimostrazione, un elenco di regole di derivazione (affermando: "La dimostrazione di tutte le regole esposte sarà facile per chi è versato in questi studi", in: Castelnuovo, 1938, p. 168). Solo successivamente egli fa riferimento all'interpretazione geometrica della derivata e afferma che essa può essere utilizzata per "ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti" (trad. in: Castelnuovo, p. 111).

La mancanza di una moderna comprensione del concetto di limite e del suo ruolo alla base della nozione di derivata ha portato Leibniz a dare definizioni che non sarebbero, ai giorni nostri, pienamente accettate. Ricordiamo peraltro che il concetto di differenziale subì numerosi aggiustamenti nell'opera leibniziana ([7]), talvolta nel senso (estraneo all'importazione di Newton) dell'infinitesimo attuale ([8]); dunque le impostazioni dei due grandi creatori del Calcolo infinitesimale per molti versi appaiono complementari ([9]).

---

([6]) "Dallo studio delle *Lettres* di Pascal in particolare Leibniz rilevò l'importanza del cosiddetto «triangolo caratteristico»... Come applicazione del «triangolo caratteristico», Leibniz ottenne una particolare trasformazione di quadrature, che egli chiamò «trasmutazione»" (Bottazzini, 1990, p. 12). Inoltre: Loria, 1929-1933, p. 585; Barone, 1992.

([7]) L'atteggiamento di Leibniz nei confronti del differenziale ebbe un'evoluzione (Dupont, 1981, II-2, p. 713): all'inizio (1675) egli ometteva la sua indicazione nella notazione dell'integrale (assumendo $dx = 1$ e identificando il differenziale $dy$ con la derivata $dy/dx$: Bourbaki, 1963, p. 199). Più tardi, Leibniz scrisse: "Raccomando di fare attenzione a non omettere $dx$, ... errore frequentemente commesso e che impedisce di andare oltre, poiché si privano questi indivisibili, come qui $dx$, della loro generalità" (Leibniz, 1849-1863, V, p. 233). Alla base di queste posizioni furono le difficoltà collegate all'infinitesimo attuale ed alla composizione del continuo (Bagni, 1996, II). F. Enriques scrive: "La derivazione viene considerata da lui come quoziente di due *differentiae* o (come si è detto in seguito secondo Giov. Bernoulli e L. Eulero) di due differenziali... Se questi incrementi vadano intesi soltanto in senso potenziale, cioè come quantità variabili evanescenti, o staticamente come infinitesimi attuali non appare chiaramente nell'opera di Leibniz" (Enriques, 1938, p. 60; Bos, 1974-1975).

([8]) "La distinzione fondamentale fra l'opera dei due grandi matematici consiste nel fatto che Newton usava gli incrementi infinitamente piccoli di $x$ e di $y$ come mezzo per determinare la flussione o derivata, che era essenzialmente il limite del rapporto degli incrementi quando essi diventavano sempre più piccoli. Leibniz, invece, maneggiava direttamente gli incrementi infinitamente piccoli di $x$ e di $y$, cioè i differenziali, e ne determinava le relazioni. Questa differenza riflette l'orientamento da fisico di Newton, per cui era d'importanza centrale un concetto come la velocità, e l'atteggiamento da filosofo di Leibniz" (Kline, 1991, I, p. 442).

([9]) "Sia a Newton sia a Leibniz bisogna attribuire il merito di aver visto nel calcolo infinitesimale un nuovo metodo generale applicabile a molti tipi di funzioni. Dopo di loro, il calcolo infinitesimale non fu più una semplice appendice o un'estensione della geometria greca, ma una scienza indipendente capace di affrontare una gamma molto estesa di problemi" (Kline, 1991, I, p. 442). Per l'evoluzione dell'analisi: Bottazzini, 1981; Bottazzini, 1990.

## Infinitesimo potenziale e attuale nella didattica della matematica

Sarebbe impossibile seguire dettagliatamente in questa sede l'evoluzione dei concetti fondamentali dell'analisi nel XVIII secolo ([10]), con i grandi trattati organici (Agnesi, 1748; Riccati e Saladini, 1765-1767; Euler, 1787; Brunacci, 1804), con le aspre contestazioni al concetto di infinitesimo (ricordate ad esempio in: Arrigo e D'Amore, 1992) e con i tentativi, peraltro infruttuosi, di rivalutare l'infinitesimo attuale (Torelli, 1758; si veda: Bagni 1997b). Sulla strada della rigorizzazione del Calcolo infinitesimale, Cauchy pubblicò il proprio *Cours d'analyse* nel 1821 (in: Cauchy, 1884-1897); Lacroix nel suo *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1810-1819) fu il primo ad introdurre il termine "coefficiente differenziale" per indicare la derivata (Lacroix, 1837; è citato in: Kline, 1991, I, p. 505; Bagni, 1996, II). Il fondamentale concetto di limite fu quindi ripreso e perfezionato a partire dalla seconda metà del XIX secolo.

Come abbiamo osservato nella nota 2, molte ricerche didattiche sono state recentemente dedicate all'infinitesimo potenziale ed attuale (ricordiamo ancora la vasta bibliografia riportata in: D'Amore, 1996); in particolare, è stato evidenziato che la tradizionale presentazione intuitiva del concetto di limite nella scuola secondaria superiore riserva spazio primario all'infinitesimo potenziale.

Certamente la nozione di infinitesimo potenziale, intuitiva e didatticamente utile, deve essere attentamente controllata dall'insegnante; un suo impiego eccessivamente disinvolto potrebbe comportare difficoltà e problemi seri per l'allievo, causati da un apprendimento incompleto, settoriale ed a tratti fuorviante (Dimarakis e Gagatsis, 1997; Bagni, 1997a). Una presentazione del concetto di limite in termini di infinitesimo attuale dovrebbe preceduta da un'accorta introduzione delle nozioni fondamentali della topologia e risulterebbe pertanto indubbiamente impegnativa, pur potendo contribuire ad eludere il formarsi di tali problemi.

## *Riferimenti bibliografici*

Agnesi, M.G. (1748), *Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana*, I-II, Nella Regia Ducal Corte, Milano 1748.

Apostol, T.M. (1977), *Calcolo*, I, Boringhieri, Torino.

Archimede (1913-1915), *Opera Omnia*, J.L. Heiberg, I-III, Teubner, Leipzig.

Archimede (1974), *Opere*, A. Frajese, UTET, Torino.

Arrigo, G. e D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica*, I-II, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1997a), *L'infinitesimo. Infinitesimo potenziale ed infinitesimo attuale nelle concezioni degli studenti della scuola secondaria superiore*, preprint.

Bagni, G.T. (1997b), *Un'intuizione dell'infinitesimo attuale: De nihilo geometrico (1758) di Giuseppe Torelli*, preprint.

---

([10]) "Fra il 1695 e il 1700 non c'è volume degli *Acta Eruditorum* pubblicati mensilmente a Lipsia in cui non appaiano delle memorie di Leibniz, dei fratelli Bernoulli, del marchese de l'Hôpital riguardanti, con notazioni abbastanza prossime a quelle di cui ancor oggi ci serviamo, i più svariati problemi del calcolo differenziale e integrale" (Bourbaki, 1963, p. 171).

Barbieri, F. e Pepe, L. (a cura di) (1992), Bibliografia italiana di storia delle matematiche 1961-1990, *Bollettino di storia delle matematiche*, XII, 1 (giugno 1992).
Barone, F. (1992), Matematica e logica nel pensiero di Leibniz, Conti, L. (a cura di), *La matematizzazione dell'universo*, 344-359, Porziuncola, Assisi.
Bos, H.J.M. (1975), Differentials, high-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 14, Springer, Berlin, 1-90.
Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.
Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino.
Bottazzini, U., Freguglia, P. e Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.
Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano.
Boyer, C. (1969), The History of the Calculus, Hallerberg et. al. (1969), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, NCTM, Washington.
Brunacci, V. (1804), *Corso di Matematica sublime*, Allegrini, Firenze.
Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.
Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna.
Cauchy A.L. (1884-1897), *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris.
Cavalieri, B. (1989) *Geometria degli indivisibili*, L. Lombardo Radice, UTET, Torino.
Cornu, B. (1980), Interference des modeles spontanes dans l'apprentissage de la notion de limite, *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 8, 57-83.
Cornu, B. (1981), Grandes lignes de l'evolution historique de la notion de limite, *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 26, 305-326.
D'Amore, B. (1996), L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi, *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335.
Davis, P. and Vinner, S. (1986), The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages, *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.
Dimarakis, I. (1996), *The Limit Concept: Difficulties-Obstacles of Students' Understanding*, unpublished MA dissertation, Roehampton Institute, Surrey University.
Dimarakis, I. and Gagatsis, A. (1996), The limit concept; Difficulties-obstacles of Students' Undestanding, Gagatsis, A. and Rogers, L. (1996), *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus, Thessaloniki.
Dimarakis, I. e Gagatsis, A. (1997), Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite, *La matematica e la sua didattica*, Bologna (preprint).
Dupont, P. (1981), *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale*, Cortina, Torino.
Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
Duval, R. (1994), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage, *Actes de la 46$^{me}$ Rencountre Internationale CIEAEM* (preprint).
Edwards, C.H. Jr. (1994), *The Historical Development of the Calculus*, Springer, Berlin.
Enriques, F. (1938) *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna.
Euclide (1970), *Elementi*, A. Frajese e L. Maccioni, UTET, Torino.
Euler, L. (1787) *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum*, I-II, Galeati, Pavia (seconda ed.; prima ed.: 1755).
Fermat, P. de (1891-1922) *Œuvres*, I-V, Gauthier-Villars, Paris.
Fischbein, E.; Jehiam, R. and Cohen, D. (1996), Il concetto di numero irrazionale in studenti di scuola superiore ed in futuri insegnanti, *La matematica e la sua didattica*, 3, (*Educational Studies in Mathematics*, 29, 1995, 29-44).
Frajese, A. (1969), *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, Firenze.
Freguglia, P. (1982), *Fondamenti storici della geometria*, Feltrinelli, Milano.
Geymonat, L. (1947), *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Levrotto-Bella, Torino.
Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.
Giusti, E. (1983) *Analisi matematica*, I, Boringhieri, Torino.
Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford Un. Press., New York, 1972).

Koyré, A. (1983) *Studi newtoniani*, Einaudi, Torino.
Lacroix, S.F. (1837), *Traité elementaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, Bachelier, Paris (5me ed.).
Leibniz, G.W. (1684), Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus, *Acta Eruditorum*, maggio 1684, Lipsia.
Leibniz, G.W. (1849-1863), *Mathematische Schriften*, I-VII., Gerhardt, C.I., Ascher-Schmidt, Berlin-Halle.
Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino.
Mamona, J. (1987), *Students' Interpretations of Some Concepts of Mathematical Analysis*, Unpublished Ph. D. thesis, University of Southampton.
Mamona-Downs, J. (1990), Calculus-Analysis: A review of recent educational research, *II Simposio Internacional Investigacion en Educacion Matematica*, 11-36, Cuernavaca, Mexico.
Maracchia, S. (1992), Luca Valerio matematico Linceo, Conti, L. (a cura di), *La matematizzazione dell'universo*, 253-302, Porziuncola, Assisi.
Monaghan, J. (1991), Problems with the language of Limits, *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.
Newton, I. (1740), *Le methode des fluxions et des suites infinites*, Debure, Paris.
Newton, I. (1925), *Principii di filosofia naturale. Teoria della gravitazione*, Enriques, F. e Forti, U., Stock, Roma.
Newton, I. (1965), *Opere*, Pala, A. (a cura di), UTET, Torino.
Orton, A. (1983), Students' Understanding of Differentiation, *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.
Riccati V. e Saladini G. (1765-1767), *Institutiones Analyticae*, I-II, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna 1765, 1767.
Robinson, A. (1974), *Non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam-London.
Rufini, E. (1926), *Il "Metodo" di Archimede*, Zanichelli, Bologna.
Schwarzenberger, R. (1980), Why Calculus cannot be made easy, *Mathematical Gazette*, 64, 158-166.
Sierpinska, A. (1987), Humanities Students and Epistemological Obstacles related to limits, *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.
Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, New York.
Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna.
Tall, D. and Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particolar reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.
Tall, D. (1985), Understanding the Calculus, *Mathematical Teaching*, 110, 49-53.
Torelli, G. (1758), *De nihilo geometrico libri II*, Carattoni, Verona.
Tsamir, P. and Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity, *PME* XVI, 90-97, Durham (NH).
Valerio, L. (1661), *De centro gravitatis solidorum libri tres*, Dozza, Bologna.
Van der Waerden, B.L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin.
Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics, in: Harel, G. and Dubinsky, E. (eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.
Westfall, R.S. (1989), *Newton*, I-II, Einaudi, Torino.