Periodico di Matematiche VII, 2, 2/3 (1994), 95-106

Una "controversia" della matematica del Settecento: i logaritmi dei numeri negativi

GIORGIO T. BAGNI

I LOGARITMI DEI NUMERI NEGATIVI

Una delle prime raccomandazioni sollecitamente affidate, nelle aule della scuola secondaria superiore, dagli insegnanti agli allievi in procinto di affrontare gli esercizi sui logaritmi è di *imporre che l'argomento di ogni logaritmo sia (strettamente) positivo*. Un'incontestabile, categorica "legge" della quale gli allievi non possono non tenere conto è infatti: *non esistono (nell'àmbito dei numeri reali) i logaritmi dei numeri non positivi*.

È forse interessante ricordare che tale "legge" ha un'importante collocazione nella storia della matematica: uno dei problemi lungamente e vivacemente discussi dai matematici del Settecento, infatti, è proprio la natura dei logaritmi dei numeri negativi [16] [24]. Nella presente nota, riassumeremo le posizioni degli studiosi che intervengono nell'aspra "controversia", sottolineando le caratteristiche di sorprendente vitalità presenti in non poche posizioni [3] [5].

Questione centrale nella storia dei logaritmi [8] [9] [10] [23] [29] [30], il problema della natura dei logaritmi dei numeri negativi viene sollevato da una lettera di Gottfried Wilhelm Leibniz a Jean Bernoulli, datata 16 marzo 1712 [17] [20], e vede coinvolti alcuni dei più celebri matematici del XVIII secolo. Gli studiosi sono infatti divisi in due schieramenti, apertamente contrapposti: da un lato, molti matematici sostengono l'opinione di Leibniz, poi ripresa da Euler [11] [19], Walmesley [31] ed in Italia, tra gli altri, da Fontana [13] [14] e da Franceschinis [15], secondo la quale i logaritmi dei numeri negativi devono essere interpretati come quantità immaginarie.

Contrario a questa opinione è un altrettanto folto gruppo di celebri matematici, guidati da Jean Bernoulli, il quale propone di considerare reali i i logaritmi dei numeri negativi, e di definirli attraverso l'uguaglianza [1] [21]:

$$\log(-x) = \log(+x)$$

in base all'osservazione, considerata decisiva dai sostenitori della tesi di Bernoulli:

$$2\cdot\log(-1)=\log(-1)^2=\log(+1)^2=2\cdot\log(+1)$$

Tra i molti matematici che si dichiarano a favore di Giovanni Bernoulli, ricordiamo Caldani [6] [7], d'Alembert [1] [15], Ferroni [12], Vincenzo e Giordano Riccati [2] [26] [27] [28], figli di Jacopo Riccati.

Dal punto di vista moderno, sarà il grande Leonhard Euler nel 1747 a chiarire definitivamente la questione dei logaritmi dei numeri negativi, applicando la celebre formula:

$$e^{i\omega}=\cos\omega+i\cdot\operatorname{sen}\omega$$

Ponendo, in essa, $\omega=\pi$, infatti, si ottiene direttamente:

$$e^{i\pi}=-1\Rightarrow\log_e(-1)=i\pi$$

Euler proverà anche che ciascun numero ammette, in àmbito complesso, infiniti logaritmi; infatti dalla $e^{i\omega}=\cos\omega+i\cdot\operatorname{sen}\omega$, con $k\in\mathbf{Z}$ segue che:

$$\log_e a=b\quad\Rightarrow\quad\log_e a=b+2k\pi\cdot i$$

Con l'opera di Euler la tesi che vuole immaginari i logaritmi dei numeri negativi trova la sua rigorosa e definitiva consacrazione, nonostante la residua presenza di qualche sbiadita contestazione "analitica", mossa ancora per alcuni anni dagli irriducibili studiosi di tradizione bernoulliana.

Ricordiamo inoltre che il sommo matematico di Basilea utilizza l'uguaglianza precedentemente citata per calcolare i logaritmi dei numeri complessi, provando che essi sono a loro volta numeri complessi e mostrando in tal modo la chiusura del corpo **C** rispetto al logaritmo ed all'esponenziale [1].

LA "CONTROVERSIA" DESCRITTA DA F.M. FRANCESCHINIS

Per inquadrare lo svolgersi della disputa sui logaritmi dei numeri negativi, presenteremo sinteticamente la memoria *De' logaritmi de' numeri negativi*, di Francesco Maria Franceschinis, in cui l'Autore si proclama deciso assertore della tesi leibniziana ed euleriana e dedica ad essa una lunga dissertazione. Il breve lavoro è incluso in *Opuscoli Matematici*, una raccolta di note scientifiche dello stesso Franceschinis, pubblicata a Bassano nel 1787 dall'editore Giuseppe Remondini [15].

Riprendendo, sostanzialmente, l'introduzione neperiana [4] [25], Franceschinis esordisce con la presentazione dell'isomorfismo tra la progressione aritmetica degli esponenti e la progressione geometrica delle potenze, e scrive:

"I logaritmi... altro non sono, che i termini di una qualunque progressione aritmetica corrispondenti per ordine ai termini di una qualunque progressione geometrica... Secondo questa idea le due serie sono tra loro indipendenti, onde la stessa progressione aritmetica potrà dare allo stesso tempo la serie de' logaritmi per i termini d'infinite progressioni geometriche diverse: così ogni quantità potrà avere infiniti logaritmi... e viceversa ogni quantità potrà essere logaritmo d'infinite quantità diverse" ([15], p. 12).

Subito, però, l'Autore nota che la questione posta in termini così generali necessita di una qualche precisazione ("Ma di qual utilità sarebbero i logaritmi, se si prendessero in quella loro generalità?" [15], p. 13), e nota: "È dunque necessario che le due progressioni sieno in qualche modo tra loro dipendenti, e perciò sieno determinate" ([15], p. 14). Per precisare questa "dipendenza" è necessario fissare due coppie di termini corrispondenti nelle successioni introdotte: in questo modo, suggerisce lo stesso Autore, risulteranno subito determinati "... la ragione, e la differenza, e perciò tutti gli altri termini della geometrica, e dell'aritmetica progressione" ([15], p. 14). Si fissano, innanzitutto, rispettivamente in 1 ed in 0 i primi termini delle due successioni, ovvero si suppone (per ogni valore accettabile della base): $\log 1 = 0$.

Dopo aver ricordato le proprietà dei logaritmi ("i quattro... Teoremi, che tutto l'utile ne fanno", [15], p. 16), nota l'Autore:

"Ora perché possiamo godere del vantaggio, che nel calcolo ne presentano i logaritmi, cioè onde per essi risalire possiamo alle quantità, è necessario, che tutti sieno presi in uno stesso sistema" ([15], p. 17).

E da qui egli immediatamente passa alla questione ritenuta centrale per quanto riguarda il problema dei logaritmi dei numeri negativi:

"Fissato il rapporto dei due primi termini delle due serie in modo, che tutti i numeri positivi abbiano il loro logaritmo, i numeri negativi il potranno pure avere nel medesimo sistema?" ([15], p. 17).

La sentenza di Franceschinis è drastica: "dalla genuina, e prima idea de' Logaritmi deducesi evidentemente non darsi i logaritmi de' numeri negativi" ([15], p. 19). Ecco la motivazione addotta:

"Perché nel sistema medesimo, che i logaritmi inchiude di tutti i numeri positivi, quelli pure si avessero de' numeri negativi, sarebbe primieramente necessario il poter fingere una progressione geometrica, in cui essendo compresi... i numeri positivi possibili potessere pure essere compresi... i negativi. Ma questo è impossibile" ([15], pp. 19-20).

L'Autore giustifica questa affermazione ricordando che una progressione geometrica di base h e ragione j (con h positivo e diverso da 1 e j intero) non può assumere valori non positivi.

"Dove dunque saranno i logaritmi de' numeri negativi?" si chiede, non senza una punta di ironia, l'Autore ([15], p. 21); e subito introduce una tesi proposta, tra gli altri, da d'Alembert:

"Non v'è altro ripiego, che asserire, che il medesimo logaritmo corrisponde al medesimo numero, sia positivo, che negativo. Ciò diffatti procura di persuadere d'Alembert dicendo... che la progressione negativa è il complemento della positiva, poiché esse riunite ne danno tutte le medie proporzionali possibili" ([15], p. 21).

L'affermazione alla quale l'Autore si riferisce merita attenzione e può essere illustrata attraverso un semplice esempio: sappiamo, infatti, che la "media proporzionale" tra 1 e 4 è 2; la tesi di d'Alembert porterebbe ad affermare che anche il valore -2 gode della stessa proprietà rispetto a 1 ed a 4, in quanto risulta:

$$(1)\cdot(4) = (+2)\cdot(+2) = (-2)\cdot(-2)$$

Per confutare l'asserzione di d'Alembert, Franceschinis osserva:

"In una progressione geometrica ciascun termine non ha la sola relazione di essere media proporzionale, lo che a tutti conviene fuori che al primo, e all'ultimo, ma quello altresì di essere estremo, e terza proporzionale, lo che a tutti conviene" ([15], p. 21).

Riprendendo l'esempio precedente, infatti, sia +2 che -2 possono essere considerati alla stregua di "media proporzionale" tra 1 e 4, ma soltanto il valore positivo, +2, può essere considerato "estremo" con 4 ed 8 nella proporzione:

$$2 : 4 = 4 : 8$$

Francesco Maria Franceschinis ritiene di poter con ciò affermare la sostanziale estraneità delle quantità negative da una progressione geometrica e prosegue quindi nell'esame di un secondo argomento indicato dai sostenitori delle tesi di Bernoulli (l'opinione è espressa, tra gli altri, dallo stesso d'Alembert). Ma il giudizio dell'Autore è, ancora una volta, radicalmente negativo:

"Essere cioè $2\cdot \log 1 = 2\cdot \log(-1)$, e provarsi dall'essere $1 : (-1) = (-1) : 1$, onde ne nasce $(-1)\cdot (-1) = (+1)\cdot (+1)$ e $2\cdot \log 1 = 2\cdot \log(-1)$ (del qual argomento sembrano trionfare i Bernoulliani) trovasi, esaminato a fondo essere insussistente" ([15], p. 25).

La ragione di questa opposizione è così spiegata: "poiché da questo, che sia $(-1)\cdot (-1) = (+1)\cdot (+1)$ non si può dedurre, che sia $2\cdot \log 1 = 2\cdot \log(-1)$ quando pure non deducasi essere $-1 = 1$, lo che niun buon Matematico mai vorrà" ([15], p. 25); l'Autore nota infatti che "siccome... nel passaggio delle potenze alle radici conviene usare di molta cautela, questa pure sarà necessaria passando dai logaritmi delle potenze a quelli delle radici" ([15] pp. 26-27).

In sostanza, Franceschinis sottolinea che per estrarre la radice quadrata di entrambi i membri dell'uguaglianza $(-1)\cdot (-1) = (+1)\cdot (+1)$ siamo tenuti ad imporre opportune condizioni ("...usare di molta cautela") per evitare evidenti assurdità quali $+1 = -1$. Ed analoghe precauzioni sono necessarie nell'estrazione del logaritmo nell'esempio sopra riportato "perché l'equazione sussista" ([15], p. 27).

LA CURVA LOGARITMICA

La puntuale trattazione di Franceschinis prosegue con l'esame della questione della curva logaritmica [15]: sempre in contrasto con d'Alembert, Franceschinis nega che il grafico cartesiano dell'equazione $y = \log x$ possa essere costituita da due rami simmetrici rispetto all'asse delle ordinate; ciò è indicato dal grande pensatore francese e da molti altri sostenitori della realtà dei logaritmi dei numeri negativi, tra i quali gli stessi Riccati [26] [27] [28]. Giordano Riccati, ad esempio, afferma:

"La vera equazione della Logistica... ha due rami affatto simili, e dall'assintoto equidistanti, onde ci sono forniti i logaritmi di' numeri negativi eguali a quelli de' numeri postivi" [26].

Così replica Franceschinis:

"Come può egli [il riferimento è a d'Alembert, ma anche ai Riccati] poi proporre il problema della costruzione della logaritmica in modo, che resti esclusa l'idea della progressione geometrica, se questa ne forma la essenza? ... nella quale progressione geometrica è impossibile il passaggio dal 0 al negativo" ([15], pp. 31-32).

Anche altri argomenti sostengono l'opinione dei matematici schierati per la realtà dei logaritmi dei numeri negativi; Franceschinis li presenta e si appresta a confutarli:

"Dalla equazione $dx/x=dy$ crede Bernoulli, e d'Alembert dedursi invincibilmente, darsi i logaritmi de' numeri negativi, ed essere essi eguali ai logaritmi de' numeri positivi, poiché, dicon essi, l'equazione $dx/x = -dx/(-x) = dy$, onde sarà $y = \log x = \log(-x)$" ([15], p. 37).

Franceschinis non ritiene però decisivo questo argomento e, dopo aver premesso che "l'equazione differenziale non ne dà mai espressamente la natura, e l'andamento della curva, ma solo ne esprime la relazione degli elementi delle coordinate", sottolinea: "perché il doppio segno delle semiordinate indichi un doppio ramo di curva, è necessario, che questo doppio segno siavi necessariamente inchiuso, né basta, che si possa l'uno per l'altro prendere salvando l'equazione" ([15], p. 37).

Per giustificare la propria opinione, l'Autore indica quale controesempio l'equazione differenziale:

$$2dy/y = -dx/x$$

"Se suppongo mutato il segno alla x, l'equazione differenziale non si muta, perché $-dx/x = dx/(-x)$... dunque la curva ha un ramo, che corrisponde alle x negative?" ([15], p. 38). E subito risponde l'Autore integrando l'equazione proposta ed ottenendo una funzione in cui, "posta x negativa, y diventa immaginaria. Dunque la curva non può avere un ramo corrispondente ad x negativa" ([15], pag. 38). La conclusione è decisa:

"Così non dovrò poter argomentare un ramo negativo della logaritmica dal trovare, che mutando il segno all'ordinata non si muta l'equazione differenziale della logaritmica" ([15], p. 38).

Prima di abbandonare la questione della curva logaritmica [18], Franceschinis non risparmia un'ulteriore critica alle argomentazioni bernoulliane:

"Di più il raziocinio del Bernoulli parmi che supponga in certo modo quello che è in questione. Diffatti come può egli conchiudere essere log.x = log.$(-x)$ dall'essere $dx/x = -dx/(-x)$, se non suppone $-dx/(-x)$ essere il differenziale del logaritmo di $-x$, e perciò darsi tale logaritmo, ed essere reale, giacché reale è sicuramente il suo differenziale?" ([15], pp. 38-39).

La trattazione prosegue con l'esame di un'altra questione collegata ad altre annotazioni di d'Alembert. Questi, riferendosi all'equazione esponenziale, sottolinea che "ci possono essere infiniti valori di x, che ne diano un doppio valore di y" ([15], p. 43); ad esempio, risulta:

$$(+2)^2 = (-2)^2 = 4$$
$$(+2)^4 = (-2)^4 = 16$$
$$\ldots$$

La risposta di Franceschinis è la seguente:

"Io credo, che l'equazione... non dia pel ramo negativo, che dei punti conjugati, e sconnessi, e non continuati, talmente che vi sono infiniti punti dell'asse, a cui non corrisponde ordinata negativa... onde l'equazione... non è generale, e non si adatta a tutti i punti dell'asse, e perciò il ramo negativo della curva non può essere composto di punti uniti, ma solo di punti divisi" ([15], pp. 43-44).

LE OSSERVAZIONI DI GIANFRANCESCO MALFATTI

Giovanni Francesco Giuseppe Malfatti (1731-1807) è un allievo di Vincenzo Riccati nello studio bolognese: anche Malfatti è coinvolto nella questione dei logaritmi dei numeri negativi e contesta velatamente la posizione del proprio maestro sulla realtà di tali logaritmi [17] [22].

Malfatti, in [22], nell'occuparsi dell'argomento bernoulliano che sostiene la simmetria della curva logaritmica rispetto all'asse delle ordinate (argomento sostenuto anche dai Riccati), assume una posizione di mediazione, forse (nota garbatamente Enrico Giusti in [17]) per confermare il rispetto e la gratitudine nei confronti del proprio maestro, Vincenzo Riccati.

In sostanza, Malfatti sottolinea che la curva logaritmica di equazione:

$$y = \log x$$

non può essere considerata coincidente con la curva di equazione:

$$2y = \log x^2$$

essendo questa seconda equazione esprimibile da [17] [22]:

se $x>0$, $y = \log(+x)$ se $x<0$, $y = \log(-x)$

ovvero da: $y = \log|x|$.

I due rami della curva logaritmica, invocati dai sostenitori delle tesi di Bernoulli (e, tra di essi, anche dal maestro di Malfatti, Vincenzo Riccati), risultano quindi propri soltanto del grafico della seconda equazione.

Concludiamo con le parole di Enrico Giusti a commento della "moderata" posizione malfattiana:

"La considerazione di uno o due rami della curva logaritmica dipenderà dunque dal problema geometrico dal quale essa sorge, cosicché le due posizioni divengono tra loro complementari ed entrambe legittime" ([17], p. 53).

L'autore desidera ringraziare la Prof. Lucia Grugnetti del Dipartimento di Matematica dell'Università di Parma per la collaborazione e per i preziosi suggerimenti.

Note bibliografiche

[1] **G.T. Bagni**, *I logaritmi dei numeri negativi in un "Opuscolo matematico" (1787) di F.M. Franceschinis*, in: "La matematica e la sua didattica", a. V, n. 3, Armando, Roma 1991.

[2] **G.T. Bagni**, *Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati e la matematica del Settecento*, Teorema, Treviso 1993.

[3] **B. Boncompagni**, *Biografia del matematico Giuseppe Calandrelli*, in: "Giornale Arcadico", 1840.

[4] **H. Briggs**, *Logarithmorum Chilias prima*, Londini 1617.
[5] **N. Bourbaki**, *Elementi di storia della matematica*, Hermann, Paris 1960 (traduzione italiana: Feltrinelli, Milano 1963).
[6] **P.M. Caldani**, *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi*, Lelio Della Volpe, Bologna 1782.
[7] **P.M. Caldani**, *Riflessioni sopra un opuscolo del P. Franceschinis Barnabita, dei logaritmi dei numeri negativi stampato in Bassano*, opuscolo anonimo, Società Tipografica, Modena 1791.
[8] **N. Chuquet**, *Le Triparty en la Science des Nombres*, edizione curata da A. Marre in: "Bull. bibl. storia math.", t. XIII, 1880, pp. 555 -659 e 693-814.
[9] **M. Curtze**, *Uber die Handschrift 'Algorismes proportionum magistri Nicolay Orem'*, in: "Zeitschr. fur Math. und Phys.", t. XIII, Suppl., 1868, pp. 64-79 e 101-104.
[10] **G. De Saint-Vincent**, *Opus Geometricorum*, Antverpiae 1647.
[11] **L. Euler**, *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et immaginaires*, in: "Mem. Acad. des Sciences de Berlin", 5, 1749.
[12] **P. Ferroni**, *Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometria sublimis theoria nova methodo pertractata*, Allegrini, Firenze 1782.
[13] **G. Fontana**, *Sopra i logaritmi delle quantità negative e sopra gli immaginarj*, in: "Mem. della Soc. Ital.", vol. I, 1782, p. 183, Verona 1783.
[14] **G. Fontana**, *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale ed il nulla immaginario*, in: "Mem. del la Soc. Ital.", vol. VIII, p. 174, 1799.
[15] **F.M. Franceschinis**, *Opuscoli matematici del P. D. Francesco Maria Franceschinis Bernabita*, Remondini, Bassano 1787.
[16] **S. Giuntini**, *Una discussione sulla natura dello zero e sulla relazione fra numeri immaginari e numeri reali (1778-1799)*, in: "Bollettino di storia delle scienze matematiche", 4, n. 1, 1984, pp. 25 -63.
[17] **E. Giusti**, *Problemi e metodi di analisi matematica nell'opera di Gianfrancesco Malfatti*, in: "Atti del Convegno su Gian Maria Malfatti" , Ferrara, 23-24 ottobre 1981, pp. 37-56, Bologna 1982.
[18] **J. Gregory**, *Vera Circuli et Hyperbolae Quadrature*, Padova 1677.
[19] **R.E. Langer**, *The life of Leonhard Euler*, in: "Scripta mathematica", 3, 1935.
[20] **G.W. Leibniz**, *Mathematischen Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt, v. III, parte II, *Briefwechsel zwiscen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli*, pp. 887, 895, 899, Halle 1856 (ristampa anastatica: Georg Olms Verlagsbuchhandlung 1962).
[21] **G. Loria**, *Storia delle matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino 1929-1933 (ristampa: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

[22] **G.F. Malfatti**, *Pensieri sulla famosa questione dei logaritmi dei numeri negativi*, in: "Mem. Reale Acc. di Sci. Lett. ed Arti di Mantova", pp. 3-54, 1795.
[23] **F. Maseres**, *Scriptores Logaritmici*, Londini 1791-1807.
[24] **C. Naux**, *Histoire des logarithmes de Neper a Euler*, Blanchard, Paris 1971.
[25] **J. Neper**, *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Lyon 1619.
[26] **G. Riccati**, *Lettera al Signore Iacopo Ab. Pellizzari sopra i logaritmi de' numeri negativi*, in: "Continuazione del Nuovo Giorn. de' Letterati di Modena", XVI, 1778. Nella Biblioteca Civica di Udine sono conservate *Dieci lettere del P. Vincenzo Riccati all'ab. Jacopo Pellizzari sulla questione della Logistica* (nel t. XXI del "Commercio Epistolare del Co. Giordano Riccati", intitolato: *Prima raccolta di lettere sopra la questione: Se la Logistica abbia un doppio ramo*).
[27] **G. Riccati**, *Teorema. Il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale*, in: "Mem. della Soc. Ital.", v. IV, 1778, p. 116. Dello stesso anno è la breve nota: **G. Riccati**, *Risposta alle riflessioni analitiche del Signor Abbate Giovacchino Pessuti, Professore di Matematica nel corpo de' Cadetti Nobili di Peterburg, sopra una lettera scrittagli dal Signor Conte Vincenzo Riccati.*
[28] **V. Riccati**, *Sopra i logaritmi dei numeri negativi, lettere cinque*, Società Tipografica, Modena 1789.
[29] **M. Stifel**, *Arithmetica integra*, Nuremberg 1544.
[30] **A. Vlacq**, *Arithmetica logaritmica*, Gouda 1628.
[31] **C. Walmesley**, *Analyse des measures des rapports et des angles, ou reduction des integrations aux logarithmes et aux arcs de cercles*, Paris 1748.