Bollettino dei Docenti di Matematica 30 (1995), 85-90

FRAZIONI CONTINUE DISCENDENTI E ASCENDENTI

GIORGIO T. BAGNI

L'ALGORITMO DI EUCLIDE

Un efficace procedimento per determinare il massimo comune divisore di due naturali è basato su di un classico algoritmo risalente ad Euclide (III sec. a.C.), il *metodo della "divisione euclidea"* (*Elementi*, VII, 1-2).

Considerati due naturali a e b, con $a>b$, dividendo a per b otteniamo come quoziente il naturale n_1 e come resto r_1:

$$a:b = n_1+\frac{r_1}{b}$$

Dividendo poi ancora b per r_1, otteniamo come quoziente n_2 e come resto r_2:

$$b:r_1 = n_2+\frac{r_2}{r_1}$$

Iterando il procedimento, ovvero dividendo r_1 per r_2, otteniamo come quoziente n_3 e come resto r_3:

$$r_1:r_2 = n_3+\frac{r_3}{r_2}$$

e così via. Riassumiamo quanto sino ad ora ottenuto:

$$a:b = n_1+\frac{r_1}{b} = n_1+\frac{1}{\frac{b}{r_1}} = n_1+\frac{1}{n_2+\frac{r_2}{r_1}} = n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}} = n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\ldots}}$$

Se a e b sono naturali, il procedimento ha termine [H]: ciò significa che si giunge (in un numero finito di passi) ad una situazione in cui la divisione da effettuare è esatta (ovvero con quoziente q e resto nullo). Ad esempio, potrebbe accadere che, nella situazione seguente, r_2 sia divisibile per r_3:

$$a{:}b = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}} = n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cfrac{1}{q}}}$$

Si dimostra allora (*Elementi*, VII, 1-2) che *il massimo comune divisore dei naturali a, b è l'ultimo resto trovato*: nel caso esemplificato, r_3.

Il procedimento precedente, introdotto per due naturali, può essere ripetuto (con notevole interesse) nel caso in cui P e Q siano grandezze; in particolare:

- se P e Q sono *commensurabili* il procedimento ha termine e si giunge al loro rapporto (*razionale*);

- se P e Q sono *incommensurabili* il loro rapporto (*irrazionale*) è indicato dalla *frazione continua* illimitata:

$$\mathrm{P{:}Q} = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots}}}$$

LE FRAZIONI CONTINUE DISCENDENTI

Definizione. Si dice *frazione continua discendente* un'espressione del tipo:

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \dots}}} \qquad\qquad n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \dots}}}$$

dove a_0, a_1, a_2, a_3, ..., b_0, b_1, b_2, ... n_0, n_1, n_2, n_3, ... sono reali o complessi ed il loro numero è finito o infinito. Una frazione continua come quella scritta a destra si dice *ordinaria* se n_0, n_1, n_2, n_3, ... (i *termini* della frazione continua) sono interi, non negativo il primo e positivi tutti gli altri. Se i termini sono in numero finito, la frazione continua viene detta *limitata*; se i termini sono in numero infinito, la frazione continua viene detta *illimitata*.

Ci occuperemo esclusivamente di frazioni continue *ordinarie*, che talvolta si scrivono indicando, per brevità, i soli denominatori:

$$[n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, ...]$$

Per quanto riguarda le frazioni continue limitate, abbiamo constatato che esse sono strettamente collegate ai razionali (ovvero ai rapporti di grandezze commensurabili); vale il seguente risultato [N]:

Proposizione. Ogni reale razionale positivo può essere espresso attraverso una frazione continua ordinaria limitata.

Per quanto invece riguarda le frazioni continue illimitate, riprendiamo un esempio proposto da Olds (tratto da [O]): immaginiamo di voler risolvere l'equazione di secondo grado in x:

$$x^2-2x-1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 2+\frac{1}{x}$$

(per $x\neq 0$) e sostituendo ripetutamente tale espressione alla x al denominatore:

$$x = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}} \qquad x = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}} \qquad x = 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x}}}}$$

Possiamo dunque approssimare x mediante:

$$2+\frac{1}{2} = 2{,}5 \qquad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}} = 2{,}4 \qquad 2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}} = 2{,}4166...$$

e tali valori sono... "molto vicini" a: $x = 1+\sqrt{2} = 2{,}4142...$ che è una radice dell'equazione considerata.

Intuitivamente, dunque, siamo portati a scrivere la frazione continua:

$$\sqrt{2} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}}$$

L'esempio proposto richiede qualche precisazione. Introduciamo le *ridotte* di una frazione continua (discendente ordinaria):

$$n_0+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\ldots}}}$$

I razionali ottenuti arrestando lo sviluppo al termine *i*-esimo:

$$\frac{a_0}{b_0}=n_0 \qquad \frac{a_1}{b_1}=n_0+\frac{1}{n_1} \qquad \frac{a_2}{b_2}=n_0+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{n_2}} \qquad \ldots \qquad \frac{a_i}{b_i} \qquad \ldots$$

si dicono *ridotte* (*i*-esime) della frazione.

Definizione. Si dice che una frazione continua (discendente ordinaria) *converge* ad un reale λ se la successione delle sue ridotte:

$$\frac{a_0}{b_0},\quad \frac{a_1}{b_1},\quad \frac{a_2}{b_2},\quad \frac{a_3}{b_3},\quad \frac{a_4}{b_4},\quad \ldots$$

è convergente al limite λ: $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda$ (detto *valore* della frazione continua).

Proposizione. Una frazione continua (discendente ordinaria) converge ad un reale irrazionale positivo. Per ogni reale irrazionale positivo λ, esiste *una ed una sola* frazione continua (discendente ordinaria) avente valore λ [HW] [S] [Vi].

LE FRAZIONI CONTINUE ASCENDENTI

Notiamo che la frazione continua ora introdotta è detta *discendente* per distinguerla dalla frazione continua *ascendente*, che si può ricavare nel modo seguente. Siano P e Q grandezze, con P<Q; sia m_1 il minimo naturale per cui:

$m_1\mathrm{P} > \mathrm{Q}$

Scriveremo allora:

$$m_1\mathrm{P} = \mathrm{Q}+\mathrm{R}_1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{P:Q} = \frac{1+\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{Q}}}{m_1}$$

ed iterando il procedimento:

$$m_2\mathrm{R}_1 = \mathrm{Q}+\mathrm{R}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{Q}} = \frac{1+\frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{Q}}}{m_2}$$

$$m_3\mathrm{R}_2 = \mathrm{Q}+\mathrm{R}_3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{R}_2}{\mathrm{Q}} = \frac{1+\frac{\mathrm{R}_3}{\mathrm{Q}}}{m_3}$$

e così via. Possiamo quindi scrivere:

$$\mathrm{P:Q} = \frac{1+\frac{1+\frac{1+\ldots}{m_3}}{m_2}}{m_1} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1m_2}+\frac{1}{m_1m_2m_3}+\ldots$$

Analogamente a quanto affermato per le frazioni continue discendenti, se le grandezze P e Q sono *commensurabili* il procedimento ha termine, mentre se esse sono *incommensurabili* il loro rapporto (irrazionale) è indicato da una frazione continua ascendente illimitata.

Definizione. Si dice *frazione continua ascendente ordinaria* l'espressione:

$$\frac{1+\frac{1+\frac{1+\ldots}{m_3}}{m_2}}{m_1} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_1m_2}+\frac{1}{m_1m_2m_3}+\ldots$$

dove m_1, m_2, m_3, ... sono tutti interi positivi.

Un celebre esempio riguarda il numero di Nepero e (2,718281...), base naturale dei logaritmi, che può essere espresso mediante una frazione continua ascendente ordinaria:

$$e = 2+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\ldots}{5}}{4}}{3}}{2} = 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$$

LE ORIGINI STORICHE DELLE FRAZIONI CONTINUE

Tracce di procedimenti concettualmente vicini alle frazioni continue sono presenti, nella storia della matematica, nel commento di Teone di Alessandria (tardo IV secolo d. C.) all'*Almagesto* di Claudio Tolomeo [F]. Anche negli scritti di Aryabhata (476-550), autore del più vasto ed importante testo della matematica indiana (l'*Aryabhatiya*, scritto nel 499), troviamo riferimenti alle frazioni continue: in particolare, Aryabhata accenna alla risoluzione generale di un'equazione indeterminata attraverso una tecnica concettualmente assai vicina alla frazione continua.

Tecniche che accennano, sostanzialmente, alle frazioni continue ascendenti si trovano nel *Liber Abbaci* (1202), il capolavoro di Leonardo Pisano detto Fibonacci (1170 circa-1250 circa): gli spunti di Fibonacci sono poi ripresi dall'arabo Abu'l Hasan Alkalsadi, in un trattato di aritmetica pubblicato nel 1463 e da Luca Pacioli (1445-1515 circa).

Modernamente, l'introduzione delle frazioni continue viene fatta risalire a Raffaele Bombelli (1526-1573) ed a Pietro Antonio Cataldi (1548-1626); quest'ultimo, docente presso l'Ateneo bolognese, riprendendo in parte alcuni procedimenti dovuti a Bombelli (autore dell'*Algebra*, Bologna 1572 e 1579), pubblica un semplice metodo per l'estrazione della radice quadrata basato su questo strumento matematico.

Nei lavori di Bombelli (1572) troviamo infatti uno sviluppo equivalente a:

$$\sqrt{13} = 3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\ldots}}}$$

Bombelli tuttavia non approfondisce questa tecnica [Bm]. Pochi anni dopo (1613), Cataldi pubblica *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice* *quadrata delli numeri*; egli, per estrarre la radice quadrata del naturale n, suggerisce di porre:

$$n = q^2+r$$

(essendo q intero e q^2 il massimo quadrato non maggiore di n) e di assumere quindi come approssimazione di $\sqrt{n}$ il valore:

$$\sqrt{n} = q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \ldots}}}$$

Giustifichiamo in termini generali questa formula. Poniamo:

$$\sqrt{q^2+r} = q + \frac{1}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{q^2+r}-q} = \frac{\sqrt{q^2+r}+q}{r}$$

Ricordando la prima uguaglianza:

$$\beta = \frac{2q+\frac{1}{\beta}}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\beta} = \frac{r}{2q+\frac{1}{\beta}}$$

Risulta:

$$\sqrt{q^2+r} = q + \frac{r}{2q+\frac{1}{\beta}}$$

e sostituendo in questa ripetutamente l'uguaglianza: $\frac{1}{\beta} = \frac{r}{2q+\frac{1}{\beta}}$, otteniamo:

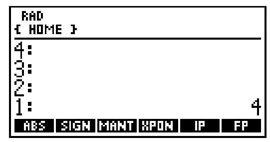
$$\sqrt{q^2+r} = q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \ldots}}}$$

Uno sviluppo di questo genere che troviamo in Cataldi è, in notazione moderna:

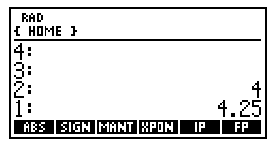
$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \dots}}}$$

Le approssimazioni di $\sqrt{18}$ ricavabili mediante tale procedimento possono essere valutate con l'impiego di una calcolatrice tascabile:

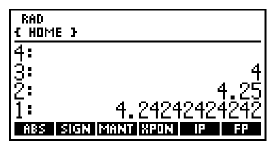
$\sqrt{18} \cong 4$ che porta a:



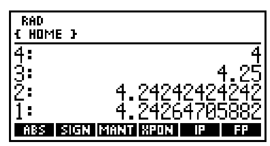
$\sqrt{18} \cong 4 + \dfrac{2}{8}$ che porta a:



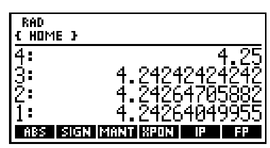
$\sqrt{18} \cong 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8}}$ che porta a:



$\sqrt{18} \cong 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8}}}$ che porta a:

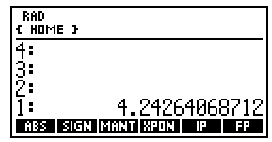


$\sqrt{18} \cong 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8}}}}$ che porta a:



L'approssimazione così ottenuta (con un numero di iterazioni assai limitato!) può essere considerata valida; calcolando direttamente $\sqrt{18}$ con una calcolatrice tascabile troviamo infatti:

migliore approssimazione per $\sqrt{18}$:



Con l'opera di Cataldi viene messo a punto un procedimento iterativo efficace, elegante e dallo spirito moderno; per cui le frazioni continue possono essere ricordate da E. Bortolotti come "i primi passi verso la generalizzazione del concetto di numero (fino ad allora ristretto al solo campo dei razionali) e verso l'avvento del metodo infinitesimale" [Br].

Per quanto concerne la convergenza delle frazioni continue introdotte da Cataldi, notiamo che la convergenza di:

$$\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ldots}}}$$

è garantita dal teorema di Sleszynski-Pringsheim ([LW], pp. 30-31), il quale afferma che la frazione continua $\mathbf{K}(a_n / b_n)$ converge se per ogni n è:

$$|b_n| \geq |a_n| + 1$$

Di sicuro interesse, inoltre, è la possibilità di ridurre la frazione continua data in una frazione continua aritmetica attraverso la trasformazione [BP]:

$$\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ldots}}} = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\ldots}}}$$

ottenuta dividendo per 2 il numeratore ed il denominatore ogni due livelli della frazione continua. E, com'è noto, ogni frazione continua aritmetica è convergente.

Una elementare, informale verifica dell'equivalenza delle frazioni continue

$$\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\cfrac{2}{8+\ldots}}} \qquad \text{e} \qquad \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\ldots}}}$$

può essere condotta considerando le equazioni di secondo grado dalle quali possono essere ricavate tali frazioni continue; ad esempio:

$$x = \frac{2}{8+x} \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 8x - 2 = 0$$

$$x = \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{8+x}} \qquad \Rightarrow \qquad 4x^2 + 32x - 8 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x^2 + 8x - 2 = 0$$

LE FRAZIONI CONTINUE DA BROUNCKER A LAGRANGE

Molti, nei secoli seguenti, sono gli studi condotti da prestigiosi matematici sulle frazioni continue; molti risultati e molti procedimenti ad esse collegati vengono ideati e perfezionati. Nel 1625, Albert Girard (1590-1633) in un commento ad un manuale di aritmetica di Simon Stevin (1548-1620) descrive alcuni sviluppi in frazioni continue di reali irrazionali, ma senza riportare una loro completa giustificazione. John Wallis (1617-1703) è il primo autore ad utilizzare il termine "frazione continua"; nell'opera di Wallis *Arithmetica infinitorum* (1655) troviamo una formula che equivale a:

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\ldots}}}}$$

attribuito a William Brouncker (1620-1684) e che sarà dimostrato solo qualche decennio più tardi da Leonhard Euler (1707-1783).

Negli *Opuscoli postumi*, pubblicati nel 1703, di Christiaan Huygens (1629-1695) si trova un esempio di sviluppo in frazione continua (limitata) di un reale razionale basato sull'algoritmo della "divisione euclidea".

Leonhard Euler si occupa spesso di frazioni continue e pubblica *De fractionibus continuis*, opera rigorosa e profonda. In Euler troviamo molti sviluppi interessanti, alcuni dei quali riguardanti *e*, base dei logaritmi naturali.

Tra questi (1737) ricordiamo lo sviluppo che può scriversi compattamente (annotando solo i denominatori):

$$e-1 = [1, 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, ...]$$

Nel 1770, Johann Heinrich Lambert (1728-1777) pubblica *Beytrage zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung*, lavoro in cui viene data una sistemazione organica alle ricerche sulle frazioni continue.

Alcuni eleganti risultati riguardano una classe particolare di frazioni continue discendenti: le frazioni continue (ordinarie) periodiche.

Definizione. Una frazione continua ordinaria si dice *periodica* se esiste un intero positivo k ed un indice M tali che per ogni $i > M$ sia: $n_{i+k} = n_i$.

Ad esempio, la frazione continua ordinaria: $\sqrt{11} = [3, 3, 6, 3, 6, 3, 6, ...]$ è periodica; si scriverà allora: $\left[3, \overline{3, 6}\right]$. Si dirà che $\{3\}$ è l'*antiperiodo* e $\{3, 6\}$ il *periodo*. Una frazione continua periodica si dice *periodica pura* se il suo antiperiodo è vuoto.

Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813) dimostra (1770) che una frazione continua periodica è la radice di un'equazione di secondo grado e, viceversa, un irrazionale quadratico (ovvero una radice di un'equazione di secondo grado a coefficienti interi il cui discriminante non sia un quadrato perfetto) è sviluppabile in una frazione continua periodica. Enunciamo il lemma seguente.

Proposizione. Sia $\alpha > 1$ radice (irrazionale) di un'equazione di secondo grado con coefficienti interi, $\alpha = \dfrac{B+\sqrt{\Delta}}{C}$ (B, C interi, Δ intero positivo non quadrato); se l'altra radice di tale equazione $\alpha' = \dfrac{B-\sqrt{\Delta}}{C}$ è compresa tra -1 e 0, allora α può essere sviluppata in una frazione continua periodica pura.

Notiamo che se sono verificate le ipotesi del precedente lemma, l'irrazionale quadratico α si dice *ridotto*. Possiamo ora enunciare il teorema di Lagrange e descrivere una traccia della sua dimostrazione.

Proposizione. Teorema di Lagrange. Un irrazionale quadratico può essere sviluppato in una frazione continua periodica.

È possibile dimostrare che sviluppando in frazione continua un irrazionale quadratico qualsiasi si giunge a:

$$n+\cfrac{1}{n_1+\cfrac{1}{\dots+\cfrac{1}{n_i+\alpha}}}$$

con α (opportuno) irrazionale quadratico ridotto; a quest'ultimo è applicabile il precedente lemma e, potendo α essere sviluppato in una frazione continua periodica pura, il teorema di Lagrange risulta dimostrato.

Sessanta anni dopo Lagrange, Evariste Galois (1811-1832) proverà che sviluppando in frazione continua le radici di un'equazione di secondo grado i periodi sono composti dagli stessi numeri ordinati inversamente [M]. Anche il primo lavoro matematico di Galois è dedicato alle frazioni continue: *Démonstration d'un théorème sur les fractions continues périodiques*, pubblicato (1 aprile 1829) quando il suo diciassettenne autore è studente nel College Louis-Le-Grand.

Oltre agli studiosi sino ad ora ricordati, molti ricercatori si occupano di frazioni continue. Notevoli, per quanto riguarda il loro studio nell'età contemporanea, appaiono le ricerche di Karl Friedrich Gauss (1777-1855) [Vo], e di Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851).

Riferimenti bibliografici

[BP] **G.T. Bagni - P. Plazzi**, *Le frazioni continue nelle opere di Raffaele Bombelli e di Pietro Antonio Cataldi*, in: "La matematica e la sua didattica", in corso di stampa (1995).

[Bm] **R. Bombelli**, *L'Algebra*, a cura di U. Forti-E. Bortolotti, Feltrinelli, Milano 1966.

[Br] **E. Bortolotti**, *Le antiche regole empiriche del calcolo approssimato dei radicali quadratici e le prime serie infinite*, in: "Bollettino Mathesis", XI (1919), pp. 14-19, 101-123, 157-188; XII (1920), pp. 152-162.

[F] **A. Favaro**, *Notizie storiche sulle frazioni continue dal secolo decimoterzo al decimosettimo*, in: "Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche", dir. da B. Boncompagni, A, VII, Forni, Bologna 1874.

[HW] **G.H. Hardy - E.M. Wright**, *An introduction to the Theory of Num-bers*, Clarendon, Oxford 1960.

[H] **D. Hensley**, *The number of Steps in the Euclidean Algorithm*, in: "Journal of Number Theory", v. 49, n. 2, 11/94, pp. 142-182.

[M] **S. Maracchia**, *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano 1979.

[LW] **L. Lorentzen - H. Waadeland**, *Continued Fractions with Applica-tions*, North-Holland, Amsterdam 1992.

[N] **I. Niven**, *Numbers: rational and irrationals*, Random House, New York 1961 (*Numeri razionali e numeri irrazionali*, Zanichelli, Bologna 1965). Dello stesso A. si veda: **I. Niven**, *Irrational numbers*, John Wiley and Sons, New York 1956.

[O] **C.D. Olds**, *Continued Fractions*, Random House, New York 1963 (*Frazioni continue*, Zanichelli, Bologna 1968).

[S] **M.R. Schroeder**, *Number theory in Science and Communication*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1984 (*La teoria dei numeri*, Muzzio, Padova 1986).

[Vi] **G. Vitali**, *Limiti, serie, frazioni continue, prodotti infiniti*, in "Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi", vol. I, parte II, Hoepli, Milano 1929 (ristampa anastatica: Hoepli, Milano 1979).

[Vo] **P. Vosserlman de Heer**, *Specimen inaugurale de fractionibus continuis*, Altheer, Trajecti ad Rhenum (Utrecht) 1833.