*Periodico di Matematiche* VII, 4, 1/2 (1997), 15-33

# Il metodo di esaustione nella storia dell'analisi infinitesimale

GIORGIO T. BAGNI

"[I teoremi geometrici] sono degni di essere accettati per amore delle dimostrazioni stesse, come accettiamo molte altre cose della matematica; per questa e per nessun'altra ragione".

Apollonio di Perga

## TRE CITAZIONI SULLE ORIGINI STORICHE DEL CALCOLO

Riferendosi alla storia del calcolo infinitesimale, Nicolas Bourbaki scrive:

"I greci non possedettero né immaginarono niente di simile. Essi senza dubbio conobbero, non foss'altro per rifiutarsi di usarlo, un calcolo algebrico, ossia quello dei babilonesi, di cui una parte della loro geometria era probabilmente soltanto una trascrizione; è tuttavia nell'àmbito dell'invenzione geometrica che si sviluppa la loro creazione matematica forse più geniale: il metodo per trattare quei problemi che per noi competono al calcolo integrale. Eudosso, trattando del volume del cono e della piramide, ne aveva dato i primi modelli che Euclide ci ha più o meno fedelmente tramandato" [Bourbaki 1963, p. 171].

Dopo il duro esordio, dunque, il matematico policefalo riconosce l'importanza delle ricerche greche concettualmente vicine al calcolo integrale. A tale riguardo, ricordiamo un'affermazione di Guido Castelnuovo:

"Chi volesse risalire alle origini dei metodi infinitesimali dovrebbe arrivare a quel periodo della filosofia greca, ove si son gettate le basi logiche della geometria, verso il 400 a.C." [Castelnuovo, 1938, p. 29].

Castelnuovo, dunque, contro Bourbaki? Probabilmente no: riteniamo infatti che le due posizioni siano conciliabili e ci associamo a Morris Kline, che scrive:

"Anche se, in una certa misura, forniva una risposta a problemi che erano stati già affrontati dai Greci, il calcolo infinitesimale venne creato soprattutto per trattare i principali problemi del XVII secolo" [Kline, 1972, p. 399].

Una significativa parte dei procedimenti infinitesimali viene quindi intuita dai Greci: tra questi, il metodo di esaustione è senza dubbio uno dei più importanti ed eleganti. La sua applicazione, sempre abbinata alla "reductio ad absurdum", consente la dimostrazione rigorosa di molti risultati; esso costituisce un fecondo punto di riferimento, anche dal punto di vista critico, per la precisazione seicentesca dei concetti fondamentali dell'analisi matematica.

## UN FRAMMENTO DI ANASSAGORA DI CLAZOMÉNE

Cronologicamente, il primo ricercatore la cui opera deve essere considerata nell'àmbito dei procedimenti infinitesimali della matematica greca è Anassagora di Clazoméne (500?-428 a.C.). Il suo ruolo nella storia della filosofia è talvolta ricondotto a quello di un precursore dell'aristotelismo o dell'atomismo; ma un suo frammento contiene alcuni spunti che lo collocano tra i primi pensatori che accettano la sfida dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande:

"Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione" [Dupont, 1981, I, p. 236].

L'interpretazione di questo frammento può portare [Dupont, 1981, I, p. 236] all'intuizione di un limite: Anassagora descrive infatti una quantità che *può essere diminuita indefinitamente, pur senza mai giungere ad annullarsi* (dal testo appare plausibile che la grandezza considerata da Anassagora non sia soggetta ad una variazione continua, bensì discreta: pertanto sarebbe opportuno collegare l'intuizione del filosofo di Clazoméne al limite di una successione numerica convergente a zero, piuttosto che al limite di un'analoga funzione di variabile reale). La prosecuzione del frammento è altrettanto interessante:

"Così vi è sempre qualcosa di più grande di ciò che è grande" [Dupont, 1981, I, p. 236] [Geymonat, 1970, p. 96].

In questo secondo caso, un'interpretazione analoga a quella precedente potrebbe far supporre l'intuizione di un limite infinito.

Probabilmente al citato frammento è riconducibile l'attribuzione ad Anassagora di una prima applicazione del metodo di esaustione [Dupont, 1981, I, p. 237]. Ma l'assenza di testimonianze inoppugnabili ci impedisce di accettarla come provata e ci impone di considerare il filosofo di Clazoméne soltanto come "il primo lontano progenitore dell'analisi infinitesimale" [Geymonat, 1947, p. 2 7].

## I PARADOSSI DI ZENONE D'ELEA

Zenone d'Elea (V secolo a.C.) è considerato uno dei principali precursori dei metodi infinitesimali (scrive Léon Brunschvicg: "Pour retrouver le plus ancienne trace de la pensée infinitésimale, ... nous adresser ... à Zénon d'Elée" [Brunschvicg, 1929]). Federigo Enriques e Giorgio de Santillana affermano:

"Ma ritorniamo allo scopo principale della critica di Zenone, per rilevarne il più profondo significato matematico. I paradossi che il filosofo mette in luce sono quelli che si trovano sulla via dell'analisi infinitesimale. La riflessione che riconosce l'idealità degli enti geometrici scopre, insieme al regno del pensiero, il mondo dell'infinito" [Enriques -de Santillana, 1936, p. 54].

Anche Enrico Rufini, riprendendo una tesi del proprio maestro Federigo Enriques [Enriques-de Santillana, 1932, p. 107], riconosce nella scuola eleatica il primo passo verso l'introduzione dei metodi infinitesimali; ma preferisce riferirsi a Parmenide d'Elea (V secolo a.C.), maestro e padre putativo di Zenone:

"Nell'opera di Parmenide si afferma... per la prima volta il concetto razionale del punto, della linea e della superficie; la sua critica tende in sostanza a stabilire che gli enti geometrici non possono definirsi che per astrazione, con un procedimento indefinito di idealizzazione, come limiti del sensibile. Ora questa affermazione costituisce il primo riconoscimento del carattere infinitesimale dei concetti fondamentali della geometria, e quindi può riguardarsi come il primo acquisto dell'analisi infinitesimale" [Rufini 1926, p. 23].

Il paradosso zenoniano di Achille e della tartaruga è notissimo ed è stato spesso interpretato nell'àmbito della polemica che oppone Zenone ai seguaci della scuola pitagorica. In esso può essere rilevata l'implicita presenza della serie geometrica $\sum_{j=1}^{+\infty} q^j$, essendo $q$ il rapporto ($0<q<1$) delle velocità della tartaruga e di Achille. Oggi sappiamo che tale serie è convergente (e questo sarebbe sufficiente ad affermare che Achille raggiunge la tartaruga...); ma Zenone non è in grado di calcolarne la somma: il suo argomento è erroneo proprio perché non considera che una somma di *infiniti* addendi può essere, sotto alcune ipotesi, *finita* [Enriques-de Santillana, 1936, p. 54]. D'altra parte era nella concezione scientifica del periodo che una somma di infiniti addendi *dovesse* essere infinita.

Nel celebre paradosso di Achille e della tartaruga possono essere rilevati anche altri elementi, che probabilmente superano per importanza la semplice ed ovvia considerazione dell'incapacità di Zenone di determinare la somma di una serie geometrica convergente: Bertrand Russell, ad esempio, propone un'interessante interpretazione del paradosso che equivale al rifiuto, da parte di Zenone, di accettare che un insieme sia in corrispondenza biunivoca con una sua parte propria [Russell, 1963, pp. 496-497]. Dunque, seguendo l'interpretazione di Russell, nel paradosso è celata una intuitiva considerazione critica riguardante quella che diventerà la moderna definizione di *insieme infinito*.

L'ingresso delle nozioni di infinitesimo e di infinito nella scienza greca non potrebbe non essere causa di perplessità e di dubbi, per gli aspetti paradossali che un'applicazione soltanto intuitiva di tali concetti sempre comporta. Proprio queste difficoltà portano Aristotele al rifiuto dell'infinito *attuale* [Arrigo-D'Amore, 1992], che sarà pienamente superato soltanto nel XIX secolo con le riflessioni di Bernard Bolzano (1781-1848) e di Georg Cantor (1845-1918).

## DEMOCRITO DI ABDERA E IL VOLUME DELLA PIRAMIDE

Nella preistoria del calcolo infinitesimale, il ruolo di Democrito di Abdera (nato intorno al 460 a.C.), uno dei massimi filosofi greci, è basato su alcune autorevoli testimonianze (tra le quali quella di Archimede) e sul frammento:

"Due sezioni, eseguite in un cono mediante due piani paralleli fra loro vicinissimi, non possono risultare fra loro uguali, senza che il cono si muti in un cilindro, né possono risultare disuguali, altrimenti il cono presenterebbe rugosità e discontinuità" [Dupont, 1981, I, p. 142].

Il senso di questa affermazione è incentrato sul significato del termine "vicinissimi", il quale richiederebbe una specificazione: sarebbe infatti spontaneo ipotizzare un ideale collegamento di queste sezioni con gli indivisibili di Cavalieri (separato da più di due millenni dal filosofo di Abdera); ma l'attuale conoscenza dell'impostazione "infinitesimale" di Democrito è troppo scarsa per permetterci di affrontare con ragionevole sicurezza l'interpretazione del frammento citato.

Secondo Archimede [Rufini, 1926, p. 34], a Democrito risale la dimostrazione del teorema secondo cui il volume della piramide è un terzo di quello del prisma avente la stessa base e la stessa altezza (e, analogamente, il cono è la terza parte del cilindro avente la stessa base e la stessa altezza). La conoscenza di tali risultati non è, in sé, significativa (anche nella matematica egizia, quattordici secoli prima di Democrito, troviamo una formula per il volume della piramide); interessante è formulare qualche ipotesi su *come* Democrito giunge ad essi.

Alcuni studiosi (tra i quali Rufini, che ricorda alcuni passi di Plutarco [Rufini, 1926, p. 35]) affermano che Democrito potrebbe avere intuito una dimostrazione basata sulle successive suddivisioni della piramide assegnata; tale procedimento rende però necessaria la conoscenza dell'identità: $\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{3}$.

Ma una simile formula è nota a Democrito? Secondo alcuni probabilmente sì, sebbene *non* certo espressa in questo modo [Rufini, 1926, p. 50] [Enriques-de Santillana, 1936, p. 54]; anche ammesso ciò, resterebbe comunque il problema di una sua rigorosa dimostrazione. Non appare plausibile che Democrito abbia elaborato una simile prova per esaustione: è opinione diffusa che i suoi risultati siano stati intuiti (forse con tecniche vicine al metodo cavalieriano degli indivisibili?), ma non siano mai stati rigorosamente dimostrati [Rufini, 1926, p. 53].

## EUDOSSO DI CNIDO E IL METODO DI ESAUSTIONE

Il metodo di esaustione è unanimemente ricondotto all'opera di uno dei più importanti matematici del mondo greco, Eudosso di Cnido (408?-355? a.C.) (il termine "esaustione" non viene però usato dai Greci, ma sarà introdotto soltanto nel XVII secolo [Kline, 1972, p. 99]). Tutte le opere di Eudosso sono perdute: dunque l'attribuzione di risultati al matematico di Cnido è sempre indiretta.

Per il metodo di esaustione decisiva è la testimonianza di Euclide; ad esempio, la dimostrazione per esaustione del fatto che il volume di un cono rotondo è un terzo del volume del cilindro con la stessa base e la stessa altezza, inclusa come proposizione X nel XII libro degli *Elementi*, è attribuita ad Eudosso.

La vera e propria dimostrazione di un risultato con il metodo di esaustione deve essere preceduta dalla ricerca della tesi, condotta mediante tecniche diverse (frequentemente assai vicine al seicentesco metodo degli indivisibili, come vedremo esaminando l'opera di Archimede). Tali tecniche, tuttavia, sono talvolta basate sull'intuizione e non sono considerate sufficienti a garantire la verità del risultato (secondo alcuni, la persistente diffidenza dei geometri greci nei confronti dei procedimenti euristici di questo genere è essenzialmente motivata dal rifiuto dell'infinito attuale [Dupont, 1981, I, p. 245]). Individuata la tesi da provare, la dimostrazione rigorosa, *per assurdo*, viene condotta con il metodo di esaustione propriamente detto (l'applicazione di tale metodo è *sempre* abbinata ad una "reductio ad absurdum" [Frajese, 1969, pp. 266-273]).

Il metodo di esaustione è essenzialmente basato sul postulato di Eudosso, secondo il quale date due grandezze qualsiasi esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. Didatticamente è opportuno sottolineare che l'ovvietà di tale postulato è solo apparente: infatti, *non* tutte le classi di grandezze omogenee sono anche archimedee, ovvero rispettano il postulato di Eudosso (detto anche di

Eudosso-Archimede). Ad esempio, l'insieme costituito dagli angoli rettilinei e curvilinei (compresi, cioè, gli angoli di contingenza) è una classe di grandezze omogenee, ma *non* archimedee [Dupont, 1981, I, p. 253] [Carruccio, 1971].

## GLI *ELEMENTI* DI EUCLIDE DI ALESSANDRIA

L'enunciato della proprietà di esaustione presente negli *Elementi* è:

**Proposizione I del X libro degli *Elementi*.** [Assumendosi come] date due grandezze diseguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezza minore [inizialmente] assunta [Euclide, 1970, p. 596].

La dimostrazione euclidea di tale proposizione fa uso essenziale del postulato di Eudosso, che appare negli *Elementi* nella forma seguente:

**Definizione IV del V libro degli *Elementi* (postulato di Eudosso in forma euclidea).** Si dice che hanno fra loro rapporto (o ragione) le grandezze le quali possono, se moltiplicate, superarsi reciprocamente [Euclide, 1970, p. 298].

Tale postulato, dunque, è una *definizione*: ovvero Euclide si dichiara a conoscenza che, date due grandezze (omogenee e non nulle), *può esistere oppure no* un multiplo della minore che superi la maggiore. La prima e la più celebre dimostrazione per esaustione negli *Elementi* riguarda la proposizione seguente:

**Proposizione II del XII libro degli *Elementi*.** I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri [Euclide, 1970, p. 931].

"In questa proposizione... entra in gioco l'infinito" nota immediatamente Frajese [Euclide, 1970, p. 931], riferendosi allo sviluppo logico del capolavoro euclideo; e Gerolamo Saccheri (1667-1733) nel proprio *Euclides ab omni naevo vindicatus*, così commenta l'argomentazione presentata negli *Elementi*:

"Euclide ha già dimostrato (prop. 1) che due poligoni simili, inscritti in due cerchi, stanno tra loro come i quadrati dei loro diametri; proposizione da cui, come corollario, avrebbe potuto ricavare la 2 considerando i cerchi come poligoni infinitilateri" [Saccheri, 1904, p. 104].

Commentando questa affermazione saccheriana, Frajese osserva:

"Saccheri è evidentemente assai vicino, nel tempo, alla fondazione del calcolo infinitesimale! Ma è proprio per evitare il ricorso all'infinito in questo modo che Eudosso di Cnido, il rigorizzatore della matematica greca, l'imbrigliatore dell'infinito, escogitò quel metodo che i posteri tardi dissero *metodo di esaustione*" [Euclide, 1970, p. 931].

Una caratteristica che particolarizza le dimostrazioni per esaustione, infatti, è la seguente: *in esse non troviamo mai un procedimento che corrisponda formalmente ad un moderno passaggio al limite* [Kline, 1972, pp. 99-100].

## LE DIMOSTRAZIONI DI ARCHIMEDE DI SIRACUSA

La feconda ricerca di Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) è considerata *il* punto culminante della storia dei procedimenti infinitesimali nell'Antichità: Archimede calcola aree, volumi, baricentri con tecniche spesso geniali, straordinariamente prossime all'integrazione [Bourbaki, 1963, pp. 171-173]. Ad esempio, considera le figure piane costituite da fili pesanti paralleli (ed in ciò anticipa di diciotto secoli il metodo degli indivisibili), dei quali studia l'equilibrio.

Il ruolo essenziale del metodo di esaustione nel contesto della ricerca geometrica archimedea è quello di garantire i risultati inizialmente intuiti con tali metodi empirici, ovvero di *conferire il definitivo rigore alle loro dimostrazioni*. Ricordiamo un'osservazione fondamentale di Castelnuovo:

"Quel metodo, a differenza del processo di limite, non è un metodo *analitico* di ricerca che conduca alla scoperta, ma fornisce solo il mezzo per dimostrare -per assurdo- un risultato che si suppone già noto" [Castelnuovo, 1938, p. 29].

Questo aspetto è centrale dal punto di vista metodologico: il metodo di esaustione non ha *mai* valore euristico. Mediante esso Archimede non giunge ad un risultato, ma *dimostra* una tesi che deve essere *già* supposta, intuìta mediante procedimenti diversi (e meno rigorosi). In generale, non siamo sicuramente a conoscenza di questi metodi impiegati da Archimede (scrive Frajese: "In questo consiste appunto quel che potrebbe essere detto il *mistero* di Archimede: come giunse egli... a conoscere già il risultato prima ancora di iniziare il complesso procedimento dimostrativo?" [Archimede, 1974, p. 19]).

La fortuna delle opere di Archimede si tramanda nel tempo e la maggior parte dei suoi scritti riesce a superare i secoli senza subire sostanziali alterazioni (una copia del *Metodo*, opera inizialmente reputata perduta, viene riscoperta da Heiberg all'inizio del nostro secolo). Alcune traduzioni in latino di opere archimedee sono pubblicate nella seconda metà del XV secolo. Ma è nel secolo successivo che l'interesse per il pensiero e per i metodi del Siracusano registra una vera impennata: l'edizione principale delle sue opere vede la luce nel 1544 a Basilea ad opera di Hervagius [Bourbaki, 1963, p. 175]. Tra i maggiori commentatori di Archimede nel XVI secolo ricordiamo figure di primo piano della storia della matematica: Nicolò Tartaglia (1542-1565), Federico Commandino (1509-1575), Francesco Maurolico (1494-1575), Luca Valerio (1552-1618).

## GLI INDIVISIBILI DI BONAVENTURA CAVALIERI

Al metodo di esaustione, quasi due millenni dopo gli studi archimedei, viene a sostituirsi il metodo degli indivisibili, nato dalle ricerche di un gruppo di matematici tra i quali un ruolo preminente va riconosciuto a Johannes Kepler (1571-1630), a Bonaventura Cavalieri (1598-1647), a Gilles Personne de Roberval (1602-1675) e ad Evangelista Torricelli (1608-1647). Pascal Dupont sintetizza così il diffondersi della geometria degli indivisibili:

"Nel XVII secolo, la matematica cambia volto. I procedimenti archimedei sono ineccepibili, ma sono ingombranti. Si vuol procedere più speditamente. Nasce un'analisi infinitesimale agile ma su basi fragilissime. La disinvoltura prende il posto del rigore. Gli indivisibili... sostituiscono il metodo di esaustione" [Dupont, 1981, p. 36].

Il metodo degli indivisibili, decisivo per la nascita del moderno calcolo infinitesimale, può inizialmente riferirsi ad una frase di Leonardo da Vinci (1452-1519) riportata nel *Codice Atlantico*:

"Questa tal prova resta persuasiva immaginando esser diviso il circolo in strettissimi paralleli, a modo di sottolissimi capelli in continuo contatto fra loro" [Arrigo-D'Amore, 1992, p. 72].

La proposizione fondamentale del metodo degli indivisibili è il *principio di Cavalieri*, secondo il quale se due solidi sono compresi tra due piani paralleli (ovvero hanno uguale altezza) e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi ed ugualmente distanti da queste stanno sempre in un fissato rapporto, allora anche i volumi di tali solidi stanno in tale rapporto (nota Carruccio: "questo principio si dimostra facilmente quando si sia già in possesso dell'attuale analisi infinitesimale; infatti equivale a dire che due integrali definiti, tra gli stessi limiti d'integrazione, aventi uguali funzioni integrande, sono uguali; e inoltre una costante moltiplicativa può portarsi indifferentemente dentro o fuori dal segno di integrazione. Ma Cavalieri non disponeva ancora di un'analisi infinitesimale algoritmicamente sistemata..." [Carruccio, 1972, p. 179]).

Qual è il nesso che lega il cavalieriano metodo degli indivisibili all'esperienza matematica greca? Nicolas Bourbaki afferma:

"Verosimilmente questi principi sono stati suggeriti a Cavalieri da teoremi, quali ad esempio quello di Euclide (o piuttosto di Eudosso) sul rapporto dei volumi di piramidi aventi la stessa altezza, e prima di enunciarli in modo generale egli volle verificarne la validità su di un grande numero di esempi presi da Archimede" [Bourbaki, 1963, p, 186].

Si noti tuttavia che Cavalieri conosce il metodo di esaustione, ma mostra di ritenere il proprio metodo degli indivisibili superiore ad esso ([Cavalieri, 1989, p. 256]). Anche motivazioni logiche supportano tale convincimento: il metodo di esaustione fa infatti uso essenziale della dimostrazione per assurdo, mentre *il metodo degli indivisibili porta a realizzare delle dimostrazioni costruttive*. La preferenza accordata da Cavalieri a queste ultime risulta evidente dall'esame del complesso delle dimostrazioni cavalieriane [Cavalieri, 1989]: egli fa uso di una dimostrazione per assurdo soltanto in un'occasione (per il teorema XXII del II libro della *Geometria indivisibilibus continuorom*; ma non si ritiene soddisfatto da tale dimostrazione per assurdo ed alcuni anni dopo, nelle *Exercitationes geometricae sex* riprende in considerazione il teorema citato e riesce a dare di esso una dimostrazione diretta [Cavalieri, 1989, p. 256]).

Il metodo di esaustione entra inoltre nella polemica sugli indivisibili che contrappone Bonaventura Cavalieri al matematico svizzero Paul Guldin (lat. Guldino, 1577-1643). Nel 1642, Cavalieri viene informato dal suo allievo bolognese Giannantonio Rocca di alcune critiche al metodo degli indivisibili contenute nel secondo libro della *Centrobaryca* di Guldino [Giusti, 1993, p. 102]; in risposta ad esse, Cavalieri, nel 1647, pubblica *Contro Guldino. Esercitazione terza*, inclusa nelle *Exercitationes geometricae sex* [Cavalieri, 1989, p. 32].

Così Cavalieri cita alcune contestazioni di Guldino (il progetto della risposta al matematico svizzero prevedeva un dialogo; le parole ora riportate avrebbero dovuto essere pronunciate da Usulpa Ginuldus, anagramma di Paulus Guldinus [Cavalieri, 1989, pp. 774-776]):

"Infatti in molti passi, sia Archimede, sia molti altri dediti alla Geometria più pura, dimostrano che si possono inscrivere, e circoscrivere ad una figura data altre figure, in modo che la figura circoscritta superi l'inscritta per una grandezza, la quale sia minore di qualsiasi grandezza data del medesimo genere. Concludono dunque che la circoscritta è uguale all'inscritta? Per niente affatto; adoperato invece un altro termine medio dimostrano che la figura alla quale è stata fatta la inscrizione e la circoscrizione, è uguale a una certa altra, la quale sia invero minore della circoscritta, maggiore invece della inscritta" [Cavalieri, 1989, pp. 824-825].

Nel passo riportato, dunque, Guldino *riassume il metodo di esaustione*, con l'intento dichiarato di muovere una critica sostanziale al metodo degli indivisibili di Cavalieri. Pur senza esaminare i particolari della lunga polemica, che finisce per concentrarsi su questioni filosofiche, è significativo che al metodo cavalieriano sia contrapposto da Guldino proprio il metodo di esaustione, indicato come modello di rigore (ricorda Kline: 'il rigore, disse Bonaventura Cavalieri, ... è affare della filosofia e non della geometria" [Kline, 1953, p. 217]).

Le applicazioni pratiche delle intuizioni cavalieriane sugli indivisibili superano certamente le limitate potenzialità del metodo di esaustione, rigoroso ma scomodo; tuttavia, non essendo ancora sorrette da un adeguato impianto concettuale e formale, esse finiscono per costituire una teoria intuitiva, ma fragile, non del tutto rigorosa: Cavalieri riprende inconsapevolmente proprio quelle tecniche che lo stesso Archimede aveva impiegato per ricavare informalmente i propri risultati (forse in ciò preceduto da Democrito), dimostrati poi attraverso il metodo di esaustione.

## ISAAC NEWTON E LA NASCITA DEL CALCOLO

Il periodo che porta alla definizione dei concetti dell'analisi infinitesimale è uno dei più vivaci e fecondi dell'intera storia della matematica: nella fondazione del Calcolo sono coinvolte più scuole scientifiche (inglese, tedesca, francese, italiana) ed i contributi dei loro massimi esponenti si intrecciano e si completano [Castelnuovo, 1938]; essa culmina con le opere di Isaac Newton (1642-1727) e di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

L'impostazione newtoniana del calcolo infinitesimale supera in flessibilità ed in profondità quella della matematica greca, ed in particolare quella archimedea [Bourbaki, 1963]. Eppure il nome del grande Siracusano ricorre con frequenza nelle opere di Newton e degli analisti del XVII secolo [Newton, 1965, pp. 91, 121, 358, 368, 399]: per molti, Archimede resta un modello da imitare, una fonte di ispirazione. Ciò è determinato in larga parte dai procedimenti concettualmente vicini all'integrazione; ma l'applicazione originale delle tecniche archimedee riguarda questioni *statiche e non cinematiche* (nonostante lo stesso Archimede dia una definizione cinematica della spirale). Scrive Bourbaki:

'Se infatti, per quanto concerne l'"integrazione", un immenso campo di ricerche si apriva ai matematici greci, non solo per la teoria delle aree e dei volumi, ma anche per la statica e l'idrostatica, essi, mancando l'impulso di problemi di cinematica, non ebbero l'occasione di affrontare seriamente la differenziazione" [Bourbaki 1963, p. 173].

La fondazione dell'analisi nel XVII secolo porta infatti ad una vera e propria rivoluzione rispetto all'impostazione ellenica: i metodi infinitesimali archimedei sono basati sull'intuizione dell'integrazione; nelle opere di Newton e di Leibniz è invece la *differenziazione* ad essere considerata l'operazione analitica principale. L'innovativa considerazione della differenziazione sancisce dunque la sostanziale superiorità dell'analisi seicentesca rispetto ai procedimenti infinitesimali greci.

Del resto, tutta l'impostazione analitica newtoniana è rivolta alla considerazione di quantità variabili in funzione di un parametro temporale, le 'fluenti', e delle loro derivate prime, le 'flussioni'; l'integrazione viene ad assumere per Newton (come per Barrow) il carattere di *problema particolare* (quello di conoscere la fluente una volta nota la flussione), piuttosto che quello di operazione analitica. Newton *non* attribuisce alcuna specifica denominazione all'integrale e *non* introduce alcun simbolo per indicarlo; solo saltuariamente egli scrive $\bullet f(t)$ per indicare $\int f(t)dt$ (secondo Bourbaki, Newton opta per una tale posizione forse perché "... gli ripugna dare un nome ed un simbolo ad un'entità che ancora non è definita in modo unico, ma solo a meno di una costante additiva" [Bourbaki, 1963, p. 201]; e saranno necessari due secoli "per ristabilire il giusto equilibrio, ponendo l'integrazione alla base della teoria generale delle funzioni di variabile reale e delle sue generalizzazioni moderne" [Bourbaki, 1963, p. 207]).

Un'altra considerazione si impone nell'ideale raffronto tra l'impostazione archimedea e quella newtoniana: quale conoscenza ebbero Newton e gli scienziati del XVII secolo dei procedimenti di Archimede così straordinariamente prossimi al metodo degli indivisibili cavalieriano ed all'integrale definito? Il *Metodo*, come abbiamo sottolineato, era ancora sconosciuto; del resto, le tecniche euristiche archimedee, come abbiamo notato, sono ben distinte, sia concettualmente che praticamente, dal rigoroso metodo di esaustione.

Pertanto la vivace rivalutazione di Archimede che ha luogo tra la fine del XVI secolo e la metà del XVII è da attribuire proprio alle dimostrazioni rigorose per assurdo, alle eleganti applicazioni del metodo eudossiano di esaustione: in quell'epoca i metodi dimostrativi archimedei (ricordati anche da Pascal e da Barrow, che però ne mettono in dubbio l'effettiva utilità [Bourbaki, 1963, p. 180]) sono ben conosciuti, forse ancora utilizzati. Ma il successo tributato ad essi è un riconoscimento soltanto formale; per quanto riguarda il possibile impiego delle dimostrazioni per esaustione nella ricerca matematica, Pierre de Fermat è categorico:

"Sarebbe facile dare delle dimostrazioni con il metodo di Archimede...; basterà chiarirlo una volta per tutte, onde evitare continue ripetizioni" [Fermat, 1891-1922, I, p. 257].

*Sarebbe facile...*, ma è evidentemente pressoché *inutile*, lascia dunque intuire Fermat. Com'è noto, infatti, il metodo di esaustione non può essere impiegato per la ricerca di un risultato, ma solo per la dimostrazione di una tesi: una limitazione molto pesante, davvero insostenibile per una comunità scientifica lanciata verso la precisazione di procedimenti nuovi, verso la matematizzazione di larghi settori del sapere umano. Ricordiamo ancora le parole di Bourbaki:

"Ma era passato il momento di versare vin nuovo in botti vecchie... La via all'analisi moderna si apre solo quando Newton e Leibniz, voltando le spalle al passato, si accontentano di cercare provvisoriamente la giustificazione dei nuovi metodi non in dimostrazioni rigorose, ma nella fecondità e nella coerenza dei risultati" [Bourbaki 1963, p. 181].

## IL DIFFERENZIALE DI GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

Indubbiamente a Leibniz va attribuito il merito di elaborare una simbologia chiara, sistematica ed efficace, *di gran lunga superiore a quella impiegata da Newton*: anzi, dall'esame di alcune pagine leibniziane appare evidente la cura con la quale il grande pensatore di Lipsia si dedica alla messa a punto della propria simbologia [Leibniz, 1849-1863, V, pp. 220-226 e 226-233].

Al contrario di Newton, Leibniz non si riferisce soltanto a quantità variabili in funzione del tempo e ritiene dunque opportuno *evidenziare nella notazione della derivata anche la variabile indipendente*; egli introduce il simbolo della derivata in modo diverso (più chiaro e più completo) rispetto alla convenzione newtoniana, optando per l'indicazione del rapporto dei differenziali.

L'atteggiamento di Leibniz nei confronti del differenziale subisce però una netta evoluzione [Dupont, 1981, II-2, p. 713]: all'inizio (1675), egli addirittura lo omette nella notazione dell'integrale e scrive dunque $\int y$ al posto di $\int ydx$ [Bourbaki, 1963, p. 199]. In breve, tuttavia, egli stesso si rende conto del fondamentale ruolo del differenziale (particolare importanza egli attribuisce alle questioni collegate ai cambiamenti di variabile); dunque scrive:

"Raccomando di fare attenzione a non omettere *dx*, ..., errore frequentemente commesso e che impedisce di andare oltre, poiché si privano questi indivisibili, come qui *dx*, della loro generalità... dalla quale nascono innumerevoli trasfigurazioni ed equipollenze di figure" [Leibniz, 1849-1863, V, p. 233].

Alla base di questa mutevole posizione leibniziana stanno le difficoltà sulla concezione dell'infinitesimo attuale, sulla composizione del continuo. Leibniz conosce l'opera di Cavalieri, ma il processo leibniziano di algebrizzazione del calcolo infinitesimale si mantiene ben distinto sia dalla geometria analitica (finita) cartesiana che dal cavalieriano metodo degli indivisibili [Dupont, 1981, II-2, p. 710]. Cavalieri infatti non considera una superficie piana come suddivisa in rettangoli con una dimensione infinitesima; mentre Leibniz, dopo qualche incertezza, calcola l'integrale definito $\int f(x)dx$ sommando tutti i rettangoli *bidimensionali* di base infinitesima *dx* ed altezza *f*(*x*) (il simbolo leibniziano di integrale deriva della lettera S, iniziale di "somma") [Bos, 1974 -1975, p. 79].

L'enfatizzazione del ruolo del calcolo differenziale comporta però notevoli problemi fondazionali, che si manifestano già nelle opere dei primi analisti; lo stesso Leibniz definisce esplicitamente il differenziale *dx* come un segmento di lunghezza arbitraria ("recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur *dx*" [Dupont, 1981, II-2, p. 744]). Eppure proprio la concezione del differenziale come quantità infinitesima risulta praticamente essenziale e viene ad essere particolarmente feconda nello sviluppo del calcolo leibniziano.

La carenza di rigore dell'analisi del XVII secolo è evidente, se esaminata con la sensibilità dei nostri giorni [Bottazzini, 1990, pp. 27-30]. La storia del calcolo dalle sue origini al XIX secolo si divide così in due filoni di ricerca: da un lato, si cercano le molteplici applicazioni di uno dei più utili e versatili strumenti che mai la matematica abbia messo a disposizione della ricerca scientifica; dall'altro, si opera per consolidare i principi sui quali tale strumento è fondato [Bourbaki, 1963, p. 207], fino alla rigorizzazione della nozione di limite ad opera di Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783) e di Augustin Louis Cauchy (1789-1857), autore del *Cours d'analyse* (1821).

## CONCLUSIONE

E l'antico metodo di esaustione? E le eleganti dimostrazioni per assurdo?

Alla fine del Seicento, l'ineccepibile rigore del metodo di esaustione non è più che uno sbiadito ricordo; ma l'abbandono dei procedimenti della grande geometria greca da parte della ricerca matematica è inevitabile, alla luce della scarsa flessibilità operativa delle dimostrazioni per assurdo. La vitalità del calcolo differenziale ed integrale non tarda a determinare il superamento di un metodo corretto, elegantissimo, ma che *richiede la conoscenza della tesi da dimostrare*.

La carenza di rigore è dunque il prezzo che gli analisti del XVII secolo accettano di pagare per realizzare un sogno antico e meraviglioso: lanciarsi liberamente nella grande avventura di Anassagora, di Zenone di Democrito, verso il dominio dell'infinitamente piccolo.

## BIBLIOGRAFIA


**Archimede**, *Opere*, A. Frajese (a cura di), UTET, Torino 1974.

**G. Arrigo - B. D'Amore**, *Infiniti*, Angeli, Milano 1992.

**H.J.M. Bos**, *Differentials, high-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus*, "Archive for History of Exact Sciences", 14, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974-1975, pp. 1-90.

**U. Bottazzini**, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino 1990.

**N. Bourbaki**, *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano 1963.

**L. Brunschvicg**, *Les étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris 1929.

**E. Carruccio**, *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, B. D'Amore (a cura di), Pitagora, Bologna 1972.

**G. Castelnuovo**, *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna 1938 (ristampa: Feltrinelli, Milano 1962).

**B. Cavalieri**, *Geometria degli indivisibili*, L. Lombardo Radice (a cura di), UTET, Torino 1989.

**P. Dupont**, *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale. I. Le origini. II, p. II. Newton e Leibniz.* Cortina, Torino 1981.

**F. Enriques - G. de Santillana**, *Storia del pensiero scientifico*, Milano-Roma 1932 (degli stessi AA., *Compendio di storia del pensiero scientifico*, I e. 1936, ristampa anastatica, Zanichelli, Bologna 1973).

**Euclide**, *Elementi*, A. Frajese-L. Maccioni (a cura di), UTET, Torino 1970.

**P. de Fermat**, *Œuvres*, vv. I-V, Gauthier-Villars, Paris 1891-1922.

**A. Frajese**, *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, Firenze 1969.

**L. Geymonat**, *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Levrotto e Bella, Torino 1947.

**E. Giusti**, *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, Bollati Boringhieri, Torino 1993.

**M. Kline**, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino 1991 (I e. 1972).

**G.W. Leibniz**, *Mathematische Schriften*, 7 vv., C.I. Gerhardt (a cura di), Ascher-Schmidt, Berlin-Halle 1849-1863.

**I. Newton**, *Opere*, A. Pala (a cura di), UTET, Torino 1965.

**E. Rufini**, *Il "Metodo" di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Zanichelli, Bologna 1926 (ristampa: Feltrinelli, Milano 1961).

**B. Russell**, *I principi della matematica*, Longanesi, Milano 1963.

**G. Saccheri**, *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Boccardini (a cura di), Hoepli, Milano 1904.