Progetto Alice, 20, 187–208 (2006)

Figure simili in Euclide, Apollonio, Cavalieri

Giorgio T. Bagni

Riassunto Si studia la definizione 10 del I libro dell'opera principale di Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635). Questa definizione può essere confrontata con la definizione 2 del VI libro delle *Coniche* di Apollonio: tali definizioni sono simili, ma ma quella di Apollonio, riferita soltanto alle coniche, è sovrabbondante, mentre quella di Cavalieri non lo è, riferendosi a figure generali. Viene infine brevemente presentata una ricerca didattica.

Abstract We study the 10th definition given in the first Book of the main work by Bonaventura Cavalieri, *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635). This definition can be compared with the 2nd definition given in the 6th Book of Apollonios' *Konika*: these definitions are similar, but Apollonios' one is referred only to Conics, so it is superabundant, while Cavalieri's one is referred to general plane figures and it is not superabundant. Finally, an educational research is presented.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Introduzione

Molte ricerche[1] sono state dedicate alla personalità scientifica di Bonaventura Cavalieri (1598?-1647)[2] e alle sue opere principali, tra le quali spicca la *Geometria degli indivisibili* (l'edizione originale è del 1635; la seconda, postuma, risale al 1653: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*, De Ducijs, Bononiae, Fig. 1).[3] Com'è noto, il ruolo di Cavalieri nello sviluppo della matematica del XVII secolo viene primariamente collegato dagli storici della scienza al metodo degli indivisibili (sebbene recenti studi abbiano ripreso, ad esempio, il ruolo cavalieriano nell'ambito della scuola galileiana: Giusti, 1993).[4] Sarebbe tuttavia riduttivo limitare l'interesse della *Geometria degli indivisibili* all'introduzione del metodo cavalieriano che ebbe una chiara importanza nella fase preparatoria all'introduzione del calcolo infinitesimale.[5] Gli scritti matematici di Cavalieri rivelano un'impostazione più ampiamente interessante, vivace e personale, ad esempio per quanto riguarda la scelta e la formulazione delle definizioni.

La definizione cavalieriana di figure simili

Il Libro I della *Geometria degli indivisibili* (che fu redatto dall'Autore solo dopo i Libri dal II al V) è dedicato alle definizioni ed ai risultati preliminari.

Esaminiamo la definizione X in esso contenuta:

---

[1] Il presente lavoro rielabora alcuni contenuti introdotti in: Bagni, 1998 e in Bagni & Gagatsis, 1999.

[2] F. M. Franceschinis parlava dell'analisi matematica come del "nuovo geometrico strumento... dell'italiano Cavalieri" (Franceschinis, 1808, p. 57; Bagni, 1992). Su Cavalieri: Frisi, 1825; Piola, 1844; Favaro, 1885; Bortolotti, 1947; Lombardo Radice, 1989. Bibliografia: Riccardi, 1952; Barbieri & Pepe, 1992.

[3] Sulla *Geometria degli indivisibili* segnaliamo: Bortolotti, 1928; Castelnuovo, 1938; Enriques, 1938; Geymonat, 1947; Bourbaki, 1963; Boyer, 1982; Carruccio, 1972; Arrighi, 1973; Koyré, 1973; Bos, 1975; Giusti, 1980 e 1982; Dupont, 1981; Menghini, 1982; Kline, 1982 e 1991; Andersen, 1985; Bottazzini, 1988 e 1990; Edwards, 1994; Bagni, 1996, II. Su altri scritti cavalieriani: Cioffarelli, 1982; Giuntini, Giusti & Ulivi, 1985; Baroncelli, 1987; Bottazzini, 1987; Ulivi, 1987. Si veda la Fig. 4, al termine del presente articolo.

[4] Sulla scuola galileiana, oltre al citato studio di E. Giusti (1993), segnaliamo: Eneström, 1912; Vacca, 1915; Maracchia, 1992. Per i testi originali: Torricelli, 1644; Valerio, 1661; Smith, 1959; Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992.

[5] "Cavalieri non fu il primo a formulare il principio che viene ricordato con il suo nome. Il matematico cinese Tsu Keng-Chih, che visse nel V secolo d.C., espresse la stessa idea in una breve poesia: *Se due volumi sono costituiti da blocchi sovrapposti, / E le corrispondenti aree sono uguali, / Allora i volumi non possono essere diversi*" (Van der Waerden, 1983, p. 205).

“Si chiameranno, in generale, *simili* [due] figure piane, in ognuna delle quali singolarmente presa possono essere condotte tangenti opposte, e segmenti aventi gli estremi su di esse, che le incontrano secondo il medesimo angolo dalla medesima parte, in modo che, se si conducono comunque linee rette tra le due tangenti opposte, ad esse parallele, secanti i segmenti che incidono le rette tangenti similmente dalla medesima parte, troviamo che le porzioni di queste parallele, nonché delle tangenti opposte, che sono poste dalla medesima parte tra i detti segmenti incidenti, e il perimetro delle figure, prese nel medesimo ordine, hanno tra di loro lo stesso rapporto dei segmenti rettilinei incidenti a dette tangenti, e aventi gli estremi su di esse” (Lombardo Radice, 1989, p. 69).

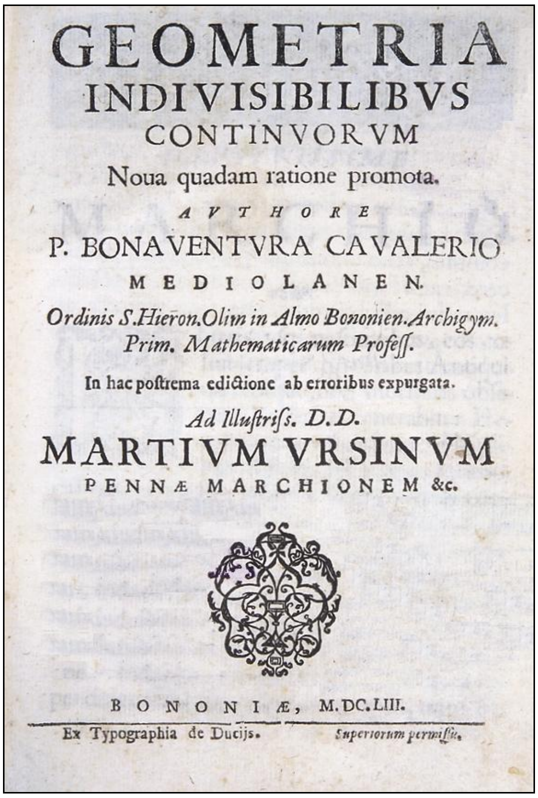
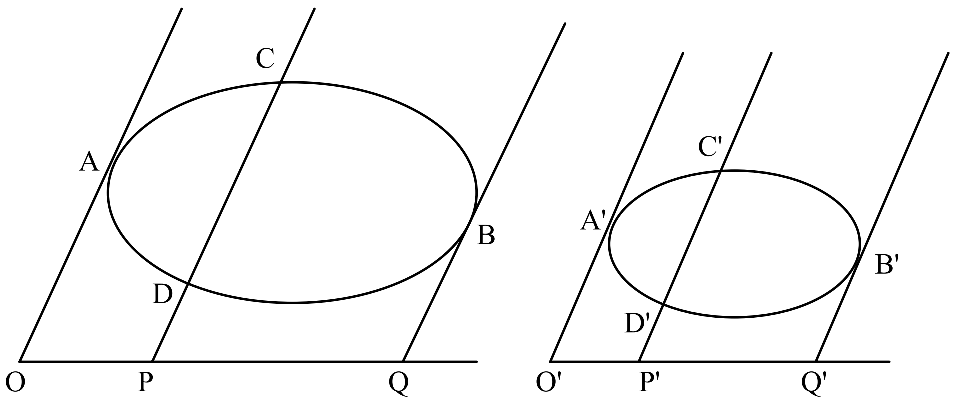

GEOMETRIA
INDIVISIBILIBVS
CONTINVORVM
Noua quadam ratione promota.
AVTHORE
P. BONAVENTVRA CAVALERIO
MEDIOLANEN.
Ordinis S.Hieron.Olim in Almo Bononien.Archigym. Prim. Mathematicarum Profess.
In hac postrema editione ab erroribus expurgata.
Ad Illustriss. D.D.
MARTIVM VRSINVM
PENNÆ MARCHIONEM &c.
BONONIÆ, M.DC.LIII.
Ex Typographia de Ducijs. *Superiorum permissu.*

Fig. 1. Il frontespizio della *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1653) e un’immagine di Bonaventura Cavalieri (Piola, 1844).

Riportiamo una figura tratta da quella presente nella citata edizione del lavoro di Cavalieri:



La condizione per la similitudine espressa nella definizione X può essere scritta nel modo seguente.[6] Quando:

OP : O’P’ = OQ : O’Q’

allora risulta:

CP : C’P’ = OQ : O’Q’ e DP : D’P’ = OQ : O’Q’

Il confronto della definizione ora ricordata con alcune classiche definizioni di figure simili è molto interessante. Ad esempio, la definizione esaminata di figure simili viene ad essere del tutto diversa dalla definizione euclidea (riferita alle sole “figure rettilinee”, introdotte nella definizione XIX del Libro I degli *Elementi*; com’è noto, in termini moderni, esse corrispondono ai poligoni: Frajese & Maccioni, 1970, pp. 69 e 359; si veda la Fig. 3):

“Sono figure rettilinee simili quante abbiano gli angoli, uno ad uno, rispettivamente uguali, e proporzionali i lati che comprendono gli angoli uguali”.[7]

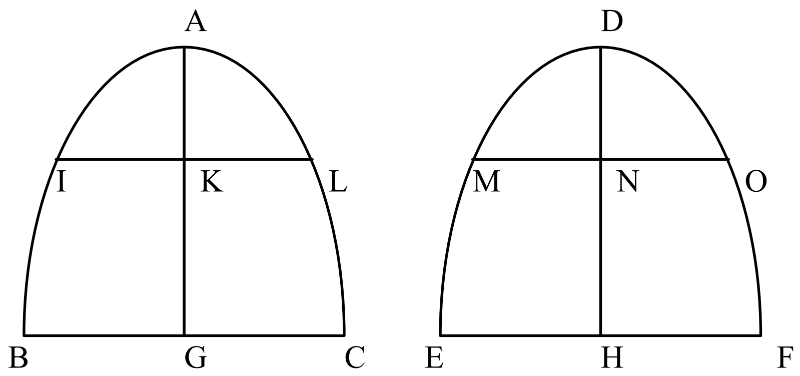
[6] Interessante è notare che Cavalieri sottintende in forma velata ed implicita l’impiego di un sistema di coordinate. Tuttavia l’impostazione cavalieriana appare legata ai segmenti e non già alle loro misure; anche per questo aspetto, dunque, Cavalieri “sembra a noi piuttosto l’ultimo dei geometri antichi che non il primo dei matematici moderni” (Lombardo Radice, 1989, p. 71).

[7] “Similes figurae rectilineae sunt, quae et angulos singulos singulis aequales habent, atque etiam latera, quae circum angulos aequales, proportionalia” (Clavio, 1603, p. 753; pressoché identica è la definizione riportata in: Commandino, 1619, p. 71; la traduzione nel testo è in: Frajese & Maccioni, 1970, p. 359). Sull’interpretazione degli *Elementi* si veda: Enriques, 1930.

La definizione di Apollonio

Interessante è inoltre considerare la definizione di similitudine tra due sezioni coniche che compare come definizione II del Libro VI delle *Coniche* di Apollonio:

"Chiamiamo simili [due] sezioni coniche nelle quali, se si conducono rette coniugate a un'asse, in ciascuna delle sezioni, e se si divide ogni asse in un medesimo numero di parti, ovvero in un medesimo rapporto, allora tali rette coniugate sono ordinatamente proporzionali ai segmenti dell'asse da essi staccate a partire dal vertice".[8]



(Abbiamo qui riportato una figura ricavata da quella originale in: Apollonio, 1661, p. 135; il lettore potrà constatare che essa sembra riferita a due figure congruenti).

Non è difficile ravvisare l'analogia di questa definizione con la definizione cavalieriana sopra ricordata. Osserviamo tuttavia che l'edizione veneziana del 1537 delle *Coniche*, a cura di G.B. Memo, era limitata ai soli primi quattro Libri; analogamente per quella bolognese del 1566 dovuta a F. Commandino (Loria, 1929-1933) e per molte edizioni seguenti fino alla metà del XVII secolo (ad esempio: Apollonio, 1655: Fig. 2). Al momento della redazione della *Geometria degli indivisibili*, Cavalieri non poteva conoscere la prima edizione

[8] "[Sectiones] similes verò sunt, in quibus omnes potentiales ad axium abscissas utrobique sunt in ijsdem rationibus, tum abscissae ad abscissas" (Apollonio, 1661, p. 133; la traduzione citata nel testo è in: Lombardo Radice, 1989, pp. 70-71). Sull'opera di Apollonio segnaliamo ad esempio: Freguglia, 1982; Van der Waerden, 1983.

borelliana dei Libri V, VI, VII delle *Coniche* (Apollonio, 1661), pubblicata a Firenze ben ventisei anni dopo la prima edizione del trattato cavalieriano.[9]

Fig. 2. Frontespizi di alcune edizioni del XVII secolo delle *Coniche* di Apollonio.

In uno Scolio immediatamente precedente la definizione X, però, Cavalieri menziona esplicitamente il Libro VI delle *Coniche*, e riferisce di essersi basato sulla presentazione indiretta data di esso nei *Commentarii* ad Archimede e ad Apollonio dovuti ad Eutocio di Ascalona (VI secolo d.C.):

"Scolio. Le altre definizioni, quelle date da Euclide di figure piane simili e solide e di cilindri e coni simili, e quelle che vengono date da Apollonio, nel libro sesto delle *Coniche*, di porzioni simili di sezioni di cono, stando a quanto riferisce Eutocio, si prendano così come sono addotte da quegli autori, aggiungendo tuttavia alla definizione di sezioni coniche simili nello stesso

[9] G. Vacca segnala l'importanza del Libro II dell'opera *De lineis horarijs libri tres* di F. Maurolico (Maurolico, 1575, pp. 161-285), nel quale l'Autore "pubblicò un compendio delle *Coniche*, esponendo le proprietà delle tangenti e degli asintoti" (Vacca, 1929, p. 686). Oltre al libro II di tale lavoro (pp. 211-262), ci sembra importante anche il successivo Libro III (pp. 263-285). Si noti che l'opera ora citata non deve essere confusa con il quasi omonimo *Tractatus de Lineis horarijs*, pubblicato anch'esso negli *Opuscula mathematica* dello stesso Autore (Maurolico, 1575, pp. 80-102). Maurolico aveva inoltre pubblicato a Messina nel 1554 una *Emendatio et Restitutio Conicorum Apollonii Pergaei*, nella quale cercò "di compiere una divinazione dei due [Libri] successivi [il V e il VI], giovandosi per ciò delle informazioni date da Pappo; scoperte che furono le versioni arabe di quei due Libri, si notò che, riguardo al V... il matematico messinese si era molto scostato dal Pergeo, mentre, per quanto concerne il VI... il distacco è assai meno considerevole" (Loria, 1929-1933, p. 355).

luogo data da Apollonio ciò che sarà più avanti detto, se essa verrà applicata agli spazi [racchiusi dalle curve]" (Lombardo Radice, 1989, p. 68).

Confronto tra le due definizioni

Nello Scolio sopra riportato, Cavalieri afferma dunque di accettare la definizione di Euclide per i poligoni e quella di Apollonio per le sezioni coniche; solo in un secondo momento, come abbiamo potuto constatare, quest'ultima definizione viene applicata dall'Autore a figure più generali (la corrispondente definizione cavalieriana nel caso di figure solide è la XI: Lombardo Radice, 1989, pp. 74-75).

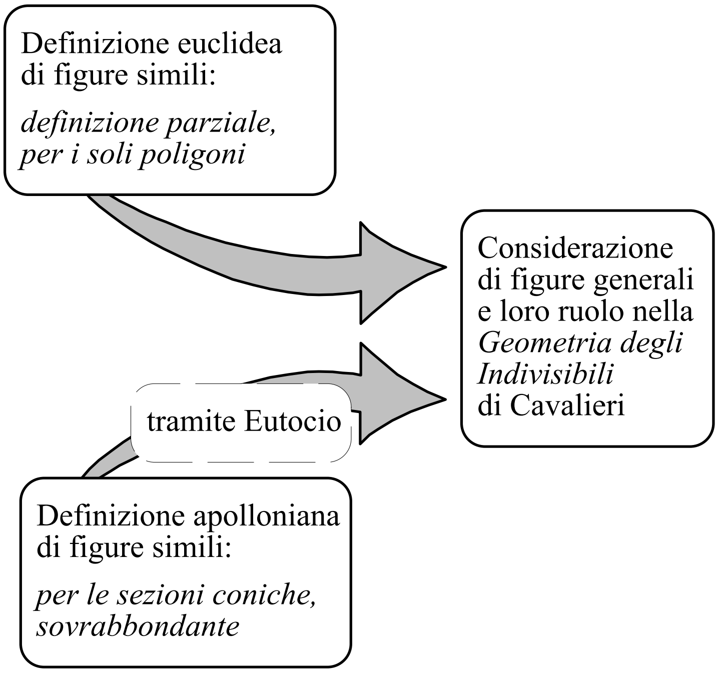
A tale proposito, è importante osservare che questa estensione viene ad assumere un significato matematico che va ben oltre la semplice considerazione di una più ampia classe di figure. *La definizione di Apollonio è infatti chiaramente sovrabbondante se riferita alle sole sezioni coniche*: è noto infatti che affinché due coniche siano simili è sufficiente che esse abbiano la stessa eccentricità (si veda ad esempio: Castelnuovo, 1931, pp. 453-454) e dunque in tale caso non risulta necessario imporre la più gravosa condizione espressa nella definizione II del Libro VI delle *Coniche*.

Nella *Geometria degli indivisibili*, pertanto, Cavalieri non solo estende consapevolmente l'impostazione di Apollonio alla similitudine di una classe più ampia di figure (e proprio in questa generalità possiamo evidenziare uno dei pregi dell'intera opera cavalieriana, come ben sottolineato in: Lombardo Radice, 1989, p. 70); ma egli, basandosi sull'antica considerazione delle sole sezioni coniche, ne applica correttamente la condizione di similitudine a figure generalmente intese, per le quali la concezione dell'eccentricità sarebbe improponibile.[10] In tale modo Cavalieri si mostra in grado di "sfruttare" le potenzialità dell'elegante ed efficace definizione di figure simili data nel Libro VI delle *Coniche*[11] assai più a fondo di quanto abbia fatto lo stesso Apollonio; e può inoltre così eliminare il carattere di sovrabbondanza di tale importante definizione.

---

[10] Si noti che nella *Geometria degli indivisibili* non troviamo una esplicita definizione del termine *figura*; osserva L. Lombardo Radice: "una definizione [di *figura*] avrebbe implicato dei criteri topologici, ed era impossibile per il Cavalieri anticiparli" (Lombardo Radice, 1989, p. 60).

[11] Nelle *Coniche* di Apollonio non viene introdotta la moderna nozione di eccentricità di una sezione conica (Loria, 1929-1933).



**Importanza della definizione di
figure simili nella *geometria degli indivisibili***

La definizione X del Libro I della *Geometria degli indivisibili*, sopra analizzata, assume un'importanza fondamentale nello sviluppo del trattato di Cavalieri. La nozione di figure simili (piane e solide) viene infatti ripresa in termini spesso decisivi nel corso di tutto il lavoro cavalieriano.

Interessante, a tale proposito, è il compendio della *Geometria degli indivisibili* proposto da Paolo Frisi nell'*Elogio di Bonaventura Cavalieri* (Frisi, 1825; la dedica dell'Autore a Pietro Verri è datata del 20 marzo 1778):

"Ecco il prospetto di tutta la Geometria degl'Indivisibili. Nel primo libro, e in una porzione del secondo, incomincia il Cavalieri a trattare di quelle quantità, in cui tutti gli elementi analoghi hanno tra loro la stessa proporzione. Il suo lungo ragionamento si ridurrebbe sostanzialmente a questa semplice proporzione: Che tutte le figure, i cui elementi crescono o scemano similmente dalla cima alla base, sono alla figura uniforme della base medesima e della medesima altezza nella proporzione costante, con cui gli elementi crescono o scemano. Il Cavalieri […] ha fatto vedere come [a ciò] si riduca una gran parte della Geometria degli antichi" (Frisi, 1825, pp. 209-210).

Già nel Libro I infatti Cavalieri dedica un'*Appendice prima* alla "spiegazione dell'antecedente definizione X" (Lombardo Radice, 1989, pp. 72-74, mentre un'analoga *Appendice seconda* è dedicata alle figure solide, pp. 76-79). Poco oltre, l'Autore conferma di essere consapevole dell'importanza della generalizzazione introdotta per la similitudine delle figure piane (e solide):

"Scolio. Per quel che concerne il nome di figure simili, è da avvertire peraltro che, quando chiamo simili figure piane, o solide, io intendo, con ciò per esse le definizioni generali sopra allegate; quando invece le chiamo con nomi particolari, intendo le definizioni particolari da altri, o da me allegate per la loro similitudine; così, quando dirò porzioni simili di sezioni di cono, intenderò la loro definizione particolare, e quando dirò parallelogrammi simili intenderò riferirmi alla definizione particolare di figure rettilinee [poligoni] simili, e così in altri casi, giacché più sotto dimostreremo che dalle medesime figure sono verificate ambedue le definizioni, sia la particolare che la generale" (Lombardo Radice, 1989, p. 79).[12]

Alcuni risultati seguenti sono esplicitamente collegati alla similitudine (ad esempio le proposizioni XI, XII, XIII, XIX, XX, XXI, XXII); rispetto alle concezioni classiche (di Euclide e di Apollonio), l'Autore si riferisce ad un'impostazione più ampia, in quanto nella trattazione euclidea, ad esempio, "si parla solo di coni in senso elementare e non di *solidi conici* nell'accezione (più generale) di Bonaventura Cavalieri" (Lombardo Radice, 1989, p. 113).[13]

Anche nei Libri successivi del trattato la nozione di figure simili si mantiene fondamentale: già nel Libro II, centrale per la precisazione del metodo degli

[12] Tutta la seconda parte del Libro I, dalla proposizione XXVII alla XLVII, è dedicata alla dimostrazione che le figure classicamente definite (ad esempio il cono) sono casi particolari delle figure generali introdotte (ad esempio i solidi conici).

[13] Riportiamo la definizione cavalieriana di solido conico: "Definizione IV. Data una figura piana qualunque, fuori dal piano della quale sia preso un punto qualunque, dall'una o dall'altra parte, se si conduce da esso ad un punto qualsivoglia del perimetro della figura una linea retta, anche prolungata indefinitamente, ed essa si muove lungo il perimetro fino a percorrerlo tutto, allora il punto che si è preso sarà il vertice del solido, compreso dalla superficie descritta dal segmento, che si muove in giro, racchiuso tra il perimetro della figura data e il punto che si è preso: vertice, rispetto alla figura data, come si proverà. Tale solido si chiami poi: solido conico, del quale la base è la figura data e il vertice il punto detto" (Lombardo Radice, 1989, pp. 65-66).

indivisibili, la definizione VIII è dedicata all'introduzione di "tutte le figure simili" rispetto ad una figura data (Lombardo Radice, 1989, pp. 195-196).

Un completo esame dello sviluppo del trattato cavalieriano esula dagli scopi del presente lavoro; quanto osservato ci consente di concludere che la generalità conferita da Cavalieri alla nozione di figure simili con la definizione X del Libro I anticipa e riflette la pregevole, essenziale generalità di tutta la *Geometria degli indivisibili* e, in ultima analisi, del metodo degli indivisibili.

Le definizioni: un'esperienza didattica

Considerazioni come le precedenti possono avere alcune interessanti ricadute in ambito didattico.[14] Le definizioni di figure simili di Apollonio-Cavalieri e di Euclide riflettono evidentemente due concezioni diverse, la cui importanza didattica può essere valutata sperimentalmente.

La necessità di un'attenta storicizzazione delle concezioni epistemologiche della geometria è ad esempio sottolineata da E. Barbin:

"Ogni lettura suppone una re-interpretazione ed ogni scrittura suppone una ri-appropriazione delle idee o delle conoscenze. Le re-interpretazioni e le ri-appropriazioni del sapere geometrico attraverso le opere della geometria elementare corrispondono [...] a concezioni epistemologiche. Ma queste concezioni devono essere, esse stesse, situate nel loro contesto storico" (Barbin, 1994, p. 157; la traduzione è nostra).[15]

---

[14] Ad esempio, gli scopi di una dimostrazione possono essere diversi: ricordiamo che gli antichi matematici cinesi distinguevano la modalità *bian* (la quale mirava a convincere) dalla modalità *xiao*. A tale riguardo, citiamo G. Hanna: "Con l'attuale enfasi su di un insegnamento *significativo* della matematica, gli insegnanti sono incoraggiati a dedicare attenzione alla spiegazione dei concetti matematici e agli studenti è richiesto di giustificare i propri risultati e le proprie asserzioni. Questo sembrerebbe essere il clima giusto per rendere la maggior parte delle dimostrazioni uno strumento di spiegazione e per esercitarlo come definitiva forma di giustificazione matematica. Ma perché questo succeda, gli studenti devono familiarizzare con i criteri del ragionamento matematico: in altre parole, si deve insegnar loro la dimostrazione" (Hanna, 1997, p. 250). Sulla storia nella didattica della matematica segnaliamo inoltre: Weil, 1980; Swetz, 1989 e 1995; Pepe, 1990; Fauvel, 1990 e 1991; Grugnetti, 1992; Furinghetti, 1993; Nobre, 1994; Calinger, 1996; Fauvel & van Maanen, 1997.

[15] Nel citato lavoro vengono esaminate quattro edizioni degli *Elementi* euclidei: *Les six premier livres des Éléments géométriques d'Euclide* di Peletier du Mans (1557), i *Nouveaux éléments de géométrie* di Arnauld (1667), gli *Éléments de géométrie* di Clairaut (1765) e gli *Éléments de géométrie* di Lacroix (edizione del 1803). Indichiamo inoltre: Speranza, 1994.

Chiaramente ogni approccio (ad esempio in ambito didattico) ad un elemento storico deve essere adeguatamente contestualizzato (Radford, 1997); ma l'adozione di una fondamentale prospettiva epistemologica di tipo storico-culturale non impedisce di considerare le possibili applicazioni didattiche di uno spunto come quello sopra presentato.

Si tratta dunque di domandarsi: l'accostamento di due diverse definizioni può essere utile all'apprendimento? In particolare, può essere interessante proporre agli allievi più definizioni diverse di figure simili? Osserviamo innanzitutto che la definizione è un importante elemento della matematica scolastica (e non solo). Mediante essa, com'è noto, "introduciamo un nuovo simbolo o combinazione di simboli, detto il definiendum, con la stipulazione che esso debba stare per un'altra combinazione di simboli, detta il definiens, il cui significato è già noto in base ai dati e alle definizioni precedenti" (Curry, 1977, p. 106). Si tratta di "una proposta o decisione di usare il definiendum per intendere ciò che si intende col definiens, oppure una richiesta o un'ingiunzione"; naturalmente "le proposte possono essere respinte, le decisioni violate", ma "nessuna di esse è perciò vera o falsa. Lo stesso vale per le definizioni" (Copi, 1978, pp. 137-138). Dobbiamo dunque considerare le definizioni alla stregua di fattori "neutri" della matematica, e della pratica didattica in particolare?

Innanzitutto notiamo, con Ludwig Wittgenstein (1889-1951), che una definizione si collega inscindibilmente all'uso che di essa viene fatto,[16] anche, talvolta, in termini che potremmo chiamare "estetici": "ricorda che a volte richiediamo definizioni, non per il loro contenuto, ma per la forma della definizione. La nostra è una richiesta architettonica; la definizione è come un finto cornicione che non sorregge nulla" (Wittgenstein, 1999, § 217, p. 113).[17] Ma Cellucci sottolinea un ruolo comunque importante per le definizioni: per molti, la matematica consiste nella deduzione di teoremi dagli assiomi; questa stessa deduzione, tuttavia, è resa possibile dall'introduzione di nuovi concetti mediante opportune definizioni (Cellucci, 2003, p. 277). Gli stessi Whitehead e Russell osservano che "nonostante il fatto che le definizioni siano teoricamente superflue, nondimeno è vero che esse spesso comunicano un'informazione più importante di quella contenuta nelle proposizioni in cui sono usate" (Whitehead & Russell, 1925-1927, I, p. 11).

---

[16] Ma una posizione critica è espressa in: Wittgenstein, 2005, p. 159.

[17] Spesso si parla di definizioni più o meno "generali": ma "la generalità non risiede in quello che vi è scritto, ma nel modo in cui viene applicato" (Wittgenstein, 1982-a, p. 288).

La definizione, insomma, è ben lungi da poter essere considerata un elemento "asettico" della pratica matematica e didattica: essa ha molte possibilità e dunque molti ruoli. Ha una dimensione anche sociale precisa: una nuova definizione non è importante (solo) per chi la propone, ma lo è principalmente per chi la usa:[18] può aprire strade, stimolare, provocare. È ben più di una "neutra" frasetta da imparare a memoria![19]

La definizione di figure simili di Apollonio-Cavalieri potrebbe apparire ostica, molto impegnativa rispetto alla tradizionale definizione euclidea. Un'esperienza didattica è stata dedicata all'influenza delle diverse impostazioni geometriche nell'introduzione della similitudine (A. Gagatsis, Università di Nicosia, Cipro, e G.T. Bagni; si veda: Bagni & Gagatsis, 1999); in particolare, abbiamo voluto esaminare, mediante un test, se una prima presentazione della similitudine di triangoli condotta mediante la defínzione di Euclide venga ad essere più chiara ed efficace di un'analoga presentazione condotta attraverso la definizione (più generale ed usuale) di Apollonio-Cavalieri (indichiamo inoltre: Hoffer, 1981; Demetriadou & Gagatsis, 1995; Gagatsis & Thomaidis, 1995). Sono stati coinvolti 98 allievi di quattro classi della Scuola Media (II anno di corso, allievi di 12-13 anni, a Treviso); al momento del test, gli allievi conoscevano le nozioni basilari della geometria euclidea e le nozioni di rapporto e di proporzione; non avevano ancora trattato la geometria delle coordinate e *non avevano ancora trattato la similitudine.*

Gli allievi sono stati suddivisi in due gruppi (A, B); agli allievi del gruppo A è sono stati proposti due triangoli evidenziando che ad essi si applica la definizione di similitudine di Apollonio-Cavalieri; agli allievi del gruppo B sono stati proposti due triangoli evidenziando che ad essi si applica la definizione di similitudine di Euclide. Quindi è stato chiesto a tutti gli studenti di scrivere come possono essere considerati i triangoli dati (per i dettagli dell'esperienza si veda: Bagni, 1998).

Le loro risposte sono state ricondotte alle seguenti:

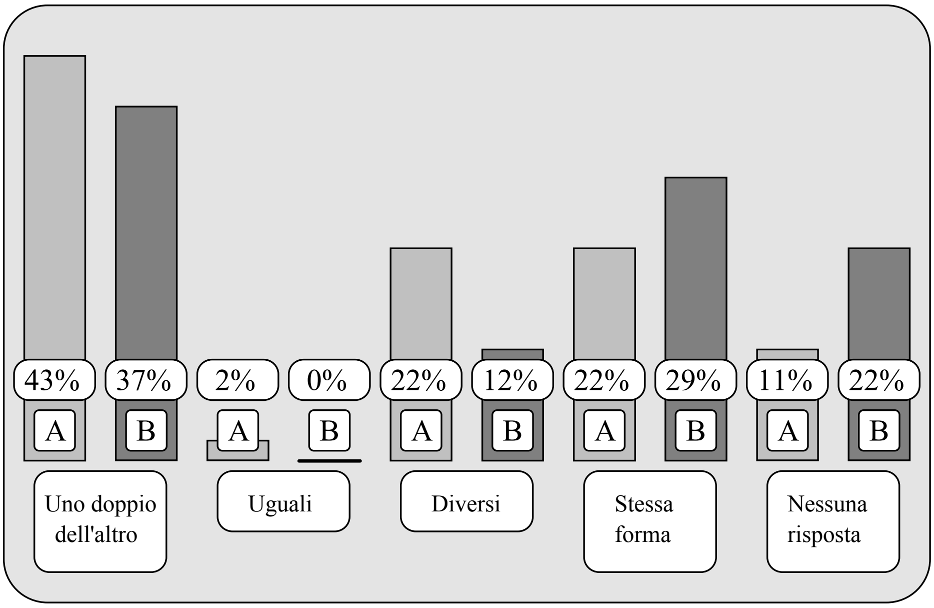
– Sono uno il doppio dell'altro (con riferimento al caso particolare considerato nell'esempio proposto agli stessi allievi)

[18] Ogni espressione, del resto "(in generale, ogni segno) è interindividuale. Tutto ciò che è detto ed espresso si trova fuori dall'"anima" del parlante e non appartiene a lui soltanto" (Bachtin, 2000, p. 312).

[19] "Spesso esprimiamo le regole sotto forma di definizioni. Ma la cosa importante resta sempre come queste espressioni vengono usate […]. Tutti i calcoli della matematica sono stati inventati per assecondare l'esperienza e poi sono stati resi indipendenti dall'esperienza" (Wittgenstein, 1982-a, pp. 43-44).

– Sono uguali (congruenti)
– Sono diversi (più piccolo e più grande etc.)
– Hanno la stessa forma (in scala etc.)
– Nessuna risposta

Riassumiamo i risultati nella seguente rappresentazione qualitativa:



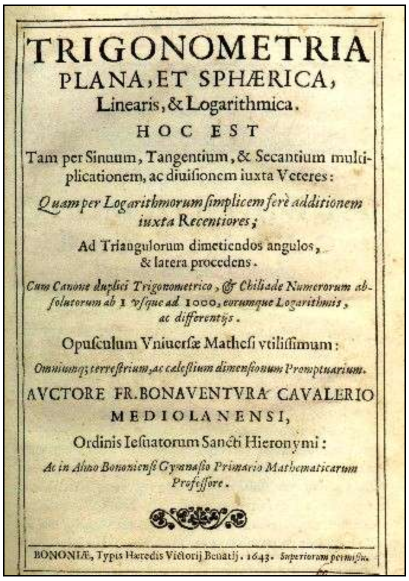
L’esiguità del campione (il quale peraltro non è stato individuato mediante criteri di rilevanza statistica) non consente la formulazione di considerazioni aventi validità generale. Possiamo comunque notare che, indicativamente, l’approccio intuitivo alla similitudine basato sulla definizione di Apollonio-Cavalieri e quello basato sulla definizione di Euclide appaiono pressoché equivalenti, e ciò accade nonostante la constatata maggiore generalità della definizione di Apollonio-Cavalieri: la differenza delle percentuali delle risposte che fanno diretto riferimento alle figure simili (22% per la scheda A e 29% per la scheda B) è infatti troppo esigua per poter essere considerata rilevante.

Ulteriori e più precisi risultati potranno naturalmente essere ottenuti considerando campioni più significativi e predisponendo test più organici, la cui analisi sia condotta anche sulla base di interviste approfondite (sarà inoltre opportuno esaminare, con riferimento ai superiori livelli scolastici, l’influenza dello studio dei vettori e della geometria delle coordinate: Bagni & Gagatsis, 2000). Possiamo tuttavia affermare che la possibilità di diversificare l'approccio ad un concetto mediante punti di vista diversi può rivelarsi stimolante, dal punto di vista didattico e, più generalmente, culturale.

Possiamo concludere osservando che la didattica della matematica non ha il (solo) compito di guidare i nostri allievi verso una conoscenza "tecnicamente perfetta". Emanuele Severino osserva che "la scienza moderna è sin dal suo inizio τέχνη, giacché il conoscere la interessa non in quanto esso sia comprensione della verità, ma in quanto è strumento che consente la trasformazione del 'mondo' secondo gli scopi che l'uomo si propone. Purché operi questa trasformazione, la scienza sopporta che il proprio conoscere sia ipotetico" (Severino, 1995, p. 184). A questo aspetto si collega, idealmente, "la fine del sogno della 'verità definitiva'" che pone "sullo stesso piano ogni proposta culturale […] giacché, per quanto complesso possa essere l'ordine concettuale in cui una cultura si definisce, tale ordine non è (e oggi non intende nemmeno più essere) *la* verità, che manifesta la non verità di ogni alternativa possibile" (Severino, 1995, p. 322).

Lasciamo le riflessioni precedenti, certamente impegnative, all'attenzione del lettore. Possiamo osservare che l'accostamento di diverse definizioni di figure simili è ben lungi, ovviamente, dall'intaccare la "certezza" della matematica; ma apre la strada ad un'interpretazione meno rigida, alla pluralità dei punti di vista. Verso la rortiana "ironia", intendendo con ciò la capacità di un soggetto di mettere in discussione il proprio vocabolario e la consapevolezza che tale vocabolario non "sia più vicino alla realtà degli altri" (Rorty, 2003, pp. 89-90).

Fig. 3. Frontespizi di tre classiche edizioni degli *Elementi* euclidei
(Tartaglia, Clavio, Commandino).



TRIGONOMETRIA
PLANA, ET SPHÆRICA,
Linearis, & Logarithmica.
HOC EST
Tam per Sinuum, Tangentium, & Secantium multiplicationem, ac diuisionem iuxta Veteres:
Quam per Logarithmorum simplicem ferè additionem iuxta Recentiores;
Ad Triangulorum dimetiendos angulos, & latera procedens.
Cum Canone duplici Trigonometrico, & Chiliade Numerorum absolutorum ab 1 vsque ad 1000, eorumque Logarithmis, ac differentijs.
Opusculum Vniuersæ Mathesi vtilissimum:
Omniumq; terrestrium, ac cælestium dimensionum Promptuarium.
AVCTORE FR. BONAVENTVRA CAVALERIO
MEDIOLANENSI,
Ordinis Iesuatorum Sancti Hieronymi:
Ac in Almo Bononiensi Gymnasio Primario Mathematicarum Professore.

BONONIÆ, Typis Hæredis Victorij Benatij. 1643. *Superiorum permissu.*

Fig. 4. Il frontespizio e una tavola della *Trigonometria* (1643) di Cavalieri.

Riferimenti bibliografici

Andersen, K., 1985, Cavalieri's method of indivisibles, *Archive for history of exact sciences*, 31, 291-367

Apollonio, 1655, *Apollonii Pergaei Conicorum Libri IV. Cum commentariis R.P. Claudii Richardi*, Verdussen, Antwerpiae

Apollonio, 1661, *Apollonii Pergaei Conicorum L. V VI VII*, Cocchini, Firenze

Arrighi, G., 1973, La *Geometria indivisibilibus continuorum* di Bonaventura Cavalieri nella ritrovata stesura del 1627, *Physis*, XV, 133-147

Bachtin, M., 2000, *L'autore e l'eroe*, Einaudi, Torino (*Estetica slovesnogo tvorčestva*, Izdatel'stvo Iskusstvo, Moskva 1979)

Bagni, G.T., 1992, Una breve storia "Delle matematiche applicate" (1808) di Francesco Maria Franceschinis, *La matematica e la sua didattica*, 2, 28-32

Bagni, G.T., 1996, *Storia della Matematica*, I-II, Pitagora, Bologna

Bagni, G.T., 1998, Le figure simili nella *Geometria degli indivisibili* di Bonaventura Cavalieri: uno studio storico per un'esperienza didattica, Sala, N. (a cura di), *Atti del Convegno: Bonaventura Cavalieri alter Archimedes, 27-28 marzo 1998*, Comune di Verbania (senza num. pag.)

Bagni, G.T. & Gagatsis, A., 1999, Euclid, Apollonios, Cavalieri: historical references for an empirical educational research, Gagatsis, A. (a cura di), *A multidimensional approach to Learning in Mathematics and Sciences*, Intercollege Press, Nicosia, Cyprus, 195-216

Bagni, G.T. & Gagatsis, A., 2000, Classical versus vector and Cartesian Geometry in problem solving in Greece and in Italy, Gagatsis, A.; Constantinou, C.P. & Kyriakides, L. (a cura di), *Learning and Assessment in Mathematics and Science*, 45253-IC-2-CY-Erasmus-IP-1, Department of Education, University of Cyprus, Nicosia, 171-196

Barbieri, F. & Pepe, L. (a cura di), 1992, Bibliografia italiana di storia delle matematiche 1961-1990, *Bollettino di storia delle matematiche*, XII, 1

Barbin, E., 1994, Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de géométrie, Gagatsis, A., Histoire et enseignement des Mathématiques: *Cahiers de didactique des Mathématiques*, Thessaloniki, 14-15, 135-158

Baron, M.E., 1969, *The origin of the infinitesimal Calculus*, Pergamon, Oxford

Baroncelli, G., 1987, (Bonaventura Cavalieri) *Carteggio*, Olschki, Firenze

Bortolotti, E., 1928, *Studi e ricerche sulla storia della matematica in Italia nei secoli XVI e XVII*, Zanichelli, Bologna

Bortolotti, E., 1947, *La storia della matematica nella Università di Bologna*, Zanichelli, Bologna

Bos, H.J.M., 1975, Differentials, high-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1-90

Bottazzini, U., 1987, La rivoluzione galileiana a Bologna: Bonaventura Cavalieri, *Storia illustrata di Bologna. I novecento anni dell'Università*, 8/VI, 141-160, AIEP, San Marino

Bottazzini, U., 1988, Antichi paradigmi e nuovi metodi geometrici, Rossi, P. (a cura di), *Storia della scienza moderna e contemporanea*, I, 129-162, UTET, Torino

Bottazzini, U., 1990, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L., 1992, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze

Bourbaki, N., 1963, *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960)

Boyer, C.B., 1982, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968)

Calinger, R. (a cura di), 1996, *Vita mathematica: historical research and integration with teaching*, Mathematical Association of America

Carruccio, E., 1971, Cavalieri, Gillespie, C.C. (a cura di), *Dictionary of Scientific Biography*, III, 149-153, New York

Carruccio, E., 1972, *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna

Castelnuovo, G., 1931, *Lezioni di geometria analitica*, Società Anonima Editrice Dante Alighieri, Milano-Genova-Roma-Napoli

Castelnuovo, G., 1938, *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (ristampa: Feltrinelli, Milano 1962)

Cellucci, C., 2003, *Filosofia e matematica*, Laterza, Roma-Bari

Cioffarelli, G., 1982, Su *La sfera armillare*, manoscritto di Cavalieri: Montaldo, O. & Grugnetti, L. (a cura di), *La storia delle matematiche in Italia*, Università di Cagliari, Cagliari, 425-430

Clavio, C., 1603, *Euclidis Elementorum Libri XV*, apud Aloysium Zannettum, Roma

Commandino, F., 1619, *Euclidis Elementorum Libri XV*, Typis Flaminij Concordiae, Pesaro

Copi, I.M., 1978, *Introduction to logic*, MacMillan, New York

Curry, H.B., 1977, *Foundations of mathematical logic*, Dover, New York

Demetriadou, H. & Gagatsis, A., 1995, Teaching and learning problems on the concept of vector in Greek secondary education, Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics and history of mathematics*, Erasmus ICP 94-G-2011/11, Thessaloniki

Dupont, P., 1981, *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale. I. Le origini. II, p. II. Newton e Leibniz,* Cortina, Torino

Edwards, C.H. Jr., 1994, *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, Berlin

Eneström, G., 1912, Zur Geschichte der unendlichen Reihen in die mitte des siebzehnten Jahrhunderte, *Biblioteca Matematica*, 135-148

Enriques F., 1930, *Gli Elementi di Euclide e la critica antica e moderna* Zanichelli, Bologna

Enriques, F., 1938, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982)

Fauvel, J. & van Maanen, J., 1997, Storia e didattica della matematica, *Lettera Pristem*, 23, 8-13

Fauvel, J., 1990, History in the mathematical classroom, *The IREM papers*, The Mathematical Association.

Fauvel, J., 1991, *For the learning of mathematics* (numero speciale sull'impiego della storia della matematica nell'insegnamento), 11, 2

Favaro, A., 1885, *Bonaventura Cavalieri nello Studio di Bologna*, Fava e Garagnani, Bologna

Frajese, A. & Maccioni, L., 1970, *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino

Franceschinis, F.M., 1808, *Delle matematiche applicate*, Nicolò Zanon Bettoni, Padova

Freguglia, P., 1982, *Fondamenti storici della geometria*, Feltrinelli, Milano

Frisi, P., 1825, Elogio di Bonaventura Cavalieri, *Operette scelte*, Silvestri, Milano, 183-248

Furinghetti, F., 1993, Insegnare matematica in una prospettiva storica: *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134

Gagatsis, A. & Thomaidis, J., 1995, Eine Studie zur historischen Entwicklung und didactischen Transposition des Begriffs "absoluter Betrag", *Journal für Mathematik-Didactik*, 16, 1/2, 3-46

Geymonat, L., 1947, *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Levrotto e Bella, Torino

Giuntini, S.; Giusti, E. & Ulivi, E., 1985, Opere inedite di Bonaventura Cavalieri, *Bollettino di Storia delle scienze matematiche*, V, 1-2, 3-352

Giusti, E., 1980, Bonaventura Cavalieri and the theory of indivisibles, saggio introduttivo a: Cavalieri, B., *Exercitationes geometricae sex*, rist. anastatica, U.M.I., Cremonese, Roma

Giusti, E., 1982, Dopo Cavalieri. La dicussione sugli indivisibili, Montaldo, O. & Grugnetti, L. (a cura di), *La storia delle matematiche in Italia*, Università di Cagliari, Cagliari, 85-114

Giusti, E., 1993, *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, Bollati Boringhieri, Torino

Grugnetti, L., 1992, L'histoire des mathématiques: une expérience interdisciplinaire fondée sur l'histoire des mathématiques, *Plot*, 60, 17-21

Hanna, G., 1997, Il valore permanente della dimostrazione, *La matematica e la sua didattica*, 3, 236-252

Hoffer, G., 1981, Geometry is more than proof: *Mathematics teacher*, 74, 1, 11-18.

Kline, M., 1982, *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano (*Mathematics in western culture*, Oxford University Press, New York 1953)

Kline, M., 1991, *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (edizione originale: *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press., New York, 1972)

Koyré, A., 1973, Bonaventura Cavalieri et la géometrie des continus, *Études d'histoire de la pensée scientifique*, Gallimard, Paris

Lombardo Radice, L., 1989, *Geometria degli indivisibili di Cavalieri*, UTET, Torino

Loria, G., 1929-1933, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (ried.: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982)

Maracchia, S., 1992, Luca Valerio matematico Linceo, Conti, L. (a cura di), *La matematizzazione dell'universo. Momenti della cultura matematica tra '500 e '600*, 253-302, Università degli studi di Perugia, Porziuncola, Assisi

Maurolico, F., 1575, De lineis horarijs libri tres, *Francisci Maurolyci Abbati Messanensi Opuscula Mathematica*. Liber primus, 161-210; Liber II, 211-262; Liber III, 263-285; apud Franciscum Franciscium Senensem, Venezia

Menghini, M., 1982, Cavalieri e Leibniz: dagli indivisibili al differenziale, Montaldo, O. & Grugnetti, L. (a cura di), *La storia delle matematiche in Italia*, Università di Cagliari, Cagliari, 385-394

Nobre, S. (a cura di), 1994, *Meeting of the International Study Group on relations between history and pedagogy of mathematics*, Blumenau, Brasile 25-27 luglio, UNESP

Pepe, L., 1979, L'elemento primo dell'"Aritmetica razionale" di Pietro Mengoli, *Bollettino U.M.I.*, 5, 16-A, 201-209

Pepe, L., 1990, Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I, 2, 23-33

Piola, G., 1844, *Elogio di Bonaventura Cavalieri*, Bernardoni, Milano

Radford, L., 1997, On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics, *For the Learning of mathematics* 17(1), 26-33

Riccardi, P., 1952, *Biblioteca matematica italiana*, Gorlich, Milano

Rorty, R., 2003, *La filosofia dopo la filosofia*, Laterza, Roma-Bari (*Contingency, irony, and solidarity*, Cambridge University Press, Cambridge 1989)

Severino, E., 1995, *Essenza del nichilismo*, Adelphi, Milano

Smith, D.E., 1959, *A source book in Mathematics*, Dover, New York

Speranza, F., 1994, A la recherche d'une philosophie de la mathématique idoine pour la didactique, Gagatsis, A. (a cura di), Histoire et enseignement des Mathématiques, *Cahiers de didactique des Mathématiques*, Thessaloniki, 14-15, 187-194

Swetz, F.J., 1989, Using problems from the history of mathematics in classroom instruction, *Mathematics teacher*, 82, 370-377

Swetz, F.J., 1995, To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context: *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88

Torricelli, E., 1644, *Opera geometrica*, A. Massae et L. de Landis, Firenze

Ulivi, E., 1987, Le fonti di Bonaventura Cavalieri: la costruzione delle coniche fino allo Specchio Ustorio, *Bollettino di Storia delle scienze matematiche*, VII, 1, 117-119

Vacca, G., 1915, Sulle scoperte di Pietro Mengoli, *Atti dell'Accademia Nazionale dei Lincei* (Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.), 24, 508-513, 617-620

Vacca, G., 1929, Apollonio, *Enciclopedia Italiana*, III, 686-687, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma

Valerio, L., 1661, *De centro gravitatis solidorum libri tres*, Dozza, Bologna

Van der Waerden, B.L., 1983, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer Verlag, Berlin

Weil, A., 1980, History of mathematics: why and how, Letho, O. (a cura di), *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, I, 227-236

Whitehead, A.N. & Russell, B., 1925-1927, *Principia mathematica*, Cambridge University Press, Cambridge (edizione originale: 1910-1913)

Wittgenstein, L., 1982, *Lezioni sui fondamenti della matematica*, Boringhieri, Torino (*Lectures on the Foundations of Mathematics*, Cornell University Press, Ithaca 1976)

Wittgenstein, L., 1999, *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino (*Philosophische Untersuchungen*, Blackwell, Oxford 1953)

Wittgenstein, L., 2005, *Conversazioni e ricordi*, Neri Pozza, Vicenza (Rhees, R., a cura di, *Recollections of Wittgenstein*, Oxford University Press, Oxford 1984)