Atti del Convegno Cultura e storia a Treviso nel tramonto della Serenissima
(1998), De Donà, B. (Ed.), Quaderni dell'Ateneo, Treviso, 314-327

Il 1797 nella storia della matematica

GIORGIO T. BAGNI

Introduzione

Nell'ambito delle ricerche riguardanti la società e la cultura a Treviso al tramonto della Serenissima, riteniamo significativa la presentazione dello status della ricerca matematica italiana ed europea nel 1797, anno del quale si ricorda il bicentenario. Tale scelta è stata suggerita dalla contemporanea pubblicazione, in tale anno, di quattro opere matematiche che risultano di notevole importanza in rapporto al clima culturale di quel periodo: la *Théorie des fonctions analytiques* di Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), le *Réflexions sur la métaphisique du calcul infinitésimal* di Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823), la *Geometria del compasso* di Lorenzo Mascheroni (1750-1800) e *Om directionens analytiske Betegning* (*Sulla rappresentazione analitica della direzione*) di Caspar Wessel (1745-1808).

Le *Funzioni analitiche* di Lagrange

"«Mathematicorum princeps», il primo fra i matematici: così, nel 1745, Eulero era stato salutato dal suo vecchio maestro Johann Bernoulli. Nel 1775 egli si sentiva ormai pronto a passare lo scettro a Lagrange (1). «È estremamente lusinghiero per me – scriveva al suo più giovane collega, – avere per mio successore a Berlino il più illustre geometra del nostro secolo». In effetti, tale era allora il giudizio concorde della comunità scientifica. «Le célèbre Lagrange, le premier des géomètres» sono i termini usati da Lavoisier per riferirsi all'amico" (Weil, 1993, p. 288) (2).

(1) Scrive U. Bottazzini: "Lagrange si era segnalato giovanissimo per una memoria sul principio di minima azione e per un fondamentale articolo sul calcolo delle variazioni, che presentò in veste puramente analitica, liberandolo dalle considerazioni geometriche presenti nel *Methodus inveniendi* di Euler" (Bottazzini, 1990, p. 50).

(2) L'espressione "Mathematicorum princeps" fu riferita anche a Carl Friedrich (1777-1855): dopo Gauss essa non venne mai più usata.

Le parole di A. Weil, grande matematico del XX secolo, introducono la figura dell'uomo che ebbe il compito di raccogliere l'eredità di Eulero: il torinese Giuseppe Luigi (Joseph Louis) Lagrange, direttore della sezione matematica dell'Accademia di Berlino, prestigioso funzionario dell'Accademia delle Scienze di Parigi e docente all'École Normale e all'École Polytechnique.

Lagrange fu un lavoratore tenace e profondo ([3]): si occupò di meccanica analitica, di calcolo infinitesimale, di calcolo delle probabilità, particolarmente per quanto riguarda le equazioni differenziali e il calcolo delle variazioni, di algebra, di astronomia, di meccanica celeste, di teoria dei numeri (Burzio, 1942; J. Dieudonné scrive di Lagrange: "Ha fatto scoperte importanti in tutti i settori della matematica": Dieudonné, 1989, p. 217; la sua opera più importante fu il trattato *Mécanique analytique*, pubblicato a Parigi nel 1788, nella quale le leggi della meccanica venivano tradotte in un linguaggio matematico organico ed efficace, fino ad ottenere l'equazione denominata "dei lavori virtuali") ([4]).

Il lavoro intitolato *Théorie des fonctions analytiques* fu pubblicato nel 1797; in tale opera il matematico torinese si proponeva di ricondurre l'analisi al rigore dell'impostazione classica ([5]). Particolarmente indicativo è il sottotitolo:

"Contenente i principali teoremi del calcolo differenziale senza l'uso dell'infinitamente piccolo, né delle quantità evanescenti, né dei limiti o delle flussioni, e ricondotto all'arte dell'analisi algebrica delle quantità finite" (riportato in: Kline, 1991, I, p. 502).

Lagrange considerava la teoria delle funzioni come una parte dell'algebra e basava ogni proprio procedimento sulla possibilità di sviluppare una funzione qualsiasi in serie di potenze, ovvero scrivendola nella forma:

$$f(x+h) = f(x)+\alpha_1\cdot h+\alpha_2\cdot h^2+\alpha_3\cdot h^3+\alpha_4\cdot h^4+\ldots$$

([3]) Citiamo ancora A. Weil, che riporta un giudizio di Alexis Claude Clairaut su Lagrange: "Clairaut lo descrisse così a Daniel Bernoulli: «Un giovane eccezionale per il suo talento non meno che per la sua modestia; il suo carattere è dolce e malinconico; non conosce altri piaceri oltre allo studio»" (Weil, 1993, p. 290). Lo stesso Weil sottolinea però: "Modesto e insicuro fino all'eccesso, Lagrange appare, sotto molti punti di vista, il completo opposto di Eulero, il cui esuberante entusiasmo, tanto per le proprie scoperte quanto per quelle dei suoi contemporanei, non conobbe mai limite alcuno. Egli invece, come una volta scrisse a Laplace con schietta sincerità, «traeva molto più piacere dai lavori altrui che dai propri, dei quali si sentiva sempre insoddisfatto»"(Weil, 1993, p. 292).

([4]) L'opera matematica di Lagrange è dunque vasta e ricca: un'edizione completa dei suoi lavori matematici, pubblicata a Parigi tra il 1867 ed il 1892, consta di quattordici ponderosi volumi.

([5]) Nel Settecento vennero elaborati tentativi di rendere rigoroso il calcolo infinitesimale (tra i quali: Torelli, 1758): Geymonat, 1947 e 1970; Bourbaki, 1963; Boyer, 1969; Frajese, 1969; Giusti, 1983; Arrigo & D'Amore, 1992; Edwards, 1994.

(essendo i coefficienti dello sviluppo α_1, α_2, α_3, α_4, ... dipendenti da x, ma indipendenti dall'incremento h). L'implicita ipotesi ora ricordata era purtroppo un elemento decisivo, in termini negativi, per l'intera proposta di Lagrange: infatti sappiamo oggi che la possibilità di scrivere un tale sviluppo in serie deve sottostare a condizioni precise e tutt'altro che banali, come l'esistenza delle derivate.

Inoltre in Lagrange, come nei suoi predecessori, non troviamo lo studio della convergenza delle serie impiegate (6). Dunque l'interpretazione dei fondamenti del Calcolo proposta da Lagrange appare oggettivamente lacunosa; ma sarebbe storicamente scorretto considerare la *Théorie des fonctions analytiques* solo come un tentativo fallito.

In effetti, Lagrange riteneva di essere riuscito ad eludere il ricorso al concetto di limite, pur accettando che il calcolo infinitesimale potesse essere fondato sulla teoria dei limiti; egli tentò di separare definitivamente i fondamenti dell'analisi matematica dalle applicazioni geometriche e dalla meccanica (seguendo, ma solo in parte, Euler: la seconda e definitiva edizione delle euleriane *Institutiones calculi differentialis* fu pubblicata, postuma, dieci anni prima del lavoro di Lagrange: Euler, 1787).

È evidente che tale separazione non agevola un approccio intuitivo ai concetti infinitesimali (ad esempio al differenziale, alla derivata, all'integrale); ma il ruolo storico dell'impostazione lagrangiana fu effettivamente notevole: ad esempio "chiarì che, dal punto di vista logico, l'analisi deve contare sulle sue sole forze" (Kline, 1991, I, p. 504) (7).

---

(6) Nella matematica del Settecento si manifestarono molte difficoltà e incertezze rispetto ad una moderna e corretta gestione delle serie numeriche. Rileva ad esempio D.J. Struik, riferendosi ad Euler: "Non possiamo seguire Euler quando scrive che $1-3+5-7+... = 0$, o quando dal fatto che $n+n^2+... = n/(1-n)$ e che $1+n^{-1}+n^{-2}+... = n/(n-1)$ egli conclude che $...+n^{-2}+n^{-1}+1+n+n^2+... = 0$. Certo bisogna stare attenti a non criticare troppo frettolosamente Euler per il suo modo di manipolare serie divergenti [...] A molti dei risultati del suo lavoro apparentemente indiscriminato sulle serie è stato dato un senso assolutamente rigoroso da parte dei matematici moderni" (Struik, 1981, pp. 160-161). A proposito dell'impiego a volte non del tutto corretto delle serie nel Settecento si veda inoltre: Bagni, 1997.

(7) G. Loria ricorda la figura di "un oppositore di Lagrange": Jozef Maria Wronski - Hoene (1778-1853): "La sua *Réfutation de la Théorie des fonctions analytiques* consta di due parti, una critica, l'altra ricostruttiva. Nella prima sono segnalati i punti deboli ed oscuri del ragionamento con il quale Lagrange si sforzò invano di dimostrare l'applicabilità delle serie di Taylor a qualunque funzione: il lettore il quale conosce le restrizioni che la scienza moderna ha imposte a quella conclusione riconoscerà che il Wronski diede prova, non solo di ammirabile coraggio nel prendere posizione contro un'autorità allora indiscussa, ma anche di acume quasi profetico. Nella seconda parte del suo lavoro l'autore sostenne essere antiscientifico ogni tentativo per bandire dall'analisi matematica il concetto di infinito" (Loria, 1929 -1933, p. 761).

U. Bottazzini ricorda inoltre l'importanza del lavoro di Lagrange, anche in termini critici, nello sviluppo dello studio sulle basi dell'analisi; in particolare, ricorda l'influenza che tale opera ebbe su Augustin Louis Cauchy (1789-1857), uno dei primi sistematori, in senso moderno, del concetto di limite:

"La *Théorie des fonctions analytiques* era stata una delle opere più studiate dal giovane Cauchy. Se egli ora concordava con Lagrange sulla necessità di fondare in modo rigoroso l'analisi senza limitarsi a giustificarne i metodi col successo nelle applicazioni o il ricorso all'evidenza empirica dei concetti in gioco, ne prendeva tuttavia le distanze quando si trattava di individuarne i fondamenti: gli argomenti di natura algebrica erano liquidati come «delle induzioni adatte a far talvolta presentire la verità, ma che poco s'accordano con l'esattezza tanto vantata delle scienze matematiche»" (Bottazzini, 1990) ([8]).

La *Metafisica del calcolo* di Carnot

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (padre di Sadi Carnot, al quale è legata la denominazione del classico ciclo termodinamico), pubblicò a Parigi nel 1801 *De la correlation des Figures en Geometrie* e nel 1803 la *Geometrie de position* ([9]); il suo pensiero geometrico era caratterizzato dalla tendenza alla generalizzazione di risultati e di concetti, e da questo punto di vista, quindi, egli è da considerare un matematico di impostazione decisamente moderna ([10]).

([8]) Scrive M. Kline: "L'analisi rigorosa incomincia con l'opera di Bolzano, Cauchy, Abel e Dirichlet e fu poi proseguita da Weierstrass [...] In realtà il rigore conseguito da Cauchy [...] è insufficiente, rispetto agli standard moderni. Egli si serve di frasi come "si avvicina indefinitamente", "piccolo quanto si vuole", "gli ultimi rapporti degli incrementi infinitamente piccoli" e "una variabile si avvicina al suo limite". Tuttavia, se si paragonano la *Théorie des fonctions analytiques* (1797, 1813) e le *Leçons sur le calcul des fonctions* (1801, 1806) di Lagrange nonché l'influente *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* di Lacroix (3 voll., 1797-1800, 1810-1819) con il *Cours d'Analyse algébrique* di Cauchy ci s'incomincia a rendere conto di quanto grande sia la differenza fra la matematica del Settecento e quella dell'Ottocento. Lagrange, in particolare, era puramente formale e operava soltanto con espressioni simboliche, mentre mancavano del tutto i concetti base di limite e di continuità" (Kline, 1991, II).

([9]) Questo titolo è ripreso da Leibniz, ma è qui impiegato con diverso significato).

([10]) Osserviamo che in Carnot troviamo l'impiego sistematico dei numeri complessi, che sarà fecondo, vent'anni dopo, in Poncelet. Non possiamo però dimenticare che Carnot si proclamava contrario all'uso dei numeri negativi, ritenendo che comportassero assurdità. Il geometra francese non era certo l'unico a sostenere simili posizioni (scrive M. Kline: "È certo che i numeri negativi non furono veramente ben capiti fino ai tempi moderni. Euler, nella seconda metà del Settecento, credeva ancora che i numeri negativi fossero maggiori di ∞ [...] Ancora nel 1831 De Morgan insiste sul fatto che è assurdo prendere in considerazione numeri minori di zero": Kline, 1991, I, p. 691).

Carnot si occupò dei fondamenti del Calcolo e nel 1797 pubblicò *Réflexions sur la métaphisique du calcul infinitésimal*; l'opera, senz'altro importante (sebbene inferiore all'analogo lavoro lagrangiano), mirava ad una rivalutazione dell'antico metodo di esaustione; dunque, "dopo molto riflettere Carnot, come Berkeley, finì col concludere che gli errori nei ragionamenti usati di solito nel calcolo infinitesimale si compensano l'uno con l'altro" (Kline, 1991, I, p. 504).

Possiamo quindi concludere che l'opera di Carnot analista non raggiunge il livello della modernità dei citati lavori di Carnot geometra; tuttavia le *Réflexions sur la métaphisique du calcul infinitésimal* sono un'opera importante e significativa, relativamente al periodo in cui vengono pubblicate.

La *Geometria del compasso* di Mascheroni

Per introdurre l'opera di Lorenzo Mascheroni è necessario presentare brevemente la metodologia di costruzione geometrica della matematica greca classica. Importante è infatti sottolineare che tutti i problemi di costruzione, presso i Greci, avrebbero dovuto essere risolti facendo uso soltanto di una riga (senza riferimenti, graduazioni, suddivisioni...) e di un compasso. Ciò significa che la risoluzione di un problema avrebbe dovuto essere ricondotta ad una successione finita di operazioni scelte tra le seguenti (Carruccio, 1972, p. 87):

- dati due punti, costruire la retta passante per essi;
- dato un punto ed un segmento, trovare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
- date due rette, trovarne (se esiste) il punto comune;
- date una retta ed una circonferenza, trovarne (se esistono) i punti comuni;
- date due circonferenze, trovarne (se esistono) i punti comuni.

Durante i secoli molti sforzi furono fatti per approfondire e per ampliare l'antico concetto greco di costruibilità ([11]). Georg Mohr (1649-1697), ad esempio, nel trattato *Euclides Danicus* (1672), giunse a dimostrare che le costruzioni effettuabili con riga e compasso possono anche essere effettuate impiegando soltanto il compasso ([12]).

([11]) Sembra che la distinzione di questa particolare procedura risalga originariamente a Platone: essa tuttavia apparirà citata esplicitamente soltanto negli scritti di Apollonio di Perga (Kline, 1991, I, pp. 48-49).

([12]) Ma l'opera di Mohr non fu apprezzata alla fine del Seicento. Osserva C.B. Boyer: "I matematici del tempo prestarono così scarsa attenzione a questa stupefacente scoperta, che la geometria basata sull'uso del solo compasso senza la riga non porta il nome di Mohr, ma quello di Mascheroni, che riscoperse il principio 125 anni più tardi. Il libro di Mohr era sparito dalla circolazione e solo nel 1928, quando ne fu trovata per caso una copia da un matematico che si stava aggirando per una libreria di Copenhagen, si seppe che Mascheroni aveva avuto un precursore nella dimostrazione dell'uso superfluo della riga" (Boyer, 1982, p. 426).

A tale proposito è indispensabile osservare che evitando di utilizzare la riga risulta impossibile tracciare la retta passante per due punti ("dati due punti, però, si possono costruire i punti d'intersezione della retta che li congiunge e di un cerchio e, date due coppie di punti, si può costruire il punto d'intersezione delle rette determinate dalle due coppie": Kline, 1991, I, p. 275).

Il contenuto essenziale delle ricerche di Mohr, ovvero l'eseguibilità delle costruzioni euclidee con l'impiego del solo compasso, fu riscoperto da Lorenzo Mascheroni, autore della *Geometria del compasso*.

Se Mascheroni, in termini del tutto autonomi, riprese il lavoro di Mohr, va sottolineato che l'opera del matematico italiano (pubblicata esattamente un secolo dopo la morte di Mohr) ebbe una sorte nettamente più fortunata di quella dello studioso danese e si inserì organicamente nel corso delle ricerche matematiche tra il XVIII ed il XIX secolo. Riportiamo ad esempio un'annotazione di C.B. Boyer:

"Nel 1822 Poncelet, traendo ispirazione dalle ricerche di Mascheroni, aveva suggerito l'ipotesi che tutte le costruzioni della geometria piana euclidea potessero venire effettuate con una riga se oltre ad essa si tracciava nel piano soltanto una circonferenza e se ne fissava il centro. Questo teorema, che [...] fu dimostrato da Steiner, mostra che nella geometria euclidea è impossibile fare completamente a meno del compasso, ma che, dopo averlo usato per tracciare una sola circonferenza, si può metterlo da parte e continuare ad usare soltanto la riga; similmente a quanto aveva fatto Mascheroni, usando soltanto compassi" (Boyer, 1982, p. 608).

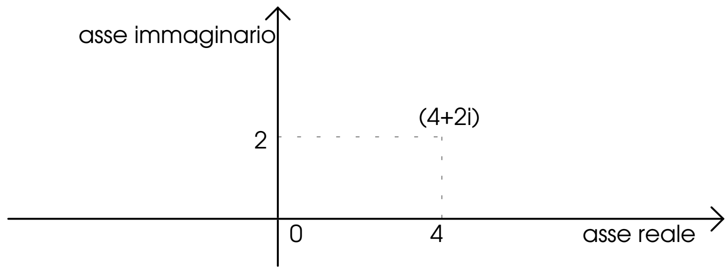
La *Rappresentazione analitica della direzione* di Wessel

Il norvegese Caspar Wessel pubblicò nel 1797 il saggio *Om directionens analytiske Betegning* (*Sulla rappresentazione analitica della direzione*). In esso si trova la fondamentale rappresentazione di un numero complesso nel piano che sarà detto *piano di Gauss* (al matematico tedesco sarà infatti ricondotta tale rappresentazione: fu con gli studi di Gauss, pubblicati trent'anni dopo il lavoro di Wessel, che tale metodo ebbe larga diffusione).

Ad esempio, il numero complesso:

$$z = 4+2i$$

viene rappresentato nel piano di Gauss, secondo l'indicazione di Wessel, nel modo seguente:



Il metodo di rappresentazione ora citato ebbe una rilevante importanza storica, anche dal punto di vista didattico: dato che "gli uomini credono a ciò che vedono [...] le vecchie teorie sulla non-esistenza dei numeri immaginari furono abbandonate dalla maggior parte dei matematici" (Boyer, 1982, p. 579).

Conclusione: la matematica europea dopo il 1797

La fine del Settecento è, per la matematica, un periodo di transizione: alcune delle opere sopra presentate riflettono l'impostazione dell'analisi ancora fondazionalmente incerta elaborata nel secolo che sta per chiudersi (Lagrange e Carnot); altre sono rivolte, con caratteristiche di indubbia originalità, a problemi classici della storia della matematica (Mascheroni); in altre si introducono concetti e metodi di rappresentazione innovativi, che apriranno la strada a sviluppi di rilevante importanza (Wessel).

Nel XVIII secolo i progressi tecnici della matematica in generale, e dell'analisi in particolare, resero possibile la trattazione esatta di moltissimi problemi (ad esempio fisici) anche assai delicati, che la scienza dei secoli precedenti aveva dovuto limitarsi a descrivere qualitativamente (D'Amore & Matteuzzi, 1975; Kline, 1991, II; Edwards, 1994; Bagni, 1996, II). Tale tendenza all'applicazione finì per contraddistinguere molti settori della matematica nella seconda metà del Settecento, ed in alcuni casi fu forse un limite allo sviluppo della speculazione astratta ed alla riflessione sui fondamenti della disciplina.

Scrive J. Dieudonné, commentando l'orientamento che caratterizzò il pensiero e le opere di molti matematici settecenteschi:

"La meccanica newtoniana e i suoi splendidi successi in astronomia, in particolare la previsione, fatta da A.C. Clairaut, del ritorno della cometa di Halley con un errore inferiore a un mese, avevano notevolmente impressionato tutti gli ambienti intellettuali europei, perfino quelli di letterati come Voltaire, che non capiva assolutamente nulla di matematica (Voltaire scrive da qualche parte di non avere mai capito perché il seno di un angolo non è proporzionale all'angolo). Per quel che riguarda i matematici del XVIII secolo, come A.C. Clairaut, J. d'Alembert e P.S. Laplace, queste applicazioni significative, cui seguirono molte altre, li indussero a credere che lo scopo essenziale della ricerca matematica fosse quello di fornire modelli alla matematica e alla fisica; ogni altro settore della matematica che non soddisfacesse queste condizioni veniva giudicato futile e trascurabile. Quando Eulero comunica a Clairaut i suoi risultati in teoria dei numeri, a cui dice di avere lavorato per quattordici anni, Clairaut si limita a rispondere: «Questa materia deve essere di notevole difficoltà» e passa subito all'argomento che gli interessa, il calcolo delle perturbazioni planetarie" (Dieudonné, 1989, p. 24).

Dunque alla fine del XVIII secolo la matematica raggiunse, con Euler, con d'Alembert, con Lagrange, livelli tecnicamente elevatissimi; nuove branche erano nate e si erano rapidamente sviluppate (Bourbaki, 1963; Struik, 1981; Bottazzini, 1981 e 1990; Anglin, 1994); nonostante alcuni studiosi si sentissero intimoriti dalle crescenti difficoltà tecniche ([13]), la matematica non perse la propria vitalità e seppe superare, nel secolo successivo, ogni rischio di stallo o di involuzione: nel 1797, Eulero e d'Alembert erano morti da 14 anni; i trevigiani Riccati, Jacopo e i suoi figli Vincenzo e Giordano, erano morti rispettivamente da 43, da 22 e da 7 anni. Ma, ad esempio, nel 1797 Gauss aveva vent'anni, Poncelet ne aveva nove, Cauchy otto e Lobacewskij quattro. Questi saranno tra i grandi protagonisti della matematica dell'Ottocento: i loro studi e le loro coraggiose intuizioni consentiranno il definitivo rilancio della disciplina, verso orizzonti (più di carattere culturale che di natura esclusivamente tecnica) di inimmaginabile ampiezza, verso la rigorosa rivisitazione del fondamenti della matematica.

([13]) Kline ricorda le pessimistiche parole di Jean-Baptiste Delambre (1749-1822), segretario permanente della sezione di matematica e di fisica dell'Institut de France: "Sarebbe difficile e temerario analizzare le possibilità che il futuro offre all'avanzamento della matematica; in quasi tutte le sue branche si è bloccati da difficoltà insormontabili; il perfezionamento dei dettagli sembra essere l'unica cosa che rimane da fare. Tutte queste difficoltà sembrano annunciare che il potere della nostra analisi si è praticamente esaurito" (Kline, 1991, I, p. 727). Per una ricerca bibliografica segnaliamo: Smith, 1959; Barbieri & Pepe, 1992; Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992.

Note bibliografiche

Anglin, W.S. (1994), *Mathematics. A Concise History and Philosophy*, Springer Verlag, Berlin.

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1997), Le serie numeriche e Jacopo Riccati: *Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso*, anno acc. 1995-1996, Treviso, in via di pubblicazione.

Barbieri, F. & Pepe, L. (a cura di) (1992), Bibliografia italiana di storia delle matematiche 1961-1990, *Bollettino di storia delle matematiche*, XII, 1.

Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano.

Boyer, C. (1969), The History of the Calculus: Hallerberg et. al., *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, Nat. Counc. of Teach. of Math., Washington.

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

Burzio, F. (1942), *Lagrange*, UTET, Torino.

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.

Dieudonné, E. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano.

Edwards, C.H. Jr. (1994), *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, Berlin (terza edizione; prima edizione: 1979).

Enriques, F. (1938) *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: 1982 Zanichelli, Bologna).

Euler, L. (1787) *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum*, I-II, Galeati, Pavia (seconda edizione; prima edizione: 1755).

Frajese, A. (1969), *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, Firenze.

Geymonat, L. (1947), *Storia e filosofia dell'Analisi infinitesimale*, Levrotto e Bella, Torino.

Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.

Giusti, E. (1983) *Analisi matematica*, I, Boringhieri, Torino.

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino (prima edizione inglese: 1972).

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (ristampa anastatica: 1982, Cisalpino-Goliardica, Milano).

Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, New York (prima edizione: 1929, McGraw-Hill).

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna.

Torelli, G. (1758), *De nihilo geometrico libri II*, Carattoni, Verona.

Weil, M. (1993), *Teoria dei numeri. Storia e matematica da Hammurabi a Legendre*, Einaudi, Torino.