
Calcolo e Biostatistica, esercizi - Elementi di Probabilità

(G.T. Bagni)

1. Esercizio risolto

I possibili valori assunti da una variabile casuale X sono $0 \leq x \leq 14 \wedge x \in \mathbf{N}$ con probabilità:

$$P(h) = \frac{1}{15}$$

Dire di che distribuzione si tratta e determinare media e varianza.

Risoluzione

La distribuzione di probabilità è uniforme con $n = 14$:

$$\bullet \quad \text{Media:} \quad \frac{n}{2} = 7 \quad \bullet \quad \text{Varianza:} \quad \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6} = 18,666\dots$$

Esercizi proposti

2. I possibili valori assunti da una variabile casuale X sono $0 \leq x \leq 1000 \wedge x \in \mathbf{N}$ con probabilità:

$$P(h) = \frac{1}{1001}$$

Dire di che distribuzione si tratta e determinare media e varianza.

[La distribuzione di probabilità è uniforme con $n = 1000$;
media = 500; varianza = 23500...]

3. I possibili valori assunti da una variabile casuale X sono $0 \leq x \leq 25 \wedge x \in \mathbf{N}$ e la distribuzione è uniforme; scrivere le probabilità e determinare media e varianza.

$$[P(h) = \frac{1}{26}; \text{ media} = 12,5; \text{ varianza} = 56,25]$$

4. Esercizio risolto

I possibili valori assunti da una variabile casuale X sono $0 \leq x \leq 5 \wedge x \in \mathbf{N}$ con probabilità:

$$\begin{aligned} P(0) &= 1 \cdot (0,7)^0 (1-0,7)^{5-0} & P(1) &= 5 \cdot (0,7)^1 (1-0,7)^{5-1} \\ P(2) &= 10 \cdot (0,7)^2 (1-0,7)^{5-2} & \dots & P(h) = \binom{5}{h} (0,7)^h (1-0,7)^{5-h} \end{aligned}$$

Dire di che distribuzione si tratta e determinare media e varianza.

Risoluzione

La distribuzione di probabilità della X è binomiale con $n = 5$ e $p = 0,7$:

- Media: $np = 5 \cdot 0,7 = 3,5$
- Varianza: $np(1-p) = 5 \cdot 0,7 \cdot (1-0,7) = 1,05$

5. Esercizio risolto

Le probabilità che un evento di probabilità $p = 0,2$ si verifichi un certo numero di volte in $n = 3$ prove indipendenti sono descritte da una variabile casuale X che assume valori:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$$

Determinare le probabilità, la media e la varianza.

Risoluzione

La distribuzione di probabilità della X è binomiale con $p = 0,2$:

- Probabilità: $P(h) = \binom{3}{h} (0,2)^h (1-0,2)^{3-h}$
- Media: $np = 3 \cdot 0,2 = 0,6$
- Varianza: $np(1-p) = 3 \cdot 0,2 \cdot (1-0,2) = 0,48$

Esercizi proposti

6. Le probabilità che un evento di probabilità $p = 0,6$ si verifichi un certo numero di volte in $n = 3$ prove indipendenti sono descritte da una variabile casuale; determinare le probabilità, la media e la varianza.

[media = 1,8; ...]

7. Le probabilità che un evento di probabilità $p = 0,4$ si verifichi un certo numero di volte in $n = 5$ prove indipendenti sono descritte da una variabile casuale; determinare le probabilità, la media e la varianza. Cambia la media se poniamo $p = 0,5$ e $n = 4$? E la varianza?

[media = 2 (in entrambi i casi); ...]

8. Le probabilità che un evento di probabilità $p = 0,2$ si verifichi un certo numero di volte in $n = 10$ prove indipendenti sono descritte da una variabile casuale; determinare le probabilità, la media e la varianza.

[La distribuzione di probabilità è binomiale con $p = 0,2$; media = 2; ...]

9. I possibili valori assunti da una variabile casuale X sono $0 \leq x \leq 5 \wedge x \in \mathbf{N}$ con probabilità:

$$P(h) = \binom{10}{h} (0,15)^h (1-0,15)^{10-h}$$

Dire di che distribuzione si tratta e determinare media e varianza.

[...]

Calcolo e Biostatistica, esercizi riassuntivi - Elementi di Probabilità

(G.T. Bagni)

1. I valori assunti da una variabile casuale X sono $0 \leq x \leq 14 \wedge x \in \mathbf{N}$ con probabilità:

$$P(h) = \frac{1}{15}$$

Dire di che distribuzione si tratta e determinare media e varianza.

2. I possibili valori assunti da una variabile casuale X sono $0 \leq x \leq 25 \wedge x \in \mathbf{N}$ e la distribuzione è uniforme; scrivere le probabilità e determinare media e varianza.

3. I valori assunti da una variabile casuale X sono $0 \leq x \leq 5 \wedge x \in \mathbf{N}$ con probabilità:

$$P(0) = 1 \cdot (0,7)^0 (1-0,7)^{5-0}$$

$$P(1) = 5 \cdot (0,7)^1 (1-0,7)^{5-1}$$

$$P(2) = 10 \cdot (0,7)^2 (1-0,7)^{5-2}$$

...

$$P(h) = \binom{5}{h} (0,7)^h (1-0,7)^{5-h}$$

Dire di che distribuzione si tratta e determinare media e varianza.

4. Le probabilità che un evento di probabilità $p = 0,2$ si verifichi un certo numero di volte in $n = 3$ prove indipendenti sono descritte da una variabile casuale X con valori:

$$x_0 = 0 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$$

Determinare le probabilità, la media e la varianza.

5. Un dado viene lanciato 7 volte. Un lancio viene detto “un successo” se presenta un 5 o un 6. Calcolare la probabilità di: (i) ottenere esattamente tre successi; (ii) non ottenere alcun successo; (iii) ottenere almeno un successo.
6. I punteggi relativi ad un test sono distribuiti normalmente con valor medio 76 e scarto quadratico medio 15. Il 15% superiore dei partecipanti è classificato “eccellente” ed il 10% inferiore “non idoneo”. Calcolare: (i) il punteggio minimo per essere classificato “eccellente”; (ii) il punteggio minimo per essere classificato idoneo (cioè per non essere incluso tra i “non idonei”).
7. Si lanci 12 volte una moneta. Applicando la distribuzione binomiale, determinare la probabilità che il numero X di Teste ottenute sia compreso tra 4 e 7 (inclusi). Quindi ripetere tale calcolo supponendo continui i dati e determinando con riferimento alla distribuzione normale la probabilità che X sia compresa tra 3.5 e 7.5.
8. Un comune dado viene lanciato 720 volte. Determinare la probabilità che il numero 6 si presenti fra 100 e 125 volte (comprese). Si consiglia di utilizzare l'approssimazione normale della distribuzione binomiale, come fatto nel precedente esercizio.

Calcolo e Biostatistica - Soluzioni degli esercizi riassuntivi

(G.T. Bagni)

1. *Risoluzione.* La distribuzione di probabilità è uniforme con $n = 14$.

$$\text{Media: } \frac{n}{2} = 7. \text{ Varianza: } \frac{n^2}{12} + \frac{n}{6} = 18,666\dots$$

2. *Risoluzione.* $P(h) = \frac{1}{26}$; media = 12,5; varianza = 56,25.

3. *Risoluzione.* La distribuzione di probabilità della X è binomiale con $n = 5$ e $p = 0,7$:

$$\text{Media: } np = 5 \cdot 0,7 = 3,5.$$

$$\text{Varianza: } np(1-p) = 5 \cdot 0,7 \cdot (1-0,7) = 1,05.$$

4. *Risoluzione.* La distribuzione di probabilità della X è binomiale con $p = 0,4$:

$$\text{Probabilità: } P(h) = \binom{3}{h} (0,2)^h (1-0,2)^{3-h}$$

$$\text{Media: } np = 3 \cdot 0,2 = 0,6$$

$$\text{Varianza: } np(1-p) = 3 \cdot 0,2 \cdot (1-0,2) = 0,48$$

5. *Risoluzione.* In questo caso: $n = 7$, $p = P(\{5,6\}) = 1/3$; $q = 1-p = 2/3$.

$$(i) \quad b(3, 7, 1/3) = \binom{7}{3} (1/3)^3 (2/3)^4 = 560/2187.$$

$$(ii) \quad q^7 = (2/3)^7 = 128/2187.$$

$$(iii) \quad 1-q^7 = 1-(2/3)^7 = 2059/2187.$$

6. *Risoluzione.* I punteggi richiesti sono rispettivamente 92 e 57.

7. *Risoluzione.* Con la distribuzione binomiale:

$$\begin{aligned} P &= P(4 \text{ teste}) + P(5 \text{ teste}) + P(6 \text{ teste}) + P(7 \text{ teste}) = \\ &= \binom{12}{4} (1/2)^4 (1/2)^8 + \binom{12}{5} (1/2)^5 (1/2)^7 + \binom{12}{6} (1/2)^6 (1/2)^6 + \binom{12}{7} (1/2)^7 (1/2)^5 = 0.7332 \end{aligned}$$

Approssimando con la distribuzione normale, $\mu = 6$, $\sigma = 1.73$:

$$3.5 \text{ in unità standard} = -1.45$$

$$3.5 \text{ in unità standard} = 0.87$$

$$P = 0.4265 + 0.3078 = 0.7343.$$

8. *Risoluzione.* La probabilità richiesta è: 0.6886.