Studio di una funzione –Esempio

(a cura di G.T. Bagni)

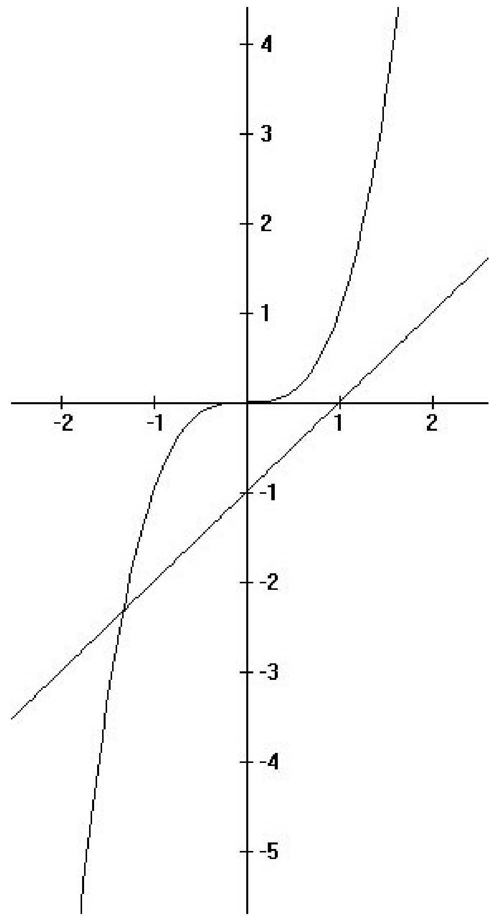
Studiamo la funzione $x \to f(x)$ espressa da: $\boldsymbol{y = x^3 - x + 1}$

1) D = **R**.

2) La funzione assegnata non è pari né dispari e non è una funzione periodica.

3)
$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 - x + 1 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^3 - x + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$



Impostiamo graficamente la risoluzione di questo sistema di equazioni (ovvero di $x^3-x+1 = 0$):

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Utilizzando i grafici di $y = x+1$ e di $y = x^3$ concludiamo che l'equazione $x^3-x+1 = 0$ ha una ed una sola soluzione, che indicheremo con $x = \alpha$, essendo α un (opportuno) reale compreso tra -2 e -1.

4) $f(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad x^3-x+1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > \alpha$

in cui abbiamo utilizzato nuovamente i due grafici sopra citati.

Risulta dunque:

$$f(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad x^3-x+6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x < \alpha$$

5) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3 - x + 1\right) = -\infty$ e: $\lim_{x\to+\infty}\left(x^3 - x + 1\right) = +\infty$

Il grafico di $y = x^3-x+1$ non è dotato di asintoti verticali né orizzontali. Essendo:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3 - x + 1}{x} = -\infty \qquad \text{e:} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3 - x + 1}{x} = +\infty$$

il grafico di $y = x^3-x+1$ non è dotato di asintoti obliqui.

La funzione data è continua in tutto il proprio dominio **R**.

6) $f'(x) = 3x^2-1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{3} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$

$x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$x > \frac{\sqrt{3}}{3}$
$f'(x) > 0$ crescente	$f'(x) = 0$ punto di MASSIMO relativo	$f'(x) < 0$ decrescente	$f'(x) = 0$ punto di MINIMO relativo	$f'(x) > 0$ crescente

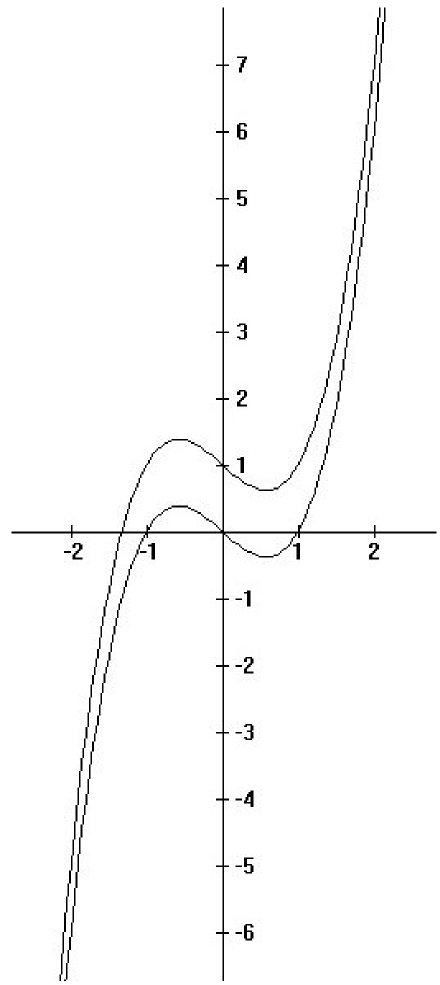
Essendo:

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

abbiamo:

- punto di massimo relativo: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ 1+\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$
- punto di minimo relativo: $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ 1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$.



7) $f''(x) = 6x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$.

Risulta:

$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x) < 0$ concava	$f''(x) = 0$ punto di FLESSO	$f''(x) > 0$ convessa

Essendo: $f(0) = 1$ il punto di flesso è: (0; 1) con tangente inflessionale di equazione: $y = -x+1$.

8) Il grafico di $y = x^3-x+1$ si traccia tenendo conto delle informazioni sopra ottenute.

L'impiego di metodi grafici nei punti (3) e (4) possono essere evitati procedendo diversamente: possiamo ottenere il grafico di $y = x^3-x+1$ per traslazione verticale dal grafico di $y = x^3-x$ (passante per l'origine degli assi cartesiani).