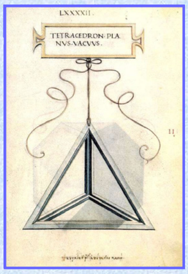
Pordenone

Corso di Matematica e Statistica – 4
Calcolo combinatorio e probabilità

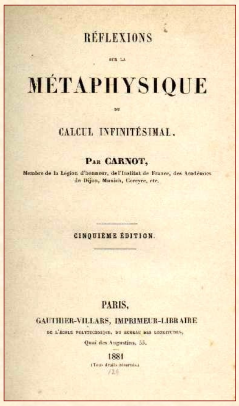


Giorgio T. Bagni

Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

- **Il calcolo combinatorio**: in quanti modi…?
- **Il triangolo di Tartaglia**: le potenze del binomio
- **Concetto di probabilità**: i diversi approcci
- **Alcune misconcezioni**: sbagliare è facile
- **Il paradosso di Simpson**: sbagliare è proprio facile!


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
1881

Le disposizioni semplici di n elementi di classe k

- Consideriamo un insieme costituito da n elementi; dato un naturale $k \leq n$, si vogliano studiare i possibili raggruppamenti ottenuti scegliendo k degli n elementi dati e allineandoli secondo un qualche ordine.
- In questo primo caso, considereremo distinti due raggruppamenti quando essi differiscano per almeno uno dei componenti, oppure, pur essendo costituiti dagli stessi elementi, differiscano per l'ordine secondo il quale tali elementi sono allineati.
- I raggruppamenti così introdotti saranno denominati **disposizioni semplici** (di n elementi di classe k).

Le disposizioni semplici di n elementi di classe k

- Il numero $D_{n,k}$ delle **disposizioni semplici** di n elementi di classe k (ovvero: presi k a k), con $k \leq n$, è:

  $D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$
- Ad esempio, quante partite si disputano in un torneo con 18 squadre (in modo che i due incontri A-B e B-A siano distinti, essendo da giocare in due stadi diversi)?
- Si deve calcolare il numero delle disposizioni semplici di 18 elementi (le squadre) di classe 2.
- Il richiesto numero di incontri è:

  $D_{18,2} = 18 \cdot 17 = 306$

Disposizioni con ripetizione

- Se gli oggetti non sono tutti distinti (cioè se uno stesso oggetto può apparire più volte nel gruppo) si considerano le **disposizioni con ripetizione.**
- Ad esempio, le disposizioni con ripetizione di classe 3 dei due oggetti 0, 1 sono le seguenti otto:

  000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111
- Le disposizioni con ripetizione di n oggetti di classe k sono:

  $D^{(r)}_{n,k} = n^k$

Le permutazioni semplici (quando conta… solo l'ordine)

- Dati n elementi, si dicono **permutazioni semplici** tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo tutti gli n elementi disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti quando differiscono per l'ordine secondo il quale essi sono allineati.
- Il numero P_n delle permutazioni semplici di n elementi è:

  $P_n = n!$ (si ricordi che: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$)
- Ad esempio: quattro persone possono occupare quattro posti (variando soltanto l'ordine) in 4! = 24 modi.

Permutazioni con ripetizione

- Se gli oggetti non sono tutti distinti (cioè se uno stesso oggetto può apparire più volte nel gruppo) si considerano le **permutazioni con ripetizione.**
- Se sono dati n oggetti, p dei quali uguali fra loro, q dei quali uguali fra loro, r dei quali uguali fra loro etc. (con $n = p+q+r$ etc.), il numero delle permutazioni con ripetizione è:
  $P_n^{(p,\,q,\,r\ldots)} = n!/(p!q!r!\ldots)$
- Ad esempio, le permutazioni di 0, 0, 1, 1, 1 sono:
  $P_5^{(2,\,3)} = 5!/(2!3!) = 120/(2\cdot 6) = 10$

Le combinazioni semplici (quando l'ordine non conta)

- Dati n elementi e $k<n$, si dicono **disposizioni semplici** di n elementi di classe k tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo k elementi tra gli n disponibili, in modo che due raggruppamenti siano distinti soltanto quando differiscono per **almeno uno dei componenti**.
- Il numero $C_{n,\,k}$ delle combinazioni semplici di n elementi di classe k (ovvero: presi k a k), con $k<n$, è:

$$C_{n,\,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

- Alternativamente si può scrivere: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Le combinazioni semplici (quando l'ordine non conta)

- Ad esempio, nove persone devono percorrere un tratto di strada: un taxi può trasportare solo quattro passeggeri (per una sola volta); gli altri cinque dovranno coprire il percorso a piedi. Quante possibilità diverse possono essere considerate?
- L'ordine con il quale i quattro passeggeri del taxi sono elencati è ininfluente: ciò che conta è solo la possibilità di viaggiare in auto oppure a piedi. Perciò si calcola il numero delle **combinazioni semplici di nove elementi di classe quattro:**
  $C_{9,\,4} = (9\cdot 8\cdot 7\cdot 6)/(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4) = 126$

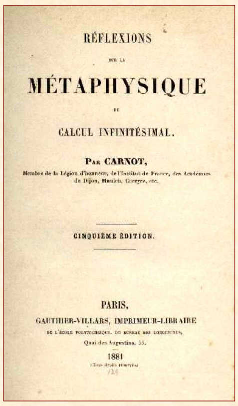
Combinazioni con ripetizione

- Se gli oggetti non sono tutti distinti (cioè se uno stesso oggetto può apparire più volte nel gruppo) si considerano le **combinazioni con ripetizione.**
- Il numero delle combinazioni con ripetizione di n oggetti di classe k (in questo caso k può essere maggiore di n) è uguale al numero delle combinazioni semplici di $n+k-1$ oggetti di classe k:

$$C_{n,k}^{(r)} = C_{n+k-1,\,k} = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

Sommario

- **Il calcolo combinatorio**: in quanti modi…?
- **Il triangolo di Tartaglia**: le potenze del binomio
- **Concetto di probabilità**: i diversi approcci
- **Alcune misconcezioni**: sbagliare è facile
- **Il paradosso di Simpson**: sbagliare è proprio facile!


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut de France, des Académies de Dijon, Munich, Corcyre, etc.
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.
1881
(Tous droits réservés.)

La formula del binomio di Newton

- Per ogni k numero naturale, è: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$
- Ad esempio:

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}a^{5-k}b^k =$$

$$= \binom{5}{0}\cdot a^5 + \binom{5}{1}\cdot a^4b + \binom{5}{2}\cdot a^3b^2 + \binom{5}{3}\cdot a^2b^3 + \binom{5}{4}\cdot ab^4 + \binom{5}{5}\cdot b^5 =$$

$$= 1\cdot a^5 + \frac{5}{1}\cdot a^4b + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot a^3b^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^2b^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot ab^4 +$$

$$+ \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Il binomio di Newton e il triangolo di Tartaglia

- I coefficienti del binomio si inquadrano nel **triangolo di Tartaglia:**

riga 0:				**1**			
riga 1:			**1**		**1**		
riga 2:		**1**		**2**		**1**	
riga 3:	**1**		**3**		**3**		**1**

etc.

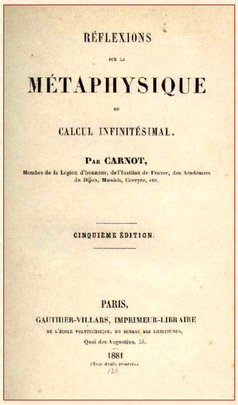
- La sua riga *n*-esima è: $\binom{n}{0}\ \binom{n}{1}\ \binom{n}{2}\ \ldots\ \binom{n}{n-1}\ \binom{n}{n}$

Proprietà dei coefficienti binomiali

- Valgono le proprietà:
- (la già vista "definizione alternativa") $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
- (simmetria della riga) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
- (regola di formazione) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$

Sommario

- **Il calcolo combinatorio**: in quanti modi…?
- **Il triangolo di Tartaglia**: le potenze del binomio
- **Concetto di probabilità**: i diversi approcci
- **Alcune misconcezioni**: sbagliare è facile
- **Il paradosso di Simpson**: sbagliare è proprio facile!


RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

CINQUIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1881

Una parola chiave: che cos'è la Probabilità?

- "Sono certo di poterlo spiegare, ma ciò richiederà qualche parola da parte mia e **un po' di pazienza da parte vostra**"

(Blaise Pascal, lettera a Pierre de Fermat, 24 agosto 1654)

Una definizione di Probabilità

Pierre Simon de **Laplace** (1749-1827):

Saggio filosofico sulla Probabilità (1814).

- "La Probabilità è il **rapporto del numero dei casi favorevoli e del numero di tutti i casi possibili**".
- "Bisogna però che tutti i casi considerati siano ugualmente possibili".

ATTENZIONE!
Può essere applicata a tutte le situazioni di incertezza? Parlare di casi "ugualmente possibili" (equiprobabili!) nasconde un circolo vizioso

Altre definizioni di Probabilità

- La definizione **"frequentista" di Von Mises** (1928):

  La probabilità di un evento ripetibile è il limite a cui tende la frequenza relativa con un numero elevato (infinito) di prove.

  Ma… tutti gli eventi sono ripetibili?

- La definizione **"soggettivista" di De Finetti** (1959):

  La probabilità si valuta mediante l'importo di una scommessa che un competitore "coerente" accetta di pagare.

  Ma… ci si basa sulla valutazione personale di un competitore "coerente"?

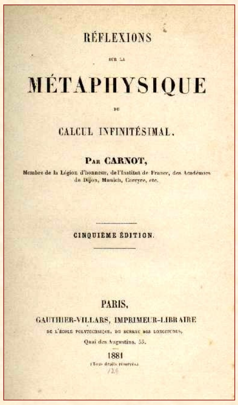
Infine: l’impostazione assiomatica di Kolmogorov

- Il matematico russo A. Kolmogorov (1903-1987) imposta la Probabilità per via assiomatica.
- In tale modo, la Probabilità viene introdotta come un concetto matematico astratto.

Probabilità
Alcune considerazioni di base

- La probabilità dell’**evento certo** è 1, dell’**evento impossibile** è 0. Se la probabilità che si verifichi A è P(A), la probabilità che A non si verifichi è 1–P(A).
- La probabilità P(A∨B) che almeno uno tra A, B si verifichi è non maggiore della somma delle probabilità P(A)+P(B); è uguale a tale somma se e solo se gli eventi in questione sono **incompatibili.**
- La probabilità P(A∧B) che A, B si verifichino contemporaneamente è pari al prodotto delle probabilità P(A) e P(B) se e solo se il verificarsi di B lascia immutata la probabilità che si verifichi A, cioè se essi sono **stocasticamente indipendenti.**

Sommario


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
1881

- **Il calcolo combinatorio**: in quanti modi…?
- **Il triangolo di Tartaglia**: le potenze del binomio
- **Concetto di probabilità**: i diversi approcci
- **Alcune misconcezioni**: sbagliare è facile
- **Il paradosso di Simpson**: sbagliare è proprio facile!

Due esercizietti facili facili

- (1) Il Signor Bianchi ha due bambini/e. Uno dei due è femmina. Che probabilità c’è che siano entrambi femmine?
- (2) Il Signor Rossi ha due bambini/e. Il maggiore è femmina. Che probabilità c’è che siano entrambi femmine?
- Questi due esercizi sono molto simili, **ma hanno la stessa risposta?**
- Pensiamoci qualche minuto…

Due esercizietti facili facili

- (1) Il Signor Bianchi ha due bambini/e. Uno dei due è femmina. Che probabilità c’è che siano entrambi femmine?
- **Casi possibili** (in ordine di età): **F-M, M-F, F-F**.
- **Un caso su tre**, quindi: probabilità **1/3**.
- (2) Il Signor Rossi ha due bambini/e. Il maggiore è femmina. Che probabilità c’è che siano entrambi femmine?
- **Casi possibili** (in ordine di età): **F-M, F-F**.
- **Un caso su due**, quindi: probabilità **1/2**.

Le risposte sono diverse!

Due esercizietti facili facili

- **Sia la storia…**

…che la pratica ci dicono che la probabilità può sorprendere!

- **E può essere causa di notevole imbarazzo…**

Testa o croce?
Un gioco semplicissimo…

- Abbiamo lanciato una moneta (non truccata) 9 volte e abbiamo ottenuto 9 "teste".
- Lanciamo ancora una volta la moneta: **avremo più probabilità di ottenere "testa" oppure "croce"?**

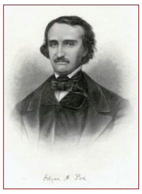
Testa o croce?
Un gioco semplicissimo…

- Il "passato" non ha alcuna importanza!
- La moneta non è dotata di memoria: le probabilità di ottenere "testa" o "croce" sono sempre le stesse, 50% e 50%.
- (… a meno che, come sopra accennato, non sia truccata!)

Eppure…
in molti ci sono cascati!

"Niente è più difficile che convincere il lettore comune che, se un giocatore lancia ai dadi un 6 per due volte consecutive,

ciò basterà per scommettere con un buon margine che al terzo colpo il 6 non uscirà.



Non è chiaro come i lanci già conclusi, e che ormai giacciono nel Passato, possano avere influenza su di un lancio che esiste solo nel Futuro…"

(E. A. Poe, *Racconti*, II, 547-548)

Una frequente (ingannevole) contestazione

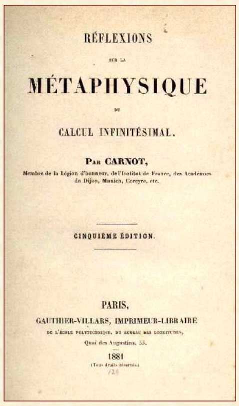
- Attenzione: "in tempi lunghi" la media delle "croci" dovrebbe tendere al 50%.
- Dunque un iniziale "eccesso di teste" finirà per essere compensato da alcune "croci".
- **Ma ogni ragionamento sui "tempi lunghi" si riferisce al limite all'infinito.**
- **Aggiungere ad una "infinità" di lanci un numero finito di "teste" (iniziali) è ininfluente!**
- E a proposito del passato…

Il lotto e i numeri "in ritardo"

- Non ha alcun senso esaminare gli esiti delle passate estrazioni sperando di individuare dei numeri "fortunati"!
- Infatti **ogni numero mantiene sempre la stessa probabilità di essere estratto** (ad esempio: 1/90).

Sommario

- **Il calcolo combinatorio**: in quanti modi…?
- **Il triangolo di Tartaglia**: le potenze del binomio
- **Concetto di probabilità**: i diversi approcci
- **Alcune misconcezioni**: sbagliare è facile
- **Il paradosso di Simpson**: sbagliare è proprio facile!



RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut de France, des Académies de Dijon, Munich, Corcyre, etc.

CINQUIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

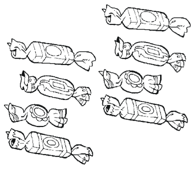
Quai des Augustins, 55.

1881

(Tous droits réservés.)

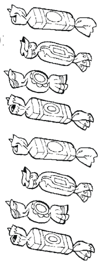
Del resto non è impossibile “barare”… Il paradosso di Simpson

- Pierino ama le caramelle di liquirizia (e detesta quelle di menta).
- Egli dovrà **estrarre a caso una caramella** da alcune urne nelle quali si trovano alcune caramelle di liquirizia e di menta.
- Naturalmente cercherà di scegliere dalle urne più… convenienti, **nella speranza di estrarre una caramella di liquirizia!**



Del resto non è impossibile “barare”… Il paradosso di Simpson

- **Stanza 1**
- *Urna bianca* (110): 50 liquirizia 60 menta
- *Urna nera* (70): 30 liquirizia 40 menta

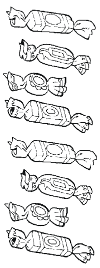


- **Stanza 2**
- *Urna bianca* (90): 60 liquirizia 30 menta
- *Urna nera* (140): 90 liquirizia 50 menta

Da quale urna scegliere?

Del resto non è impossibile “barare”… Il paradosso di Simpson

- **Stanza 1** Liq. urna bianca: 50/110 = 0,45…
- Liq. urna nera: 30/70 = 0,42…
- Dunque: è meglio scegliere **dall’urna bianca**



- **Stanza 2** Liq. urna bianca: 60/90 = 0,66…
- Liq. urna nera: 90/140 = 0,64…
- Dunque: è meglio scegliere **dall’urna bianca**

Da quale urna scegliere?

Del resto non è impossibile “barare”… Il paradosso di Simpson

- Travasiamo le urne bianche in una nuova grande urna bianca e quelle nere in una nuova grande urna nera.
- Da quale di queste due grandi urne sarà opportuno scegliere?
- Potremmo optare ancora per l’urna **bianca.**
- **Ma forse è meglio, per sicurezza, fare i conti…**

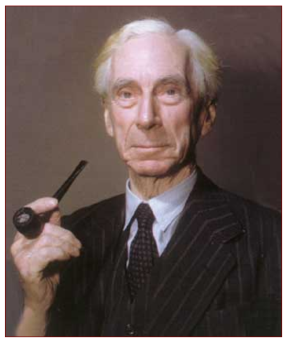
Del resto non è impossibile “barare”… Il paradosso di Simpson

- Facciamo i conti:
  urna bianca (200): 50+60 liquirizia
  urna nera (210): 30+90 liquirizia
- **Liq. urna bianca: 110/200 = 0,55…**
- **Liq. Urna nera: 120/210 = 0,57…**
- **Stavolta è meglio scegliere l’urna *nera!***
- Attenzione! Il paradosso pensando alle caramelle verificarsi **nella valutazi economica, nel test di u**

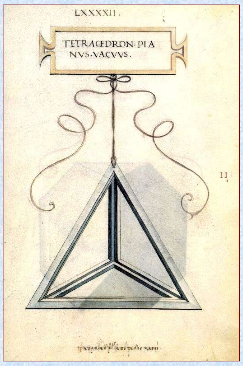
La Probabilità: un concetto fondamentale, eppure…

- “Il concetto di Probabilità è **il più importante della scienza moderna**, perché **nessuno ha la più pallida idea del suo significato”**

(Bertrand Russell)



A tutti grazie dell’attenzione



Alcuni esercizi

Calcolo combinatorio

- (1) In una stanza si trovano dieci persone. Quante strette di mano si possono fare?

  [R.: 45]

- (2) In quanti modi diversi sei libri possono essere ordinati su di uno scaffale?

  [R.: 720]

Triangolo di Tartaglia

- (3) Si sviluppi la quarta potenza del binomio ($a+b$).

  [R.: $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$]

- (4) Si sviluppi la quarta potenza del binomio ($a–b$).

  [R.: $a^4–4a^3b+6a^2b^2–4ab^3+b^4$]

Alcuni esercizi

Definizione di Probabilità

- (5) Si lancino due dadi non truccati. Qual è la probabilità di ottenere 2? E di ottenere 12?

  [R.: 1/36; 1/36]

- (6) Si consideri un mazzo di 40 carte, 10 di coppe, 10 di denari, 10 di bastoni e 10 di spade. Qual è la probabilità di estrarre due carte di denari (senza reinserire la prima carta estratta nel mazzo, dopo l’estrazione)?

  [R.: (10/40)(9/39) = 3/52; la risposta (10/40)(10/40) = 1/16 sarebbe corretta se la prima carta estratta venisse reinserita nel mazzo dopo l’estrazione]