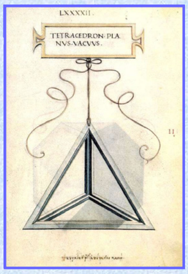
Pordenone

Corso di Matematica e Statistica – 1
Logica, simboli, successioni



Giorgio T. Bagni
Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

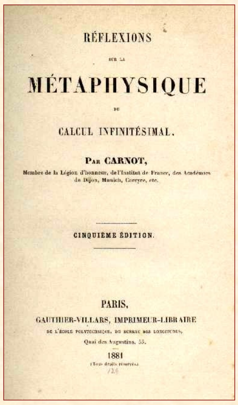
Presentazione delle lezioni
(I parte del corso di Statistica sociale)

- **Lezione 1:** Logica, simboli, successioni
- **Lezione 2:** Funzioni, derivate, integrali
- **Lezione 3:** Algebra delle matrici
- **Lezione 4:** Calcolo combinatorio, probabilità

- **Testi:** G.T. Bagni, *Corso di Matematica*, 1, 2, 3, Zanichelli, Bologna
  G.T. Bagni, *Matematica*, Guerini, Milano
  Dispense e appunti dalle lezioni
  www.syllogismos.it
- **Esame:** test scritto

Sommario

- **Elementi di logica**: proposizioni, predicati
- **Altri simboli di base**: sommatorie, produttorie
- **Inferenza e congetture**: intermezzo aritmetico
- **Il principio di induzione**: uno strumento potente
- **Successioni numeriche**: tre diversi comportamenti


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut de France, des Académies de Dijon, Munich, Corcyre, etc.
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.
1881
(Tous droits réservés.)

Logica proposizionale
Verità e falsità

- Diremo **enunciato** o **proposizione** un'affermazione che assume uno ed un solo valore di verità, **vero** o **falso**.
- Tale caratteristica è tutt'altro che banale: infatti non tutte le affermazioni assumono incontestabilmente uno ed un solo valore di verità.
- Alcuni enunciati sono costituiti da una sola affermazione («Madrid è in Spagna») e sono detti enunciati **atomici**.
- Nella logica proposizionale prescinderemo dalla "struttura interna" degli enunciati. Questa nostra scelta verrà superata con la **logica dei predicati**.

Logica proposizionale
Verità e falsità

- Enunciati più complicati sono costituiti da più affermazioni, collegate da opportune parole (**connettivi**) come o, *e*, *se… allora…*, *se e solo se*.
- I connettivi collegano gli enunciati senza riguardo al significato che possono assumere quelli: l'unica caratteristica che viene indicata nella loro definizione è quale valore di verità abbia l'enunciato composto a partire soltanto dai valori di verità assegnati agli enunciati componenti.
- Le **tavole di verità** riassumono le definizioni dei connettivi.

Logica proposizionale
Connettivi

I connettivi formalizzano alcune parole e sono indicati da opportuni simboli:

- $\neg A$ formalizza **non** A
- $A \wedge B$ formalizza A **e** B
- $A \vee B$ formalizza A **o** B
- $A \rightarrow B$ formalizza **se** A **allora** B
- $A \leftrightarrow B$ formalizza **se** A **allora** B **e se** B **allora** A

(Talvolta "non" viene indicato come "operatore" e non come "connettivo" in quanto, a differenza degli altri connettivi, non collega due enunciati ma opera su di un solo enunciato).

Nella tabella (tavola di verità) sono riassunte le definizioni dei connettivi:

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A→B	A↔B
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Esempio. Tavola di verità dell'enunciato composto: ¬[(A∧B)∨(A∧¬B)]:

A	B	A∧B	¬B	A∧¬B	(A∧B)∨(A∧¬B)	¬[(A∧B)∨(A∧¬B)]
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

I valori di verità di ¬[(A∧B)∨(A∧¬B)] corrispondono a quelli di ¬A.

Oltre la logica proposizionale
Il calcolo dei predicati

- Nell'ambito della logica degli enunciati le due frasi:
  Parigi è in Francia
  Tutti i quadrati hanno quattro lati
  non presentano alcuna differenza sostanziale.
- Si tratta di due enunciati (peraltro veri), e dicendo ciò non si fa riferimento alla loro ben diversa struttura:
- il primo di essi è evidentemente riferito ad un **singolo** soggetto (Parigi), al quale viene attribuita una certa proprietà (quella di trovarsi in Francia);
- la seconda frase, invece, coinvolge **tutti** i quadrati (quindi ha molti soggetti) e ad essi (ovvero: a ciascun quadrato) riferisce la proprietà di avere quattro lati.

Oltre la logica proposizionale
Quantificatori

- La **logica dei predicati** (o **calcolo dei predicati**) contiene come parte propria la logica degli enunciati.
- Nella logica dei predicati si utilizzano frasi del tipo:
  Esiste (almeno) un x che verifica la proprietà P
  Per ogni y è verificata la proprietà Q
- Per formalizzare la prima frase useremo un **quantificatore esistenziale** che garantisca l'esistenza di un oggetto che verifica la proprietà; per la seconda useremo un **quantificatore universale** che garantisca il rispetto della proprietà da parte di tutti gli oggetti di una totalità.

Oltre la logica proposizionale
Quantificatori

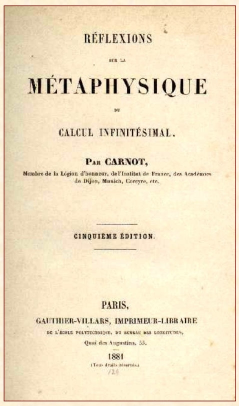
- Il simbolo $\exists x$ P significa che esiste (almeno) un x che verifica la P. ∃ è detto **quantificatore esistenziale**.
- Il simbolo $\forall x$ P significa che per ogni x è verificata la proprietà P. ∀ è detto **quantificatore universale**.
- Ciascun quantificatore può essere espresso mediante l'altro e l'operatore di negazione ¬; ad esempio, dire che esiste almeno un x per cui è verificata la proprietà P equivale a dire che non per ogni x per la proprietà P risulta non verificata. In simboli:
- $\exists x\ P$ equivale a: $\neg(\forall x\ (\neg P))$
- $\forall x\ P$ equivale a: $\neg(\exists x\ (\neg P))$

Oltre la logica proposizionale
Quantificatori

- Quanto ora notato consente di precisare alcune importanti osservazioni riguardanti la negazione di una frase quantificata, che riassumiamo così (ricordiamo che l'enunciato ¬(¬A) equivale ad A):
- la negazione di: $\exists x\ P$ è: $\neg(\neg(\forall x\ (\neg P)))$
  ovvero è: $\forall x\ (\neg P)$
- la negazione di: $\forall x\ P$ è: $\neg(\neg(\exists x\ (\neg P)))$
  ovvero è: $\exists x\ (\neg P)$
- Spesso, invece, sentiamo dire che la negazione di *Tutti i C sono D* è (ahimé!) *Nessun C è D…*
  (mentre dovrebbe essere: *Esiste un C che non è D*!)

Sommario

- **Elementi di logica**: proposizioni, predicati
- **Altri simboli di base**: sommatorie, produttorie
- **Inferenza e congetture**: intermezzo aritmetico
- **Il principio di induzione**: uno strumento potente
- **Successioni numeriche**: tre diversi comportamenti


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut de France, des Académies de Dijon, Munich, Corcyre, etc.
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.
1881
(Tous droits réservés.)

Altri simboli di base

- Abbiamo introdotto alcuni simboli logici, ma altri simboli si utilizzano nella pratica matematica.
- Siano $A(i)$, $B(i)$ espressioni dipendenti dall'indice naturale i; per indicare la somma delle quantità $A(i)$ per i che va da m a n (compresi) si scrive:

$$\sum_{i=m}^{n} A(i) = A(m) + A(m+1) + \ldots + A(n-1) + A(n)$$

- Per indicare il prodotto delle quantità $B(i)$ per i che va da m a n (compresi) si scrive:

$$\prod_{i=m}^{n} B(i) = B(m) \cdot B(m+1) \cdot \ldots \cdot B(n-1) \cdot B(n)$$

Altri simboli di base – esempi

- Sommatorie e produttorie possono combinarsi tra di loro e ripetersi nella stessa espressione.
- In tali casi sarà sufficiente applicare ordinatamente le definizioni viste.
- Ad esempio, risulta:

$$\prod_{i=3}^{4}\prod_{j=5}^{7}(10i-3j) =$$

$$= \prod_{i=3}^{4}(10i-15)(10i-18)(10i-21) =$$

$$= (30-15)(30-18)(30-21)(40-15)(40-18)(40-21) =$$

$$= 16\,929\,000$$

Altri simboli di base – esempi

- Una formula per calcolare la somma dei numeri naturali da 1 a n (compresi), con $n \geq 1$, è:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

- Infatti:

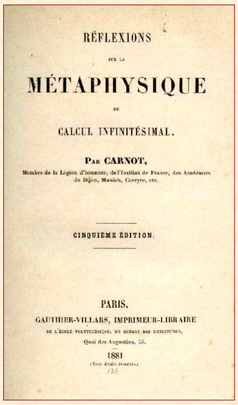
$$\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\
n & n-1 & n-2 & \ldots & 3 & 2 & 1 \\
\hline
n+1 & n+1 & n+1 & \ldots & n+1 & n+1 & n+1
\end{array}$$

(n volte)

- Dunque: $2 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = n(n+1) \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Sommario

- **Elementi di logica**: proposizioni, predicati
- **Altri simboli di base**: sommatorie, produttorie
- **Inferenza e congetture**: intermezzo aritmetico
- **Il principio di induzione**: uno strumento potente
- **Successioni numeriche**: tre diversi comportamenti


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut de France, des Académies de Dijon, Munich, Corcyre, etc.
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.
1881
(Tous droits réservés.)

Spesso alcuni ragionamenti si presentano in forma iterativa…

- Un professore avvisa i propri allievi: "un giorno della settimana prossima darò un compito in classe a sorpresa, **in modo che nessuno di voi possa in alcun modo capire in anticipo il giorno da me scelto"**.
- Da lunedì al sabato tutti i giorni sono a rischio!
- **Tuttavia…**
- È possibile che il temuto compito venga dato **sabato?**
- **No,** perché se si giungesse a venerdì senza aver fatto il compito tutti capirebbero che la giornata prescelta dall'insegnante era, appunto, quella di sabato.

Spesso alcuni ragionamenti si presentano in forma iterativa…

~~lunedì~~ ~~martedì~~ ~~mercoledì~~ ~~giovedì~~ ~~venerdì~~ ~~sabato~~

- Sabato, quindi, niente compito in classe.
- Ripetiamo però il ragionamento: una volta escluso il sabato, l'ultimo giorno possibile sarebbe **venerdì.** E se si arrivasse a giovedì senza aver fatto il compito si capirebbe che il giorno prescelto era proprio venerdì!
- **Dunque niente compito venerdì.**
- E procedendo così…

Spesso alcuni ragionamenti si presentano in forma iterativa…

- Un uso “disinvolto” dell’iterazione può portare a risultati sorprendenti, come ben capirebbe il nostro insegnante, impossibilitato a mantenere un atteggiamento coerente.
- Ci occuperemo del **principio di induzione,** uno dei più eleganti argomenti della matematica elementare.
- Introduciamo le nostre riflessioni con alcune considerazioni sulle inferenze.

Inferenza: tre forme fondamentali La deduzione

- Nel 1878 **C.S. Peirce** (1834-1914) illustrò i tipi di inferenza con un celebre esempio: disponiamo di un sacco con l’etichetta “Fagioli bianchi”. Ciò significa tale sacco contiene soltanto fagioli bianchi (*regola*): se estraessimo una manciata di fagioli dal sacco (*caso*), constateremmo che sarebbero tutti bianchi (*risultato*).
- Questa struttura è detta **deduzione**.

Regola **Tutti i fagioli in questo sacco sono bianchi**
Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
⇩
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**

Induzione

- La deduzione non “aumenta la conoscenza”, ma tiene conto delle conseguenze della situazione determinata da regola e caso.
- Illustriamo l’**induzione**: non conosciamo il contenuto del sacco (non c’è etichetta); per scoprirlo estraiamo una manciata del contenuto (*caso*) e notiamo che si tratta di fagioli bianchi (*risultato*). Questo ci fa supporre che il sacco contenga soltanto fagioli bianchi (*regola*). La regola generalizza il caso sperimentale, ma non siamo certi della sua validità:

Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**
⇩
Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi (?)**

Inferenza e congetture

- Peirce considera anche l’**abduzione**.
- L’induzione ora considerata non va riferita al **principio di induzione matematica**: esso, utilizzato da secoli in varie forme, nel 1861 fu posto tra i fondamenti dell’aritmetica da R. Grassmann (1815-1901); nel 1889 G. Peano (1858-1932) lo inserì come III assioma del proprio sistema. Può così esprimersi:
- “Se s è una classe contenente lo zero e, per ogni a, se a appartiene a s, il successivo di a appartiene a s; allora ogni numero naturale appartiene a s”.
- Con il termine *dimostrazione per induzione* intendiamo oggi una particolare tecnica dimostrativa basata sul principio ricordato. Torneremo su tutto ciò.

Inferenza e congetture

- Nel passato l’induzione “incompleta” (cioè quella basata soltanto sulla generalizzazione di uno o più casi particolari) era considerata una tecnica dimostrativa accettabile, mentre consente solo la formulazione (peraltro importante!) di **congetture**.
- **L’applicazione in matematica dell’induzione incompleta può essere causa di errori**. Ad esempio, per i naturali n, con $0<n<20$, almeno uno dei numeri $6n\pm1$ è primo…
- … ma la generalizzazione di questa iniziale regolarità sarebbe errata!
- Infatti per $n = 20$ entrambi i numeri $6\cdot20\pm1$ sono composti ($119 = 7\cdot17$ e $121 = 11\cdot11$).

Inferenze deduttive e induttive: l’aritmetica dei primi

Un numero intero maggiore di 1:

- si dice **primo** se gli unici suoi divisori sono se stesso e l’unità: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …
- si dice **composto** se non è primo: $4=2\cdot2$, $6=2\cdot3$, $8=2\cdot2\cdot2$, …
- Per trovare i primi minori di un k useremo tra poco il **Crivello di Eratostene** (276-195 a.C.).
- Ma potremo anche chiederci: **“quanti” sono i primi?**
- La risposta sarà in uno splendido teorema di Euclide...

Il crivello: troviamo i primi da 2 a 24

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~

- Quando non ci sono più numeri da "scartare"… **tutti quelli che restano sono numeri primi!**

Una dimostrazione di rara eleganza: la dimostrazione per assurdo

- Vogliamo dimostrare che: **se A (ipotesi) allora B (tesi)**
- La "dimostrazione per assurdo" consiste nel negare la tesi (supporre che non sia vera) e da ciò dedurre una conseguenza assurda (oppure contraria a quanto era stato ammesso per ipotesi).
- La tesi, dunque, **non può non essere vera** e quindi (tertium non datur)... **è vera!**
- Euclide è un maestro nell'applicazione di questa tecnica logica. Come vedremo, uno dei suoi più eleganti risultati è dimostrato per assurdo.

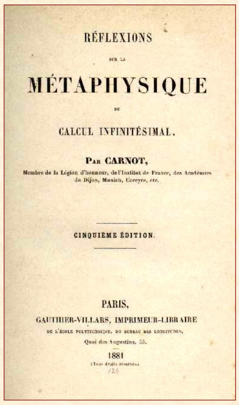
Paul Erdös (1913-1997): "A 10 anni conobbi la dimostrazione di Euclide… e mi innamorai!"

- **I primi sono infiniti.**
- Se fossero solo 2, 3… n, A = 2·3·…·n+1, composto, avrebbe un divisore p (primo) in comune con B = 2·3·…·n. Ma se un numero divide A e B divide anche la differenza A–B. Tale p sarebbe anche divisore di A–B = 1, **assurdo!**

Se i primi fossero <u>solo</u> 2, 3, 5 il numero A = 2·3·5+1 = 31 sarebbe composto (non è primo) e, come ogni composto, avrebbe un divisore primo, dunque: 2, 3 o 5, ad es. 3. Ma 3 è divisore anche di B = 2·3·5 = 30 e se 3 dividesse sia A che B dovrebbe dividere anche A–B = 1…

Sommario

- **Elementi di logica**: proposizioni, predicati
- **Altri simboli di base**: sommatorie, produttorie
- **Inferenza e congetture**: intermezzo aritmetico
- **Il principio di induzione**: uno strumento potente
- **Successioni numeriche**: tre diversi comportamenti


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
1881

Formalizziamo il principio di induzione in N

- Sia F(x) una proprietà tale che:
  (a) F(0)
  (b) $\forall x \in \mathbf{N}$ (F(x) $\Rightarrow$ F(x')) (x' indica il successore di x)
  allora: $\forall x$ F(x).
- **Altra formulazione (insiemistica) del principio:**
- Sia A un sottoinsieme di **N** tale che:
  (a) $0 \in A$
  (b) $\forall x$ ($x \in A \Rightarrow x' \in A$)
  allora: A = **N**.

Un esempio di applicazione del principio di induzione

- Dimostriamo che la somma dei numeri naturali da 1 a n (compresi), con $n \geq 1$, è:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

- (a) $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ è verificata;
- (b) Si ricava infine che:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$$

Altro esempio di applicazione del principio di induzione

- Dimostriamo ancora che la somma dei numeri naturali da 1 a n (compresi), con $n \geq 1$, è:

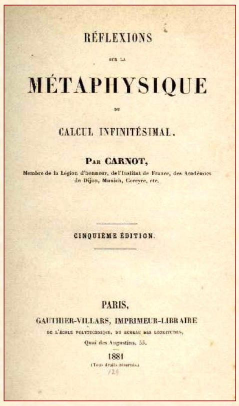
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

- (a) $\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$ è verificata;
- (b) Si ricava (partendo dalla somma dei primi $n-1$):

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n-1} i + n = \frac{(n-1) \cdot n}{2} + n = \frac{(n-1) \cdot n + 2n}{2} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Sommario

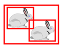
- **Elementi di logica**: proposizioni, predicati
- **Altri simboli di base**: sommatorie, produttorie
- **Inferenza e congetture**: intermezzo aritmetico
- **Il principio di induzione**: uno strumento potente
- **Successioni numeriche**: tre diversi comportamenti


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL,
PAR CARNOT,
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
1881

I coniglietti di Fibonacci

- All'inizio abbiamo solo una coppia, A, non feconda;

- dopo **un mese**, abbiamo ancora la sola coppia A, che è divenuta feconda;



- dopo **due** mesi, A (che resta) ha generato una nuova coppia B, inizialmente non feconda;

- dopo **tre** mesi, A ha generato C, inizialmente non feconda, e B è diventata feconda…

I coniglietti di Fibonacci

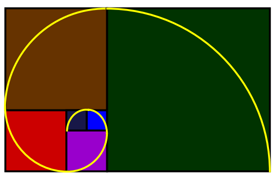
- Se contiamo, mese dopo mese, il numero delle coppie di coniglietti, troveremo la **successione di Fibonacci**; fu il matematico francese Edouard Lucas (1842-1891) che propose tale denominazione:
  1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; …
- I calcoli diventano sempre più fastidiosi; come potremmo scrivere una "regola" che ci aiuti a calcolare con facilità i termini di tale successione?
- Insomma: **quante saranno le coppie di coniglietti ad un mese considerato?**

I coniglietti di Fibonacci

- Ci saranno, ovviamente, **tutte le coppie del mese precedente** (i coniglietti sono immortali!).
- Ci saranno poi le coppie "neonate": quante? Una per ogni coppia feconda (nel mese precedente al mese considerato). Ma le coppie di coniglietti diventano feconde dopo un mese di "attesa". Quindi il numero di coppie in età feconda al momento considerato è il numero delle **coppie presenti due mesi prima**.
- Quindi: **il numero a_n di coppie al mese n-esimo è la somma del numero delle coppie presenti nei due mesi precedenti.**
- $a_0 = 1$; $a_1 = 1$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $n \in \mathbb{N}$

I coniglietti di Fibonacci

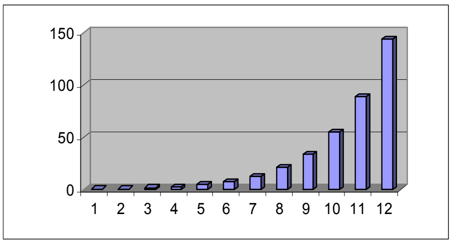
- La successione di numeri: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, …** si ritrova in molte applicazioni.
- Ad esempio consente di tassellare un piano con una sequenza di quadrati due soli dei quali con lati uguali:



- una sequenza strettamente imparentata con la **spirale**!

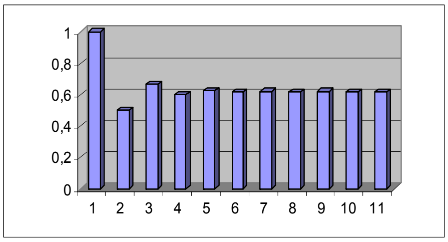
I coniglietti di Fibonacci

- Possiamo anche rappresentare in un grafico l'andamento della nostra "popolazione" per i primi mesi (consideriamo, ad esempio, il primo anno):



I coniglietti di Fibonacci

- Se esaminiamo il rapporto tra il numero di coppie al mese n-esimo e al mese (n+1)-esimo, troviamo che al crescere di n tale rapporto **tende a "stabilizzarsi"** intorno ad un valore di poco superiore a 0,6:



I coniglietti di Fibonacci

- Questo comportamento è interessante; per poterlo studiare meglio, però, sarebbe opportuno scrivere una "regola" (simile a quella ricavata poco fa) che ci consenta di calcolare facilmente **i rapporti tra due termini consecutivi della successione di Fibonacci**.
- Il rapporto iniziale, R_0, è evidentemente 1 (i primi due elementi della successione sono infatti uguali!).
- Per quanto riguarda i rapporti successivi, proveremo a calcolare il rapporto R_{n+1} tra il numero di coppie al mese (n+1)-esimo ed al mese (n+2)-esimo.

I coniglietti di Fibonacci

$$R_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} == \frac{1}{1+\dfrac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1}{1+R_n}$$

e dunque la "regola" è la seguente:

$$\begin{cases} R_0 = 1 \\ R_{n+1} = \dfrac{1}{1+R_n} \end{cases} \qquad n \in \mathbf{N}$$

I coniglietti di Fibonacci

Calcoliamo alcuni valori:

$$R_0 = 1 \qquad \mathrm{R}_1 = \frac{1}{1+1}$$

$$R_2 = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}} \qquad \mathrm{R}_3 = \boxed{\frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1}}}}$$

Considereremo ancora espressioni come questa

Le equazioni di secondo grado

Per risolvere un'equazione di II grado potremmo essere tentati da un metodo che si usa per quelle di I grado:

$$x(x+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x}}$$

ma continuando a sostituire $\dfrac{1}{1+x}$ per x **il procedimento non avrebbe fine!** Avremmo:

$$\boxed{x = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+...}}}}$$

cioè una **frazione continua**.

- Ma $x^2+x = 1$ porta a $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ (radice positiva)

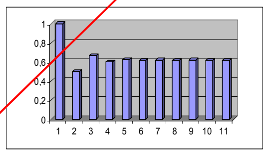
Una “fila” di numeri

- Consideriamo quanto ottenuto poco fa:

$$1 \quad \frac{1}{1+1} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}} \quad \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} \quad \text{etc.}$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$$

- E “facciamo i conti”:
  1 1/2 2/3 3/5 …
- Più si procede e più ci si avvicina al numero aureo (0,61803398…)



Tre successioni diverse per tre comportamenti “asintotici”

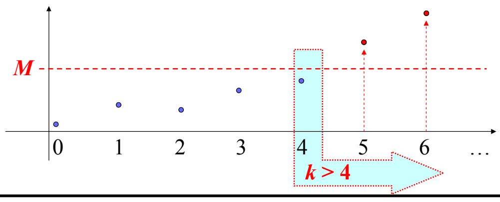
- $a(n)$ 0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 …
- $b(n)$ 1 1/2 1/4 1/8 1/16 1/32 1/64 1/128 1/256 1/512…
- $c(n)$ 1 –1 1 –1 1 –1 1 –1 1 –1 …
- La prima, $a(n)$ **“cresce indefinitamente”**
- La seconda, $b(n)$ **“si avvicina sempre di più a 0”**
- La terza, $c(n)$ **“oscilla senza mai stabilizzarsi”**
- $a(n)$ si dice **divergente (positivamente)**
- $b(n)$ si dice **convergente (a 0)**
- $c(n)$ si dice **indeterminata**

Alcune definizioni per il concetto di limite

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} a(x) = +\infty}$$

- Definizione. La successione $a(n)$ si dice **divergente** (positivamente) se per ogni $M>0$ esiste un indice k tale che, per ogni $i>k$, risulta: $\boldsymbol{a(n) > M}$

  [il valore assunto da $a(n)$, da un certo punto (k) in poi, è più grande di un livello (M) fissato a piacere]

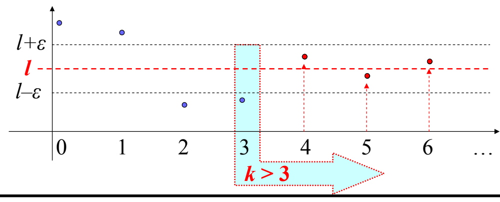


Alcune definizioni per il concetto di limite

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} b(x) = l}$$

- Definizione. La successione $b(n)$ si dice **convergente** al limite l se per ogni $\varepsilon>0$ esiste un indice k tale che, per ogni $i>k$, risulta: $\boldsymbol{l-\varepsilon < b(n) < l+\varepsilon}$

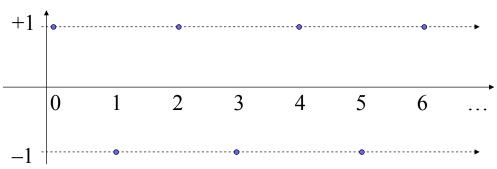
  [il valore di $b(n)$, da un certo punto (k) in poi, si discosta da l meno di una tolleranza (ε) a piacere]



Alcune definizioni per il concetto di limite

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} c(x) = \text{non esiste}}$$

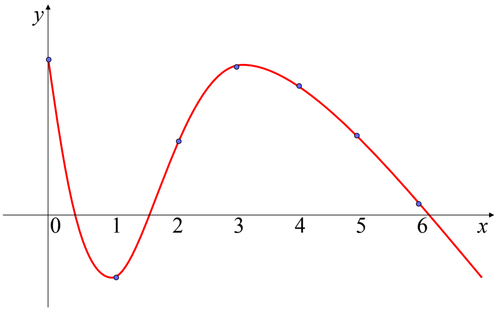
- Una successione come $c(n)$ che non sia divergente (né positivamente, a $+\infty$, né negativamente, a $-\infty$) si dice **indeterminata** e non ammette alcun limite.
- Ad esempio, $c(n)$ continua ad oscillare tra +1 e –1:



Dalle successioni alle funzioni Una generalizzazione fondamentale

- Le successioni sono un caso particolare di **funzioni**.
- Una **funzione** è una legge che associa ad ogni elemento di un primo insieme (“dominio”) **uno e un solo** elemento di un secondo insieme.
- Nel caso delle successioni il dominio è sempre quello dei numeri naturali (0, 1, 2, 3, 4, 5, …).
- Ma nelle applicazioni spesso una variabile non è discreta, ma può **variare con continuità**.
- Le funzioni che considereremo avranno per dominio quello, essenzialmente più ampio, dei **numeri reali**.

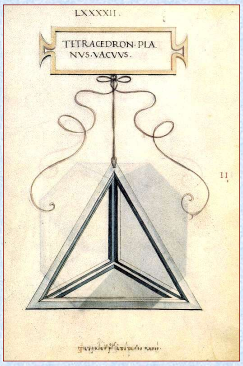
Dalle successioni alle funzioni
Una generalizzazione fondamentale



Dalle successioni alle funzioni
Una generalizzazione fondamentale

- Passeremo quindi alla considerazione di curve piane, con tutte le loro caratteristiche geometriche.
- Il **Calcolo infinitesimale** si fonda dunque sulla **Geometria analitica** che ai tempi di Descartes realizzò la fusione dell'Algebra (dotata, dopo il Rinascimento, di uno strumento simbolico efficace) con la Geometria.

A tutti grazie dell'attenzione



Alcuni esercizi

Logica

- (1) Dire se [A∨B∨(¬A)]∧[(¬B)∨A∨B] è sempre vera (qualsiasi siano i valori di verità di A e di B).
  [R.: Sì, perché?]
- (2) Scrivere la negazione di "Tutti i triangoli sono rettangoli".
  [R.: "Esiste un triangolo non rettangolo"]

Simboli

- (3) Calcolare:

$$\prod_{i=1}^{3}\left(i+\sum_{k=1}^{2}k^2\right)$$

[R.: 6·7·8 = 336]

Alcuni esercizi

Principio di induzione

- (4) Qual è la somma dei numeri naturali pari minori o uguali a $2k$? Dimostrare tale formula per induzione.
  [R.: $k(k+1)$]

Successioni

- (5) Dire se la successione $a_k = 100-(1/2)^k$ è convergente, divergente o indeterminata.
  [R.: Convergente]
- (6) Dire se la successione $b_k = (k+2)^{1/2}$ è convergente, divergente o indeterminata.
  [R.: Divergente]