Udine, Didattica della matematica 2008/2009

Beautiful Minds

Giochi e modelli matematici da Pacioli a Nash

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica

Università di Udine

bagni@dimi.uniud.it

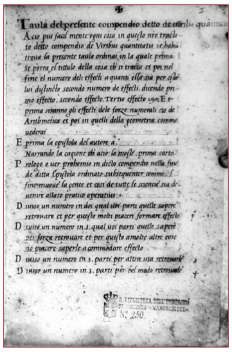
www.syllogismos.it

Luca Pacioli

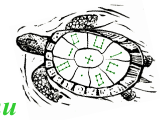
- Il francescano **Luca Pacioli** (1445-1514) è una figura primaria della matematica del XV–XVI secolo.
- Pacioli si ricorda per l'introduzione della "partita doppia"…
- … e per molti giochi matematici che oggi ispirano le nostre gare!

Un'opera manoscritta di Pacioli *De Viribus Quantitatis*

- Alla storia dei giochi matematici si collega ***De Viribus Quantitatis***, scritta presumibilmente tra il 1496 e il 1508.
- Una copia manoscritta, proveniente dalla biblioteca bolognese di G.G. Amadei, morto nel 1768, si trova presso la Biblioteca Universitaria di Bologna, codice 250.



I "quadrati magici"… partendo dalla Cina, VI sec. a.C.



Lo Shu

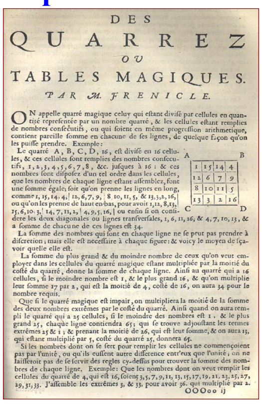
4 e **2** sono le spalle
8 e **6** sono i piedi
un **3** sulla sinistra
un **7** sulla destra
porta un **9** sulla testa
è calzato con un **1**
mentre un **5** sta nel mezzo

4	9	2
3	5	7
8	1	6

15 15 15 15 15 15 15 15

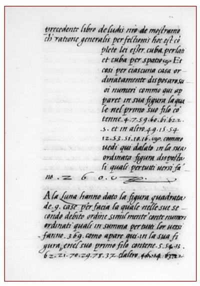
I "quadrati magici"… partendo dalla Cina, VI sec. a.C.

- **Il più antico quadrato magico** è il cinese *Lo Shu*, l'unico quadrato magico classico di ordine 3 (a parte i simmetrici etc.)
- L'interesse per questi "giochi" si diffuse in Occidente con *Malinconia* di **A. Dürer** (1514).
- **B. Frenicle de Bessy** (1605–1675) trovò 880 quadrati magici di ordine 4.



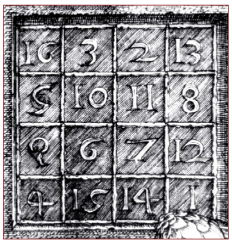
I "quadrati magici" nel *De Viribus Quantitatis*

- Un problema interpretativo è posto dal "quadrato di Mercurio", di cui manca il disegno. Pacioli infatti, in generale, non elenca tutti gli elementi dei quadrati magici (a parte i primi numeri).
- Pacioli si occupa di **quadrati magici classici,** cioè disposizioni quadrate di numeri naturali da 1 a n^2 tutti diversi tra di loro (in modo che righe, colonne e diagonali abbiano la stessa somma).



I quadrati magici
oggi

- La matematica da Frenicle ha realizzato molti risultati a proposito dei quadrati magici. Importante è…
- … l'ordine n del quadrato da costruire: esso può essere **dispari** (come per il quadrato *Lo Shu*, $n = 3$) o **pari** (come per quello di Dürer: $n = 4$).
- Presenteremo una regola per costruire un quadrato magico classico di ordine n dispari (vedremo ad esempio **il caso: $n = 5$**).



I quadrati magici
oggi

- Ricordiamo che un quadrato magico di ordine n si dice **classico** se coinvolge i numeri da 1 a n^2.
- Per **trovare la costante magica** di un q. m. cl. di ord. n si sommano i numeri da 1 a n^2 ("piccolo Gauss") e si divide per n:

- $$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \ldots & n^2-1 & n^2 \\ n^2 & n^2-1 & \ldots & 2 & 1 \\ \hline n^2+1 & n^2+1 & \ldots & n^2+1 & n^2+1 \end{array}$$ (2 volte)
- Quindi c. m. del q. m. cl. ord. n = $\mathbf{n^2(n^2+1)/2n}$
$= \mathbf{n(n^2+1)/2}$

I quadrati magici
oggi

- Iniziamo a porre **1 nella casella al centro della prima riga.**
- Poi collochiamo gli altri numeri, **in ordine, secondo una "diagonale ascendente",** rispettando alcune regole.

		1		

I quadrati magici
oggi

- **Regole per le "diagonali":**
- si va alla colonna successiva in caso di fine colonna;
- si va alla riga precedente in caso di fine riga;
- si va alla casella inferiore in caso di casella occupata.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

E infine… *verifichiamo!*

- Troviamo la costante magica:
- somma dei numeri da 1 a 25: 25×26:2 = 325
- 325:5 = **65**

65 ↘					
65 ⇨	17	24	1	8	15
65 ⇨	23	5	7	14	16
65 ⇨	4	6	13	20	22
65 ⇨	10	12	19	21	3
65 ⇨	11	18	25	2	9
65 ↗	65	65	65	65	65

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Il "XXXII effecto" è introdotto dalla dicitura **"De doi numeri che, multiplicato l'uno in l'altro, sempre farà la summa del producto le figure che voli"**. Non appare chiaro, sulla base del titolo, l'intendimento dell'Autore: si tratta di trovare dei fattori che portino a prodotti, in forma posizionale decimale, espressi da numeri costituiti da una stessa cifra ripetuta.
- Pacioli considera il caso di sei cifre e si propone di ottenere: **111111, 222222, 333333, 444444, 555555, 666666, 777777, 888888, 999999**
- Egli si basa inizialmente sul prodotto:
777 × 143 = 111111

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Moltiplicando un fattore (Pacioli opera sul secondo, 143) per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (e dunque scegliendo come secondi fattori quelli riportati in grassetto nella tabella) si otterranno i prodotti sopra elencati:
- 777 × (143×2) = 777 × **286** = 111111 × 2 = 222222
  777 × (143×3) = 777 × **429** = 111111 × 3 = 333333
  777 × (143×4) = 777 × **572** = 111111 × 4 = 444444
  777 × (143×5) = 777 × **715** = 111111 × 5 = 555555
  777 × (143×6) = 777 × **858** = 111111 × 6 = 666666
  777 × (143×7) = 777 × **1001** = 111111 × 7 = 777777
  777 × (143×8) = 777 × **1144** = 111111 × 8 = 888888
  777 × (143×9) = 777 × **1287** = 111111 × 9 = 999999

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Successivamente Pacioli propone un secondo modo di realizzare lo stesso "effecto", basato sul prodotto:
  481 × 231 = 111111
- Le due soluzioni di Pacioli esauriscono o meno quelle possibili per il problema di ottenere prodotti di sei cifre uguali?
- La risposta è **no.**
- **Esercizio.** Quante sono le soluzioni possibili per l'esercizio paciolíano?
- [Risposta: 15, si ricordi la scomposizione in fattori primi e un po' di calcolo combinatorio…]

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Perché Pacioli ha considerato proprio **111111?** L'"effecto" può essere proposto anche per prodotti costituiti da un numero di cifre ripetute **diverso da 6**.
- Si voglia ottenere un numero di tre, quattro etc. cifre uguali (il caso di due cifre è banale: 11 è un primo). Consideriamo le scomposizioni in fattori primi:

  111 = 3×37   1111 = 11×101
  11111 = 41×271   1111111 = 239×4649
- Per un numero di cifre minore di 8 le scomposizioni sono, a parte quella impiegata da Pacioli, costituite da **due soli fattori primi e ciò impedisce di proporre più soluzioni.**

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

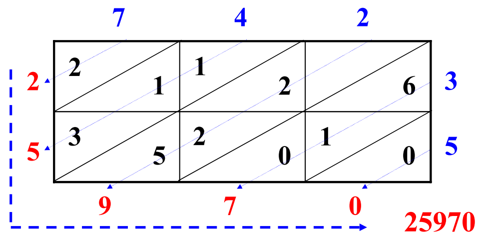
- La seconda parte del "XXXII effecto" è dedicata ai **numeri "tramezzati"**, cioè espressi in notazione posizionale decimale da espressioni come:
  121212,   232323,   343434   etc.
- L'Autore suggerisce che per ottenere un numero "tramezzato" (ad esempio 121212, costituito dalla "ripetizione" delle cifre 1 e 2, ovvero di 12), si può:
- considerare un numero di decine pari al doppio del numero che si vuole veder ripetuto (ad esempio 12)
- aggiungere a ciò tale numero (dunque: 12×10×2+12)
- moltiplicare il risultato per il numero fisso 481.

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Il procedimento paciolíano equivale a moltiplicare il numero di due cifre considerato per
  (2×10+1)×481 = 10101
- e ciò porta, evidentemente, ad ottenere numeri "tramezzati":
  12 × 10101 = 121212
  23 × 10101 = 232323
  34 × 10101 = 343434
  58 × 10101 = 585858
  etc.

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

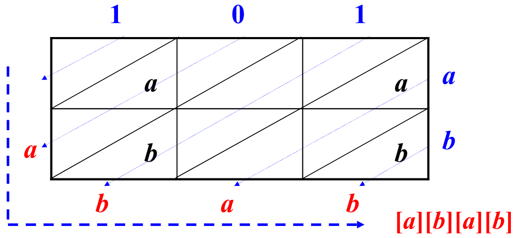
- L'efficacia è chiara se si considera la "moltiplicazione per graticola" (usatissima ai tempi di Pacioli).
- Eseguiamo la moltiplicazione: **742 × 35 = 25970**



Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

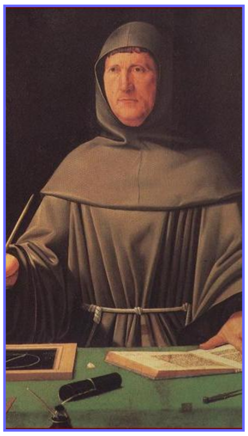
- Consideriamo ora il prodotto del numero espresso dalle cifre **[*a*][*b*]** per **101.**
- **101 × [*a*][*b*] = [*a*][*b*][*a*][*b*]**

Analogamente si opera per 10101, 1010101 etc.



Un altro esercizio sui prodotti strani

- **Esercizio.** Generalizzate l'"effecto" trovando altri procedimenti (pensate a scomposizioni di 10101 diverse da 21×481, osservando che nessuno di questi fattori è un numero primo!).
- Non dimenticate di dare una descrizione verbale del vostro procedimento, come fa frate Luca!

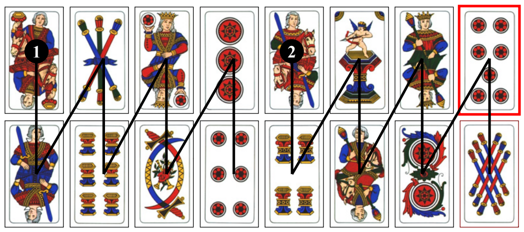


Un gioco di divinazione binaria

- Disponiamo sedici carte da gioco nel modo seguente e chiediamo al partecipante di individuarne una senza indicarla (*De Viribus Quantitatis*, Capitolo LXIX).
- Inquadriamo in rosso la carta scelta **(il *settebello*):**

Un gioco di divinazione binaria

- Alla **prima** domanda ("in che riga sta la carta?") il partecipante indica la prima riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:

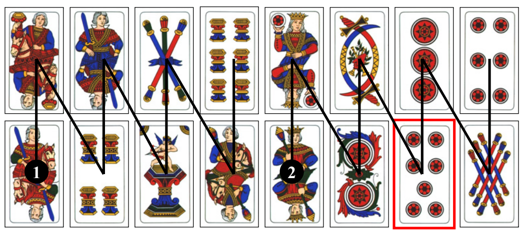


Un gioco di divinazione binaria

Così facendo la carta "pensata" verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1$ mod 2, cioè di posto dispari

Un gioco di divinazione binaria

- Alla **seconda** domanda ("in che riga sta la carta?") il partecipante indica la seconda riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:

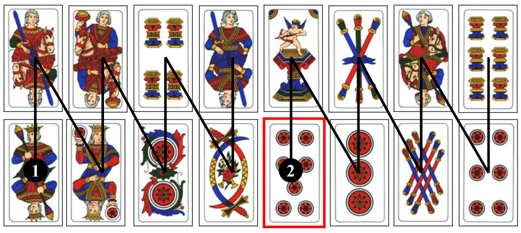


Un gioco di divinazione binaria

Così facendo la carta "pensata" verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 4$, cioè di posto 1, 5, 9 o 13

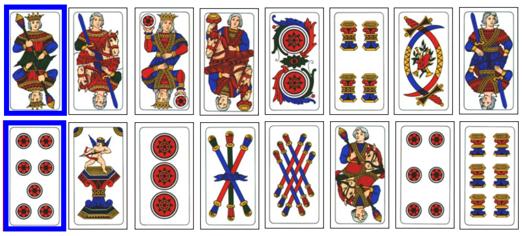
Un gioco di divinazione binaria

- Alla **terza** domanda ("in che riga sta la carta?") il partecipante indica ancora la seconda riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:



Un gioco di divinazione binaria

La carta sarà in un posto di ordine $k \equiv 1 \bmod 8$, cioè 1 o 9. Alla quarta domanda il partecipante indicherà la riga e la carta sarà individuata!



Un gioco di divinazione binaria

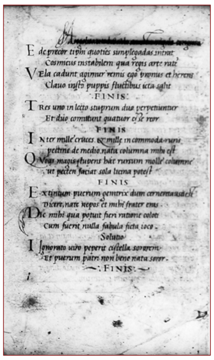
Nota bene:

- con 4 domande è stato individuato un oggetto tra 16 a disposizione, in quanto 16 è 2 elevato alla quarta potenza.
- Analogamente se gli oggetti fossero stati 2 elevato alla n sarebbero state necessarie n domande **(metodo dicotomico).**
- Ma la strategia di Pacioli consiste nel non rendere esplicito il proprio procedimento nella risoluzione (cioè l'applicazione del metodo dicotomico).

Chiudiamo con *De Viribus Quantitatis*
Uno spunto attuale

- Nell'antico lavoro di Pacioli c'è un suggerimento: l'indicazione di una strada forse lontana dalla didattica ufficiale, colta, ma talvolta fredda di quel tempo (dei giorni nostri?), ma ricca e stimolante: **una lettura che, dopo mezzo millennio, non ha ancora esaurito la propria vitalità…**

  …per le beautiful minds!


E de precor tiphi quoties simplegadas intrat
Cosmicus instabilem qua regis arte ratē
V Ela cadunt agimur remis ego pronus et herens
Clauo insto puppis fluctibus icta salit
·FINIS·
T Res uno in lecto stuprum duo perpetiuntur
Et duo committunt quatuor esse reor
FINIS
I Nter mille cruces et mille incommoda rurīs
pectine de medio nata columna mihi est
Quos magis fluvens hāt rursum molle columne
ut pecten faciat sola licina potest
FINIS
E xtinctum puerum genitrix dum cerneret ausa est
Dicere, nate nepos et mihi frater eras
Dic mihi qua potuit fieri ratione coloti
Cum fuerit nulla fabula ficta ioco.
Solutio
I gnorato uiro peperit cistella sororem
Et puerum patri non bene nata soror.
~:FINIS:~

Grazie a tutti dell'attenzione

Grazie a
Furio Honsell