Master in Didattica delle Scienze – Università di Udine

“Contaminazioni” tra algebra e serie numeriche (per una matematica “ironica”)

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Summary

In this paper an example from the history of mathematics (Guido Grandi’s infinite series, 1703, and related Leibnitian remarks, 1716) is presented and its educational utility is investigated and discussed. Students’ behaviour is examined (with reference to pupils aged 16-18 years): we conclude that the main problem of the passage from finite to infinite is a cultural one, and various historical issues are important in order to approach it, although the historical approach is to be considered together with other approaches, e.g. the influence of the algebraic language.

Key words: algebraic language, convergence, didactical contract, epistemology, history of mathematics, infinite series, probabilistic argument, summability.

I. Introduzione

> «[Per l’ironico] niente ha una natura intrinseca, un’essenza. Perciò non crede che la presenza di termini come ‘giusto’, ‘scientifico’ o ‘razionale’ nel vocabolario decisivo del momento sia una buona ragione per pensare che la ricerca socratica dell’essenza della giustizia, della scienza o della razionalità potrà portare molto oltre i giochi linguistici del tempo»
>
> Richard Rorty (2003, p. 91)

Numerose recenti ricerche didattiche mostrano che un uso corretto della storia è un elemento importante (si veda, in generale: Fauvel & van Maanen, 2000), anche, ad esempio, per la formazione degli insegnanti (Schubring & Al., 2000). Come vedremo, alcune assunzioni epistemologiche sono indispensabili per collegare i processi di insegnamento-apprendimento alla considerazione di dati storici. È inoltre rilevante notare che è impossibile considerare l’evento storico senza l’influenza delle nostre concezioni moderne (Radford, 1997; Bagni, 2005c): dobbiamo tenere conto che quando ci rivolgiamo al passato poniamo a confronto due culture che sono «diverse ma non incommensurabili» (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165).

II. Storia e didattica della matematica

Nelle proprie *Lezioni trentine*, dopo aver riconosciuto l'importanza del «presentare idee e concezioni del mondo in una prospettiva storica, cioè raccontare come sono nate e perché molti le hanno accettate ed hanno agito di conseguenza», Paul Karl Feyerabend (1924-1994) sottolinea che «questo compito non è affatto semplice, perché il nostro modo di considerare la storia è influenzato da modelli che ci hanno ormai ipnotizzato» (Feyerabend, 1996, p. 17; si veda inoltre: Radford, 1997, p. 26; Foucault, 2005, pp. 9-17). Sarebbe dunque necessario, per lo storico, un atteggiamento più prudente? Sarebbe forse consigliabile, ad esempio, il tentativo di modellare direttamente i propri "concetti" su quelli caratteristici del periodo in esame? Hans Georg Gadamer (1900-2002) sostiene che anche una tale scelta sarebbe sia illusoria che infondata e, sempre riferendosi al comportamento dello storico, nota: «la sua ingenuità diventa davvero abissale quando egli comincia a rendersi conto della problematicità della sua posizione, e arriva per esempio a porre come principio che, nella comprensione storica, si debbano lasciar da parte le proprie idee, cercando di pensare solo secondo i concetti dell'epoca che si vuole conoscere» (Gadamer, 2000, p. 809). Tale ingenuità non deriva dall'inevitabile insuccesso al quale la scelta ora delineata è condannata; il problema centrale è diverso, e notevolmente più profondo: infatti «la coscienza storica misconosce se stessa se, per comprendere, pretende di escludere dal gioco proprio ciò che rende possibile la comprensione. *Pensare storicamente* significa in realtà *portare a compimento quella trasposizione che i concetti del passato subiscono* quando noi cerchiamo di pensare in base ad essi. Il pensare storicamente comporta sempre costitutivamente una mediazione tra quei concetti e il proprio pensiero» (Gadamer, 2000, pp. 809-811; corsivi nel testo).

Applicheremo queste considerazioni alla discussione di alcune possibilità didattiche connesse ad un noto esempio storico.

III. Le serie nel XVIII secolo: Grandi, Leibniz e Riccati

Nel 1703, Guido Grandi (1671-1742) affermò in *Quadratura circuli et hyperbolae*: «mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione $1-1+1-1+\ldots$ io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile» (citato in: Silov, 1978, p. 185). Con ciò il matematico cremonese si riferiva alla situazione seguente:

$$(1-1)+(1-1)+\ldots = 0+0+\ldots = 0 \qquad 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1+0+0+0+\ldots = 1$$

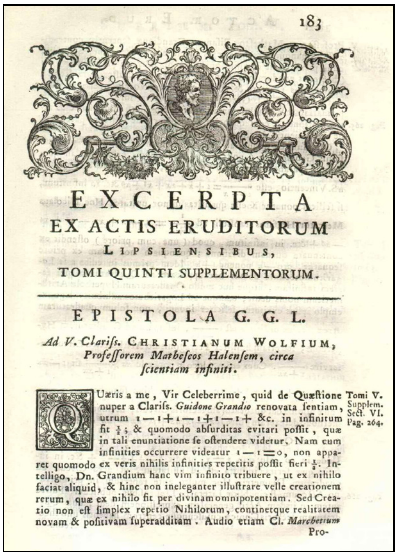
La serie a segni alterni $\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i = 1-1+1-1+\ldots$ era peraltro eguagliata da molti matematici del XVIII secolo a ½ (Kilne, 1991; Bagni, 2005b). Secondo Grandi, ciò può essere ricondotto allo sviluppo (che modernamente sappiamo richiedere la condizione $-1<x<1$):

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{+\infty}(-x)^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

In tale formula, la posizione $x = 1$ (che ovviamente non rispetta la condizione ricordata) porterebbe infatti a ½. È oggi ben noto che la successione delle somme parziali associata alla "serie di Grandi" non ammette alcun limite: da ciò segue che tale serie non è convergente. *Ma il termine "convergenza" (con il suo significato moderno) apparteneva al vocabolario di Grandi?* Potremmo dunque basare un'analisi storica della serie di Grandi sulla nozione di convergenza? E come la didattica può tenere conto di tutto ciò?

Prima di valutare i risvolti didattici, ricordiamo che della serie di Grandi si occupò anche Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), il quale in alcune lettere del 1713 al filosofo illuminista tedesco Christian Wolf (1679-1754) introdusse un “argomento probabilistico” che influenzò matematici della statura di Johann (1667-1748) e Daniel Bernoulli (1700-1782).[1] Leibniz osservava che “interrompendo” la serie 1−1+1−1+... dopo un numero “qualsiasi” di addendi è possibile ottenere come risultato 0 o 1 con la stessa “probabilità” (0 considerando un numero pari di addendi; 1 considerando un numero dispari di addendi).[2] Di conseguenza il valore che può essere ritenuto più “probabile” (in base ad un non meglio definito “principio di equità”) della “somma di infiniti addendi” verrebbe ad essere proprio la media aritmetica tra 0 e 1,[3] cioè ½ (Grones, 1831, pp. 37-38). Lo stesso Leibniz si rendeva conto che il proprio «ragionamento era più metafisico che matematico, ma aggiungeva che in matematica c’erano più verità metafisiche di quanto si credesse comunemente» (Kline, 1991, I, p. 520).[4]

Le osservazioni sopra ricordate non erano però condivise da tutti i matematici, nel XVIII secolo: Jacopo Riccati (1676-1754) , ad esempio, criticò la convergenza della serie di Grandi ad ½ nel proprio *Saggio intorno al sistema dell’universo* (1761, I, p. 87), concludendo che «il lodato Scrittore [Grandi] ha fatto uso d’una serie tra quelle, che dagli Analisti si chiamano parallele, dalle quali, come altresì dalle divergenti, nulla ci vien fatto di concludere. E la ragione si è, che per quanto si vada avanzando nella progressione, non succede mai, che i termini susseguenti possano trascurarsi, siccome incomparabili cogli antecedenti; la qual proprietà alle sole serie convergenti si compete» (Riccati, 1761, I, p. 86).


183

EXCERPTA
EX ACTIS ERUDITORUM
LIPSIENSIBUS,
TOMI QUINTI SUPPLEMENTORUM.

EPISTOLA G. G. L.

Ad V. Clariss. CHRISTIANUM WOLFIUM, *Professorem Matheseos Halensem, circa scientiam infiniti.*

QUæris a me, Vir Celeberrime, quid de Quæstione nuper a Clariss. *Guidone Grandio* renovata sentiam, utrum 1−1+1−1+1−1+ &c. in infinitum fit ½; & quomodo absurditas evitari possit, quæ in tali enuntiatione se ostendere videtur. Nam cum infinities occurrere videatur 1−1=0, non apparet quomodo ex veris nihilis infinities repetitis possit fieri ½. Intelligo, Dn. Grandium hanc vim infinito tribuere, ut ex nihilo faciat aliquid, & hinc non ineleganter illustrare velle creationem rerum, quæ ex nihilo fit per divinam omnipotentiam. Sed Creatio non est simplex repetio Nihilorum, continetque realitatem novam & positivam superadditam. Audio etiam Cl. *Marchettum* Pro- Tomi V. Supplem. Sect. VI. Pag. 264.

Qui vengono messi in gioco alcuni termini chiave: si afferma che le serie “parallele” non hanno le stesse caratteristiche delle serie “convergenti”. Dunque il vocabolario a cui fa ora riferimento Riccati non sembra essere lo stesso vocabolario di Leibniz (ovvero di Grandi).

---

[1] Leibniz scrisse a J. Riccati: «io non so s’eglino abbiano veduto quello ch'ho notato sopra la questione se 1–1+1–1 ecc. all'infinito è uguale a ½ come il R. P. Grandi ha asserito, e in qualche maniera con ragione. Imperciocché $1/(1+x)$ è $1–x+xx–x^3+x^4–x^5$ ecc. ed allora che la lettera x si eguaglia ad 1, ne vien 1/(1+1) = 1–1+1–1+1–1 ecc. = ½. In questo mentre sembra, che questo sia un assurdo manifesto. Negli Atti di Lipsia io credo di aver dato lo scioglimento di questo enigma della scienza dell’infinito» (la lettera, trasmessa a Riccati tramite Bourguet, è senza data, ma probabilmente venne scritta intorno al 1715).

[2] «*Series finita* […] vel enim constat ex *numero membrorum pari* & terminatur per − veluti: 1−1, aut 1−1+1−1, aut 1−1+1−1+1−1 […] vel *numero membrorum impari*, & terminatur per +, veluti: 1, aut 1−1+1, aut 1−1+1−1+1» (Leibniz, 1716, p. 187).

[3] «Tunc evanescente natura numeri, evanescit etiam paris aut imparis assignabilitas […]. Et quoniam ab iis qui de aestimatione scripsere, […] sumi debere medium Arithmeticum, quod est dimidium summae; itaque natura rerum eandem hic observat *justitiae legem*» (Leibniz, 1716, p. 187).

[4] «Porro hoc argumentandi genus, etsi Metaphysicum magis quam Mathematicum videatur, tamen firmum est: & aliorum Canonum *Verae Metaphysicae* (quae ultra vocabulorum nomenclaturas procedit) major est usus in Mathesi, in Analysi, in ipsa Geometria, quam vulgo putatur» (Leibniz, 1716, p. 188). E nel 1929 Wittgenstein osserverà che «in nessuna confessione religiosa si è tanto peccato per abuso di espressioni metafisiche quanto nella matematica» (Wittgenstein, 1980, p. 18).

IV. Dalla storia alla didattica della matematica

Una recente esperienza didattica[5] ha evidenziato che alcuni studenti, riflettendo sulla serie di Grandi, fanno spontaneamente riferimento a giustificazioni piuttosto vicine all'argomento probabilistico di Leibniz-Wolf (Bagni, 2005a): questo potrebbe spingerci non solo a rilevare una possibile analogia tra i vocabolari di qualche allievo e di alcuni antichi pensatori, ma addirittura a sostenere un ritorno alla veneranda legge di Ernst Heinrich Haeckel (1834-1919), del 1874, ripresa in ambito didattico dagli studiosi secondo i quali la crescita cognitiva si modellerebbe sull'evoluzione storica (e dunque l'ontogenesi ripercorrerebbe la filogenesi: Piaget & Garcia, 1983). Come vedremo, tuttavia, un tale ritorno non sarà del tutto giustificato (Radford, 1997; si veda inoltre: D'Amore, Radford & Bagni, 2006).

Un test proposto ad alcuni studenti di III e IV *Liceo Scientifico* (16-18 anni) che non conoscevano le serie numeriche li ha portati a considerare "1–1+1–1+...", tenendo conto che "gli infiniti addendi sono sempre +1 e –1" e li ha invitati ad esprimere la propria "opinione". Alcuni di essi hanno affermato che la somma della serie considerate è ½, facendo riferimento a considerazioni simili all'argomento probabilistico di Leibniz-Wolf. Si veda ad esempio il seguente passaggio (1 minuto e 35 secondi):[6]

[1] Ricercatore: "Perché hai scritto che il risultato è ½?"

[2] Mirko: "Beh, all'inizio c'è 1, poi fa 0, poi 1, 0 e via. Ci sono infiniti +1 and –1."

[3] Ricercatore: "Vero, ma perché ½?"

[4] Mirko: "Se faccio le somme ottengo 1, 0, 1, 0 e sempre 1 e 0. La media è ½."

[5] Ricercatore: "E allora?"

[6] Mirko: "I numeri che si trovano sono 1, 0, e 1, 0, e 1, 0, sempre così: è ovvio, ogni due numeri uno è uno 0 e l'altro è un 1. C'è la stessa possibilità e la media fa ½."

[7] Mirko: [dopo 12 secondi] "Magari il mio è un discorso strano, magari anche sbagliato, ma non riesco a fare una cosa diversa: 0 e 1 non vanno bene di sicuro. Se dico che il risultato è uno di quelli, tipo 1, non conto tutti gli altri numeri, tutta la infinita fila di 0."

[8] Ricercatore: "Dunque tu dici che 0 e 1 non sono risultati giusti."

[9] Mirko: "Va bé e allora qual è il risultato? Io lì ho messo ½ come risultato dell'operazione perché ½ è la media, cioè quel numero che in un certo senso contiene 0 e 1."

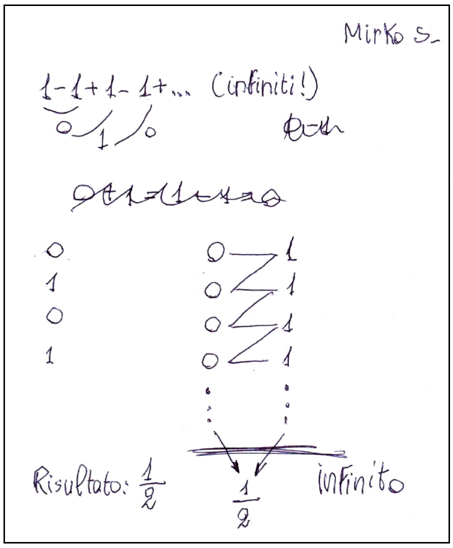
Mirko cerca quindi di trovare comunque "un risultato" (anche se ciò non veniva richiesto espressamente, nella traccia proposta) e tale atteggiamento può essere collegato al contratto didattico (Sarrazy, 1995).

---

[5] Un dettagliato panorama delle ricerche didattiche riferite all'analisi è in: Artigue, 1998.

[6] La metodologia della ricerca sperimentale si basa sul quadro teorico delineato in: Arzarello & Bartolini Bussi, 1998.

Il protocollo di Mirko è interessante, anche con riferimento alla nozione di infinito potenziale ed attuale. L'uso di elementi visuali (il segno orizzontale che in qualche modo divide il "finito" dall'"infinito") è peraltro assai significativo (segnaliamo anche le considerazioni espresse in: Bagni, in stampa): quando lo studente considera la prima fase (la *series finita*, seguendo Leibniz), abbiamo una sequenza di numeri, 0 e 1, collegati da alcuni segmenti; ma la situazione finale ("infinito") è diversa: non abbiamo posto per i "due" numeri (0, 1) e siamo tenuti a scrivere un solo valore dopo le frecce, la media, ½.



Più che un riferimento alla storia, dunque, essenziale per individuare la posizione di Mirko sembra essere il ruolo del contratto didattico, che ha spinto l'allievo a individuare "un risultato" (un commento più dettagliato dei dati sperimentali in: Bagni, 2005a).

Ebbene, se da un lato un'analisi didattica ci porta a comprendere questa influenza del contratto didattico (nonché ad esaminare alcune concezioni collegate all'infinito), si pone ora un problema pratico, per l'insegnante: come commentare tale situazione? E in particolare, come rispondere ai nostri allievi?

Al di là di ogni considerazione sull'interazione tra didattica e storia, affermare la convergenza della serie di Grandi a ½ è un *errore*. Dovremmo dunque correggere quegli studenti che manifestassero una propensione per l'argomento leibniziano?[7] Certamente. Ma la nostra correzione potrebbe fornirci l'occasione per una discussione della nozione (o delle nozioni) di convergenza.

V. Verso una matematica "ironica"

La serie di Grandi è indeterminata, questo è chiaro. Tuttavia essa "converge", ad esempio, nel senso di Georg Frobenius (1849-1917); tale nozione riprende le idee di Daniel Bernoulli e Joseph Raabe (1801-1859) ed è stata generalizzata da Ludwig Otto Hölder (1859-1937) e da Ernesto Cesàro (1859-1906), matematico del quale ricorre (2006) il centenario della scomparsa. In particolare, data la serie $a_0+a_1+a_2+\ldots$, consideriamo la successione delle somme parziali:

$$s_0 = a_0 \qquad s_1 = a_0+a_1 \qquad s_2 = a_0+a_1+a_2 \qquad \text{etc.}$$

Riprendiamo la serie precedentemente ricordata, $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{+\infty} (-x)^i = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$, con intervallo di convergenza $-1<x<1$. Frobenius mostrò (si veda: Kline, 1991, II, p. 1296) che

[7] Le frasi di Wittgenstein che aprono le *Note sul "Ramo d'oro" di Frazer* meritano un'attenta riflessione: «bisogna muovere dall'errore e convincerlo della verità. Occorre cioè scoprire la sorgente dell'errore; altrimenti non ci serve a nulla ascoltare la verità. Essa non può penetrare se qualcosa d'altro occupa il suo posto. Per convincere qualcuno della verità, non basta constatare la verità, occorre invece trovare la *via* dall'errore alla verità» (Wittgenstein, 1975, p. 17).

$\lim_{x \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} (-x)^i = \lim_{n \to +\infty} \frac{s_0 + s_1 + ... + s_n}{n+1}$, quando esiste il limite del secondo membro. Se ora svincoliamo queste osservazioni dalle serie di potenze, possiamo concludere che anche per una successione che, secondo l'usuale nozione di convergenza, risulta *non* essere convergente, possiamo introdurre un (diverso) tipo di "convergenza". Per $n \geq 0$ si indica con σ_n la media aritmetica di s_0, s_1, …, s_n. Possiamo affermare che una serie converge secondo Frobenius o Cesàro se converge nel senso usuale la successione delle medie σ_0, σ_1, σ_2, … E si verifica che la σ_0, σ_1, σ_2, … per la serie di Grandi è:

1, 1/2, 2/3, 1/2, 3/5, 1/2, 4/7, …

successione che *converge* (usualmente) a ½.[8] Dunque l'affermazione "la serie di Grandi non converge" richiede prudenza: la rortiana "ironia", intendendo con ciò la capacità di un soggetto di mettere in discussione il proprio vocabolario e la consapevolezza che tale vocabolario non «sia più vicino alla realtà degli altri» (Rorty, 2003, pp. 89-90).

Le domande che possono presentarsi sono: è proponibile un accostamento dell'usuale nozione di convergenza con la convergenza secondo Frobenius o Cesàro? Può esserci, inoltre, un ideale collegamento con l'argomento probabilistico di Leibniz-Wolf, spontaneamente ripreso da alcuni studenti?

Ulteriori ricerche potranno essere dedicate a un confronto critico delle diverse nozioni di convergenza; possiamo sin d'ora notare che tra le somme parziali calcolate, ad esempio, dopo 3, 5, 7 termini:

1–1+1, 1–1+1–1+1, 1–1+1–1+1–1+1 etc.

(sulle quali si fonda il punto di vista della convergenza "tradizionale") non c'è differenza: esse sono comunque 1. Ma il punto di vista di Frobenius e Cesàro distingue le situazioni alle quali tali somme parziali sono riferite: le medie sono rispettivamente 2/3, 3/5, 4/7… La "quantità" di addendi "passati", in quest'ultimo caso, è decisiva: è come se si affermasse che una regolarità "abbastanza lunga" rende "meno significativa" la successiva presenza di un'irregolarità. Per quanto riguarda le analogie, inoltre, interessante può essere il ricorso alla media aritmetica presente sia nell'approccio di Leibniz-Wolf che in quello di Frobenius e Cesàro.

VI. Riflessioni conclusive

Concludendo, non si tratta, ovviamente, di affiancare o di contrapporre due nozioni di convergenza, peraltro entrambe accettate e utilizzate in letteratura: si noti infatti che nel XX secolo tecniche basate sulla "convergenza" (sommabilità) secondo Frobenius o Cesàro sono state spesso applicate alle serie di Fourier, in quanto consentono una più efficace manipolazione di tali serie rispetto alla convergenza "usuale" (indichiamo: Moore, 1932; Wang, 1934; Bosanquet, 1940, ma la bibliografia sarebbe vastissima). Forse, tuttavia, l'esempio proposto può suggerire un approccio didattico aperto, tale cioè da rivalutare le diverse esperienze sulla quale il linguaggio (anche il linguaggio matematico) si basa.

Tra tali esperienze, la pratica algebrica è essenziale nel percorso di apprendimento di un allievo. Nel linguaggio dell'algebra lo studente identifica spontaneamente alcune procedure: il fatto che una serie sia scritta in tale linguaggio induce ad applicare le tradizionali "procedure

[8] Un classico esempio di serie che non converge neppure secondo Frobenius è dato dalla serie armonica: 1+1/2+1/3+1/4+1/5+…

algebriche". Ma è possibile e opportuno proporre una revisione ampia, mirata a stimolare una considerazione critica: i concetti e i processi dell'algebra sono certamente importanti, ma non per questo devono essere considerati "obbligatori". Un ulteriore sviluppo della nostra ricerca potrà dunque essere dedicato allo studio dell'influenza dell'uso del linguaggio algebrico sulla legittimazione di procedure e sulle argomentazioni.

Il problema del passaggio dal finito all'infinito è un problema culturale e coinvolge molti aspetti, anche storici, ma richiede una mediazione (Gadamer, 2000, p. 811) che potrebbe utilmente tener conto dell'"ironia" rortiana (Rorty, 2003, pp. 89-90). Una "matematica ironica" si rivelerebbe assai profonda, "matematicamente" sottile, e potrebbe contribuire a… far aprire gli occhi: dare agli studenti la possibilità di gettare uno sguardo consapevole sulla matematica stessa e sul mondo, svincolati dagli obblighi implacabili del tecnicismo, di quello che Heidegger (1982, p. 15) indica, criticamente, con il termine "pensiero calcolante" (si veda ancora: Gadamer, 2005, p. 119).

Ringraziamenti e riferimenti bibliografici

L'autore desidera ringraziare vivamente Fabrizio Pini (Mendrisio, Svizzera) per i preziosi commenti.

Artigue, M.: 1998, L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherches en didactique des mathématiques* 18(2), 231-262.

Arzarello F. & Bartolini Bussi, M.: 1998, Italian trends of research in mathematics education: A national case study in the international perspective. In J. Kilpatrick & A. Sierpinska (Eds.), *Mathematics education as a research domain: The search for identity*, 2, 243-262, Kluwer, Dordrecht.

Bagni, G.T.: 2005a, Mathematics education and historical references: Guido Grandi's infinite series. *Normat* 55, 4, 173-185.

Bagni, G.T.: 2005b, Infinite series from history to mathematics education, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, ISSN1473-0111. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/bagni.pdf

Bagni, G.T.: 2005c, The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5:4, 453-468.

Bagni, G.T.: in stampa, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory. *Educational Studies in Mathematics.*

Bosanquet, L. S.: 1940, A solution of the Cesaro summability problem for successively derived Fourier series. *Proceedings London Mathematical Society* 2, 46, 270-289.

D'Amore B.; Radford L. & Bagni GT.: 2006, Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 29B, 1, 11-40.

Fauvel J. & van Maanen J. (eds): 2000, *History in mathematics education. The ICMI Study*. Kluwer, Dordrecht.

Feyerabend, P.K.: 1996, *Ambiguità e Armonia*. Laterza, Roma-Bari.

Foucault, M.: 2005, *L'archeologia del sapere*. Rizzoli, Milano (*L'Archéologie du savoir*. Gallimard, Paris 1969).

Gadamer, H.G.: 2000, *Verità e metodo*, traduzione di G. Vattimo. Bompiani, Milano (*Warheit und Methode: Gründzuge einer philosophischen Hermeneutik*. Mohr, Tübingen 1960).

Gadamer, H.G.: 2005, *Linguaggio*, Di Cesare, D. (a cura di). Laterza, Roma-Bari.

Grones, G.: 1831, *Sulle quantità immaginarie. Lettera indirizzata al nobilissimo e dottissimo Sig. Francesco Amalteo*. Alvisopoli, Venezia.

Heidegger, M.: 1982, Identità e differenza. *Aut Aut* 187-188, 2-38 (*Identität und Differenz*. Neske, Pfullingen 1957).

Kline, M.: 1991, *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press, New York 1972).

Leibniz, G.W.: 1716, Epistola G.G.L. ad V. Clariss. Christianum Wolfium, Professorem Matheseos Halensem, circa scientiam infiniti. *Excerpta ex Actis Eruditorum Lipsiensibus*, V suppl., 183-188.

Moore, C.N.: 1932, Summability of Series. *American Mathematical Monthly* 39, 2, 62-71.

Piaget, J. & Garcia, R.: 1983, *Psychogenèse et histoire des sciences*. Flammarion, Paris.

Radford, L.: 1997, On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of mathematics* 17(1), 26-33.

Riccati, J.: 1761, *Opere*. Giusti, Lucca.

Rorty, R.: 2003, *La filosofia dopo la filosofia*. Laterza, Roma-Bari (*Contingency, irony, and solidarity*. Cambridge University Press, Cambridge 1989).

Sarrazy, B.: 1995, Le contrat didactique. *Revue Française de Pédagogie* 112, 85-118.

Silov, G.E.: 1978, *Analisi matematica. Funzioni di una variabile*. Mir, Mosca (*Matematičeskij analiz. Funkzii odnogo peremennogo*. Nauka, Moskva 1978).

Wang, F.T.: 1934, Cesaro summation of the successively derived Fourier series. *Tohoku Mathematical Journal* 39, 399-405.

Wittgenstein, L.: 1975, *Note sul "Ramo d'oro" di Frazer*. Adelphi, Milano (Bemerkungen über Frazers "The Golden Bough". *Synthese* 17, 233-253, 1967).

Wittgenstein, L.: 1980, *Pensieri diversi*. Adelphi, Milano (*Vermischte Bemerkungen*. Culture and Value. Blackwell, Oxford 1977).