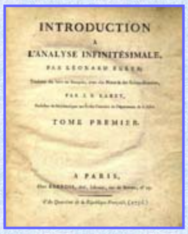
Master in didattica delle Scienze, Udine, 2007
L'infinità dei numeri primi.
Un approccio storico-culturale alle dimostrazioni per la didattica della matematica



Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

- **Storia e didattica**: presenza e questioni
- **Considerazioni teoriche**: storia e cultura
- **Un grande teorema**: Euclide, Kummer, Euler
- **Riflessioni conclusive**: elementi storici e didattica

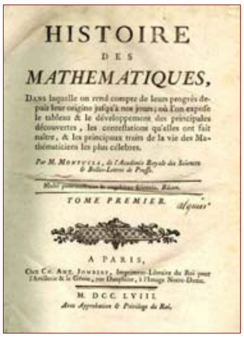
La storia nella didattica: una presenza e molte questioni

- La **storia** è ormai un elemento di primo piano nella **didattica** della matematica.
- Convegni e iniziative internazionali:

  ICMI-Study, Luminy, Marseille (Fauvel & van Maanen, 2000);

  gruppo HPM (Uppsala 2004);

  ESU-5, Praga 2007…



La storia nella didattica: una presenza e molte questioni

- Alcune domande "generali":
- è corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti **alla sistemazione moderna**?
- possiamo cioè **riferire l'intera evoluzione storica alle nostre attuali concezioni**?
- quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali**?
- I "momenti di passaggio" verso la formazione della matematica "compiuta" (la nostra?) costituivano ovviamente **la matematica "compiuta" dell'epoca, in base a concezioni socio-culturali precise**.

Sommario

- **Storia e didattica**: presenza e questioni
- **Considerazioni teoriche**: storia e cultura
- **Un grande teorema**: Euclide, Kummer, Euler
- **Riflessioni conclusive**: elementi storici e didattica

La storia nella didattica: ci sono molti aspetti da considerare

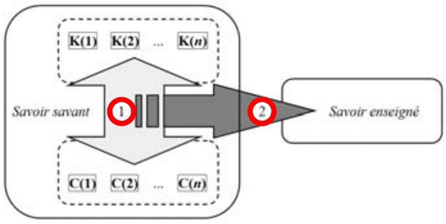
- Lo sviluppo della conoscenza, la *transposition didactique*, il ruolo della storia nella nostra comprensione dello sviluppo del sapere **non sono problemi indipendenti.**
- **Una *transposition didactique* è sempre basata su di una serie di assunzioni epistemologiche sullo sviluppo della conoscenza.**
- Dunque una *transposition didactique* presuppone sempre una teoria della conoscenza. Questo punto è, a nostro avviso, essenziale.

La storia nella didattica: ci sono molti aspetti da considerare

- Distinguiamo fra (almeno) tre tipi di epistemologie:
- quelle che **non considerano l'aspetto storico**: le *epistemologie a-storiche*;
- quelle che considerano le radici storiche del sapere **senza però affermare che gli aspetti del contesto culturale** abbiano importanza fondamentale; possono essere denominate *epistemologie storiche*; infine…
- **quelle che evidenziano la storicità della conoscenza e affermano che gli aspetti culturali hanno un ruolo cognitivo ed epistemologico fondamentale. Possono essere chiamate *epistemologie storico-culturali* (ad esempio: Crombie, Radford).**
- Scegliamo di collocarci in questo terzo quadro teorico.

La storia nella didattica: ci sono molti aspetti da considerare

- Sarà dunque importante analizzare **(1)** come le varie "versioni" K(*i*) di una conoscenza matematica si collegano ai rispettivi contesti culturali C(*i*) e **(2)** qual è il ruolo, nella *transposition*, della "storia di K".



Assunzioni della prospettiva storico-culturale (Radford)

- (1) la conoscenza si collega alle **azioni** richieste per risolvere problemi e i problemi sono risolti **nei contesti storico-culturali** dei periodi considerati;
- (2) la conoscenza si costruisce **socialmente**; le istituzioni culturali influenzano gli allievi.
- Nella prospettiva degli **"ostacoli epistemologici"**, invece, i collegamenti tra C(*i*) e K(*i*) non sono diretti: gli ostacoli epistemologici sono classificati a parte rispetto a quelli culturali. Lo sviluppo della conoscenza non è governato dalla cultura ma dalla Ragione (Piaget) e ciò porta ad una concezione ricapitolazionista in cui gli ostacoli "storici" ricompaiono nella pratica didattica.

Sommario

- **Storia e didattica**: presenza e questioni
- **Considerazioni teoriche**: storia e cultura
- **Un grande teorema**: Euclide, Kummer, Euler
- **Riflessioni conclusive**: elementi storici e didattica

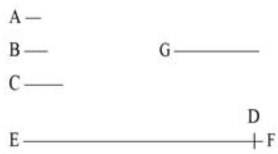
Esaminiamo un esempio classico: quanti sono i numeri primi?

- **I numeri primi sono più di ogni assegnata quantità di primi**, ovvero: **i numeri primi sono infiniti.**
- E numerose dimostrazioni:
  - **Euclide** (300 a.C.)
  - **Ernst Eduard Kummer** (1878)
  - **Leonhard Euler** (1737 e 1748)
  - **Paul Erdös** (1938)
  - **Harry Fürstenberg** (1955)

  etc.
- Esaminiamo alcune di esse evidenziando le analogie e le differenze.

Un esempio classico: la dimostrazione di Euclide (300 a.C.)

- *Dimostrazione* (Euclide, 300 a.C.). Siano A, B, C gli assegnati numeri primi. Affermo che ci sono altri numeri primi oltre ad A, B, C. Sia DE il minimo comune multiplo di A, B, C; si aggiunga l'unità DF a DE.



- Ora, **EF o è primo o non lo è.**
  - Sia EF primo. Allora abbiamo trovato un numero primo EF oltre ad A, B, C.

Un esempio classico: la dimostrazione di Euclide (300 a.C.)

**"Reductio ad absurdum,
which Euclid loved so much,
is one of a mathematician's finest weapons.
It is a far finer gambit than any chess play:
a chess player may offer the sacrifice
of a pawn or even a piece,
but a mathematician
offers the game"**

Godfrey H. Hardy
(*A Mathematician's Apology*, 1941)

Un esempio classico: la dimostrazione di Euclide (300 a.C.)

- Una prima questione è però interessante: **si tratta davvero di una "dimostrazione per assurdo"?**
- Certamente la parte centrale (evidenziata) si basa su di una *reductio ad absurdum*. Ma essa si riferisce solo alla sezione seguente: ***se un numero (primo) A, B, C divide due numeri consecutivi DE e DF, esso divide la loro differenza DF, cioè l'unità, e questo è impossibile*** (si noti che in questo caso la primalità di A, B, C è un'ipotesi non necessaria).
- La dimostrazione di Euclide considera inizialmente alcuni primi (A, B, C), quindi **costruisce** un nuovo primo e **mostra che esso non è uguale ad alcuno dei primi dati: *questa* parte è dimostrata per assurdo.**

Un esempio classico: la dimostrazione di Euclide (300 a.C.)

- Una rivisitazione moderna della dimostrazione euclidea può evidenziare con chiarezza il suo carattere sostanzialmente "costruttivo".
- Sia $\mathbf{N_1}$ un intero positivo maggiore di 1: esso ha (almeno) **un** fattore primo.
- N_1 e N_1+1 sono consecutivi, dunque coprimi. Allora $\mathbf{N_2} = N_1 \cdot (N_1+1)$ ha (almeno) **due** fattori primi diversi.
- N_2 e N_2+1 sono consecutivi, dunque coprimi. Allora $\mathbf{N_3} = N_2 \cdot (N_2+1)$ ha (almeno) **tre** fattori primi diversi.
- Questo procedimento può essere iterato indefinitamente: dunque si dimostra che **esiste una quantità grande a piacere di numeri primi.**

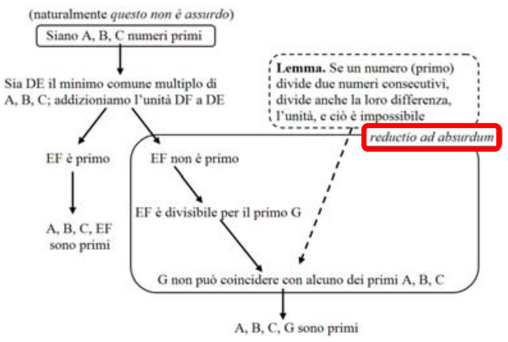
25. November. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.

Hr. Kummer machte folgende Mittheilung:

Neuer elementarer Beweis des Satzes, dass die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche ist.

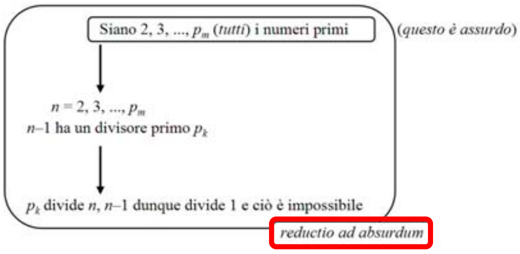
- Ma si noti che spesso le moderne dimostrazioni del teorema considerato sono simili alla seguente:
- *Dimostrazione* (Kummer, 1878).
  Supponiamo che esista soltanto la quantità finita di primi 2, 3, ..., p.
  Sia m il prodotto di tali primi; $m-1$ è un prodotto di primi, dunque ha un divisore primo q in comune con m; q divide $m-(m-1) = 1$, il che è assurdo.
- In questo caso si afferma che **i numeri primi sono infiniti perché si dimostra che non è possibile considerare un numero finito di primi.**

Confrontiamo la dimostrazione di Euclide e la dimostrazione di Kummer



Confrontiamo la dimostrazione di Euclide e la dimostrazione di Kummer

- Nella versione di Kummer, invece, la proprietà provata per assurdo è **il vero nucleo della dimostrazione:**



Confrontiamo la dimostrazione di Euclide e la dimostrazione di Kummer

- In una dimostrazione per assurdo **sia la tesi che la sua negazione hanno un ruolo essenziale**, dunque la considerazione di un insieme infinito, in questo tipo di dimostrazione, è inevitabile (il lavoro di Kummer è intitolato *Neuer elementarer Beweis, dass die Anzahl aller Primzahlen einen unendliche ist*).
- La Proposizione IX-20 non fa esplicito riferimento all'infinito, ma è compatibile con la nozione aristotelica di infinito potenziale (*Fisica*, Γ, 6-7, 207a, 22-32).

Un celebre esempio: una dimostrazione di Euler (1748)

- È didatticamente significativo inquadrare le dimostrazioni di Euclide e di Kummer nei rispettivi **contesti culturali**, con particolare riferimento alla concezione di infinito. Ciò consente, innanzitutto, di proporre agli studenti una conoscenza del *savoir* collegata a quella dei momenti storici considerati.
- Dimostrazioni in settori diversi sono interessanti per i **contesti matematico e non matematico**.
- Faremo un omaggio al grande **Euler** anticipando di alcune settimane gli auguri per il 300° compleanno!

Un celebre esempio: una dimostrazione di Euler (1748)

- Seguiremo: L. Euler, *Introduction a l'Analyse Infinitésimale*, Barrois, Paris 1796, prima edizione francese, vol. I; le figure sono tratte dalle pp. 208, 209 e 213.

172. Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quelque soit le nombre des facteurs, infini ou fini. Par exemple, on aura

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\&c.$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. D

- Consideriamo la serie $1/(1–x) = 1+x+x^2+x^3+\ldots$ della quale si fornisce l'esempio per $x = 1/2$.
- Consideriamo poi i **due** casi per $x = 1/2$ e $x = 1/3$.

210 DES SÉRIES RÉSULTANTES

série, où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux; c'est-à-dire, toutes les puissances de deux. On aura ensuite

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\&c.$$

On ne trouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 & 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 & 3.

173. Donc, si au lieu de α, β, γ, δ &c. on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, & qu'on suppose

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\ \&c.}$$

on aura

$$P = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\&c.$$

Série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers, que ceux qui en sont formés par la multiplication. Or comme tous les nombres sont ou des nombres premiers, ou des nombres composés de ceux-ci par la multiplication, il est évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs.

Un celebre esempio: una dimostrazione di Euler (1748)

Soit $n = 1$; comme nous avons démontré auparavant que

$$l\frac{1}{1-x} = x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}+\&c;$$

on aura, en supposant

$$x=1,\ l\frac{1}{1-1} = l\,\infty = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\&c;$$

mais le logarithme d'un nombre infini ∞ est lui-même infiniment grand; donc

$$M = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\&c. = \infty.$$

- La conclusione è immediata: i numeri primi non possono che essere **infiniti**.

En prenant les produits, on trouvera

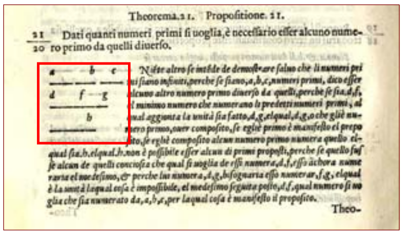
$$M = \infty = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\ \&c.}$$

Confronto delle dimostrazioni proposte: storia e attività semiotica

- Ogni cultura, nella storia, ha sviluppato una propria **"tecnologia dell'attività semiotica" per esprimere la conoscenza matematica** (Radford, 2002), cosa che può essere messa in relazione con il contesto culturale *matematico*.
- **La differenza in termini di simboli tra Euclide ed Euler è chiaramente decisiva.**
- La complessità dei segni e dei corrispondenti sistemi semiotici è di primaria importanza per lo sviluppo di idee e di procedure matematiche.

Confronto delle dimostrazioni proposte: storia e attività semiotica

- La rappresentazione euclidea dei numeri era basata su segmenti: i numeri venivano dunque oggettivati in **entità concrete** mediante le quali la rappresentazione di un insieme infinito (o di una quantità infinita) non era possibile.


Theorema.31. Propositione.31.
31 Dati quanti numeri primi si voglia, è necessario esser alcuno nume-
30 ro primo da quelli diverso.

Confronto delle dimostrazioni proposte: storia e attività semiotica

- Il simbolismo matematico al tempo di Euler **rendeva possibile calcoli impensabili nell'Antichità** o anche nel XVI secolo: la costruzione dell'espressione

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ \&\text{c.}}$$

dalla serie $1/(1–x) = 1+x+x^2+x^3+\ldots$ è essenziale.

- Inoltre i segni matematici sono stati elaborati per risolvere un problema mediante **procedure che erano considerate legittime**: ogni cultura ha i propri criteri di distinguere tra procedure dimostrative valide e invalide (Crombie, 1995).

Confronto delle dimostrazioni proposte: storia e attività semiotica

- Il ruolo del simbolo **"∞"** è molto importante nella dimostrazione di Euler: quando scrive

$$M=\infty=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ \&\text{c.}}$$

Euler si riferisce esplicitamente ad una quantità (un "numero") da considerare "= ∞" o no.

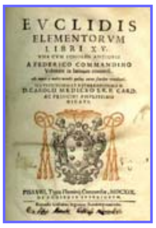
- Nel momento in cui si confronta un "numero infinito" con una frazione, **l'infinito è coinvolto in una procedura, in un "calcolo".**

Sommario

- **Storia e didattica**: presenza e questioni
- **Considerazioni teoriche**: storia e cultura
- **Un grande teorema**: Euclide, Kummer, Euler
- **Riflessioni conclusive**: elementi storici e didattica

Conclusione: elementi storici e didattica

- Una corretta prospettiva storica mostra che, a parte gli "stili" di dimostrazione, l'universalità della matematica implica una varietà di procedure (Dhombres, 1993, p. 401) in particolari contesti.



Conclusione: elementi storici, didattica, linguaggio

- Naturalmente tale prospettiva richiede un notevole **livello di consapevolezza storica ed epistemologica da parte degli insegnanti.**
- Tuttavia, come abbiamo avuto occasione di ribadire,

ogni *transposition didactique* richiede necessariamente la presenza di una teoria della conoscenza.

- Per questo le questioni presentate possono essere utilmente considerate nella **formazione degli insegnanti** di matematica.

Conclusione:
la matematica come attività umana

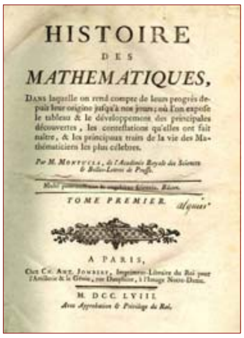
- Dal punto di vista didattico **è utile** proporre diverse dimostrazioni di un teorema: spesso le dimostrazioni suggeriscono "nuovi mondi" di idee matematiche.
- Ma anche introducendo procedure apparentemente legate ad aspetti tecnici, è necessario **riferirsi ad una dimensione culturale ampia e tener conto anche di elementi non matematici.**
- La matematica, come l'arte e la letteratura, è **un'attività umana** che, invece di aver a che fare con verità eterne e astratte, riguarda **costruzioni umane, spesso nate dalla considerazione di problemi.**

Conclusione:
la matematica come attività umana

- Gli oggetti ai quali il linguaggio della matematica, con il suo simbolismo, fa riferimento sono dunque costruzioni sociali con una precedente storia culturale.
- Negli ultimi dieci anni, nella **ricerca didattica** è emersa la ricerca di concettualizzazioni teoriche che **superino** l'analisi dei contenuti matematici, le tecniche statistiche e la psicologia cognitiva.
- Ci siamo resi conto che **la cognizione è una cosa complicatissima, assai più dell'individuo chiuso in se stesso della filosofia cartesiana (o dell'individuo della sintesi a-storica dell'epistemologia kantiana).**

Conclusione:
la matematica come attività umana

- Siamo dunque diventati consapevoli che la cognizione si trova all'incrocio di numerose strade e che ogni tentativo di comprenderla deve assumere **un atteggiamento multidisciplinare** **del quale la prospettiva storica è certamente parte integrante.**


HISTOIRE
DES
MATHEMATIQUES,
Dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau & le développement des principales découvertes, les contestations qu'elles ont fait naître, & les principaux traits de la vie des Mathématiciens les plus célebres.
TOME PREMIER.
A PARIS,
M. DCC. LVIII

Grazie a Tommy Dreyfus (Israele)

A tutti Voi grazie dell'attenzione

"La storiografia, o meglio la storiograficità, in quanto modo di essere dell'Esserci che ricerca, è possibile solo in quanto l'Esserci, nel fondamento del suo essere, è determinato dalla storicità"

Martin Heidegger

Sein und Zeit, § 6

(nella foto, uno dei – rarissimi – sorrisi di Heidegger)