Giornate Diffusione della Cultura 2007
Udine, 30 marzo 2007 – Master Didattica Scienze

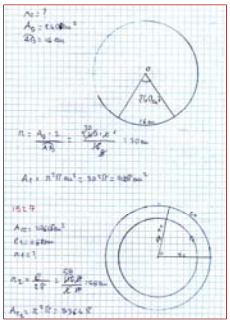
Strumenti per la geometria

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Introduzione: geometria e strumenti, un abbinamento… naturale!

- Potremmo confondere, a prima vista, il "quaderno di italiano" e il "quaderno di storia", o scambiare gli appunti di letteratura latina con quelli di filosofia: **ma i disegni del quaderno di geometria sono inconfondibili.**
- E ovviamente per realizzare tali disegni servono degli **strumenti!**



Geometria e strumenti: da Platone (e Apollonio) un abbinamento essenziale!

- L'importanza degli strumenti va tuttavia ben oltre la realizzazione pratica di figure geometriche.
- "Sono state date varie spiegazioni circa la restrizione di usare nelle costruzioni **soltanto riga e compasso.** La linea retta e la circonferenza erano, secondo i Greci, figure fondamentali e la riga e il compasso sono i loro analoghi fisici…"
- "È stata anche avanzata come spiegazione l'ipotesi che Platone si sia opposto all'uso di altri strumenti meccanici perché essi avevano attinenza più con il mondo dei sensi che con quello delle idee" (Kline, 1991).

Due celebri strumenti: caratteristiche di riga e compasso

- La **riga** ha un (solo) bordo, è illimitata, non graduata: permette solo di tracciare la retta per due punti distinti.
- Il **compasso** permette di tracciare una circonferenza noti il suo centro e un suo punto.
- Osservazione: in aggiunta a riga e compasso, la **squadra** è utile perché abbrevia alcuni procedimenti ma non permette nuove costruzioni (anzi, renderebbe superfluo il compasso).
- L'uso di alcuni software ricalca i procedimenti eseguibili usando (solo) la riga ed il compasso: **Cabri**, nella versione originaria, consentiva di effettuare le sole costruzioni dette "con riga e compasso".

Riassumendo: problemi risolubili "con riga e compasso"

- Un problema si dice **risolubile con riga e compasso** quando può essere ricondotto ad una **sequenza finita di operazioni scelte tra le seguenti:**

I. dati due punti, costruire la retta passante per essi;
II. dati un punto e un segmento, trovare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
III. date due rette, trovarne (se esiste) il punto comune;
IV. date una retta e una circonferenza, trovarne (se esistono) i punti comuni;
V. date due circonferenze, trovarne (se esistono) i punti comuni.

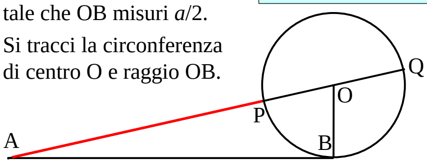
Esempio di problema "risolto con riga e compasso": un'equazione di II grado

- Costruiamo la radice positiva dell'equazione: $x^2+ax-b^2 = 0$
- Siano a, b due reali positivi (che interpreteremo come misure di due segmenti).
- Si noti che affinché una radice sia costruibile (come segmento) deve essere **reale positiva**. Nell'equazione data una radice è positiva per la regola di Cartesio: infatti i coefficienti dell'equazione presentano una permanenza (1; a) ed una variazione (a; $-b^2$).
- Presentiamo **una costruzione della radice positiva tratta dalla *Geometria* di Cartesio (1637).**

- Sia b la misura di AB e **si conduca per B la retta perpendicolare ad AB**; su di essa si fissi un punto O tale che OB misuri $a/2$.

operazione possibile

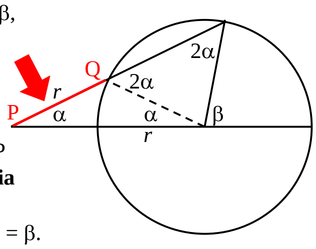
- Si tracci la circonferenza di centro O e raggio OB.



- P, Q sono i **punti in cui la retta AO incontra la circonferenza**.
- È **x la misura di AP**; allora la misura di AQ è $x+a$: $x(x+a) = b^2$, dunque è proprio: $x^2+ax-b^2 = 0$

A proposito dell'uso della riga…
La trisezione dell'angolo di Archimede

- Si voglia trisecare β, dunque costruire α tale che 3α = β.
- Costruita la circonferenza, si consideri il punto P **in modo che PQ sia uguale al raggio.**



- Si dimostra che 3α = β.
- Ma abbiamo usato **"impropriamente"** la riga (è stato **"fissato" un segmento** su di essa…): la trisezione di un angolo generico è **impossibile** con riga e compasso.

Geometria e strumenti:
concludiamo la nostra introduzione

- In questa breve introduzione abbiamo già intravisto alcuni punti importanti:
- alcuni strumenti sono fondamentali, sia nella **pratica** didattica…
- che nella **storia** della geometria;
- tali strumenti possono essere usati **"propriamente" oppure "impropriamente"** rispetto a certe "regole" (dunque ad una procedura socialmente accettata).
- Andremo ora a presentare il sommario del nostro intervento, che richiederà innanzitutto la precisazione di un adeguato quadro teorico.

Strumenti per la geometria

Sommario

- **Un quadro teorico**: Vygotskij, Wartofsky
- **Uno "strumento" chiave**: la storia della geometria
- **Due grandi a confronto**: Euclide e Bombelli
- **Ripensare Wittgenstein:** un efficace meccanismo
- **Infine: una geometria…** …"senza strumenti"?

Riflettiamo sugli artefatti

- Vygotskij riconosce funzioni di mediazione agli strumenti **tecnici** e **psicologici** (segni o **strumenti di mediazione semiotica**).
- Wartofsky identifica gli strumenti tecnici come **artefatti primari**; gli **artefatti secondari** sono usati per fissare e trasmettere le modalità di azione.
- Una teoria matematica è un **artefatto terziario** che organizza i modelli costruiti come artefatti secondari.
- Didatticamente significativo è che l'uso degli artefatti primari richieda la loro **manipolazione** (ciò si accorda con i recenti lavori di Lakoff, Johnson e Núñez).

Il cerchio, il compasso, il bicchiere…

- Fin dai tempi più antichi l'uomo avrà individuato una figura "interessante" (un cerchio) ad esempio nella sezione di un tronco d'albero (un cilindro può rotolare facilmente).
- Oggi, i nostri allievi chiamati a tracciare una circonferenza possono usare sia il compasso…

  che, ad esempio, un (meno nobile) bicchiere.

Ma che differenza c'è tra l'uso del *compasso* e l'uso del *bicchiere?*

- Il bicchiere è più facile da utilizzare, non si buca il foglio, si può usare la penna. Ma con un bicchiere si può tracciare una sola circonferenza (della quale peraltro non si identifica facilmente il centro); il compasso è uno strumento più generale.
- La principale differenza tra i due modi di procedere, e tra i due strumenti da utilizzare, è così riassumibile:
- **il compasso "incorpora" la definizione euclidea di circonferenza,**
- **mentre accarezzando il bordo rotondo di un bicchiere possiamo solo percepire una curvatura "regolare": il bicchiere, insomma, incorpora soltanto quella che si può definire, in un approccio elementare, una caratteristica** (Chassapis, 1999).

Artefatti e strumenti
Non si tratta di sinonimi…

- Il **compasso** è un artefatto primario; ma non basta averlo in mano per disegnare un cerchio: si potrebbe usare un tale artefatto per scrivere, come se fosse una semplice matita, oppure in altri modi non significativi geometricamente.
- Un **bicchiere** viene in generale utilizzato non per tracciare una circonferenza, ma per altri scopi (come fa Hans Georg Gadamer in questa foto).

Artefatti e strumenti
Non si tratta di sinonimi…

- Per utilizzare uno strumento correttamente bisogna conoscere le regole, far proprie le "istruzioni per l'uso" (e, magari, darsi di esse una giustificazione).
- La presenza di un artefatto secondario è indispensabile perché l'artefatto primario possa funzionare "bene", dunque "esistere", in particolare, come *strumento*.
- Nell'approccio strumentale di **Pierre Rabardel** (1995), per poter considerare un artefatto alla stregua di un vero e proprio "strumento" è necessaria infatti **un'attività costruttiva da parte del soggetto**, attività che dipende da vari aspetti concettuali e sociali.

Artefatti e strumenti
per la didattica

- Abbiamo finora considerato strumenti importanti (per alcuni versi indispensabili!) per rappresentare gli oggetti della geometria.

- Ma possiamo considerare il termine "strumenti" in un'accezione assai più vasta.
- La didattica della geometria (e, in generale, della matematica) può basarsi su "strumenti" meno tradizionali della riga e del compasso…

Strumenti per la geometria
Sommario

- **Un quadro teorico**: Vygotskij, Wartofsky
- **Uno "strumento" chiave**: la storia della geometria
- **Due grandi a confronto**: Euclide e Bombelli
- **Ripensare Wittgenstein:** un efficace meccanismo
- **Infine: una geometria…** …"senza strumenti"?

La storia:
uno "strumento" per la didattica

- La storia è stata applicata in ambito didattico dalla fine del XIX secolo (nel **1896** è stato pubblicato un volume di F. Cajori dedicato a tali applicazioni).
- Ma ci sono importanti questioni epistemologiche:
- è corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti **alla sistemazione moderna**?
- Quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali**?
- Le fasi che consideriamo come momenti di passaggio verso la formazione della matematica "compiuta" (la nostra?) costituivano **la matematica "compiuta" dell'epoca, in base a precise concezioni culturali**.

Implicite (discutibili!) posizioni nella storiografia matematica

- Ma la storiografia spesso assume posizioni assolute, interpretando **la matematica di un periodo con riferimento alla *nostra* matematica:**
- "L'espressione di Wallis è **molto lacunosa**, ma contiene l'idea giusta" (M. Kline).
- "Leibniz non si curava della propria **imprecisione concettuale**" (C.B. Boyer).
- "Il sottotitolo del volume di Lagrange rivela **la follia del tentativo** del suo autore" (M. Kline).

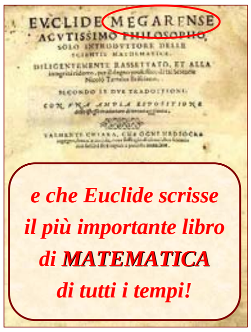
Storia e matematica: le moderne concezioni del passato

- "Anche il più titanico sforzo di rinunciare alle nostre conoscenze nel tentativo di vedere l'evento storico nella sua purezza non avrebbe successo: tutti noi **siamo condannati a portarci dietro le nostre moderne concezioni del passato**" (Luis Radford, 1997).
- Ma se siamo obbligati a guardare la storia attraverso **una lente non del tutto trasparente**, non ci resta che scegliere tra le opzioni: o rinunciare ad osservare il passato per non snaturarlo con concezioni moderne…

La Storia nella Didattica: si collegano culture diverse

- …oppure **accettare la presenza di tale lente** e le distorsioni che introduce, tenendo presente che attraverso essa poniamo in contatto **due culture "diverse ma non incommensurabili"** (L. Radford, P. Boero, C. Vasco, 2000).
- Anche a questa scelta sono collegate difficoltà:
- il tentativo di **imitare l'approccio** ai problemi dei matematici del passato può rivelarsi ingenuo;
- la ricostruzione dell'**ambiente socio-culturale di un periodo lontano non è semplice**: esige preparazione storica e consapevolezza epistemologica.

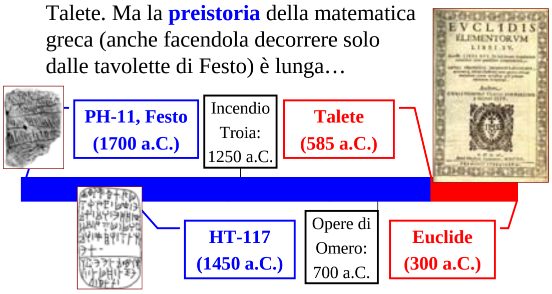
Ventitre secoli fa: Euclide di Alessandria



- La vita di Euclide è del tutto sconosciuta.
- La stessa indicazione geografica è incerta: a volte venne confuso con il filosofo **Euclide di Megara**.
- Sappiamo che alcuni discepoli di Euclide operavano nel III sec. a.C. in Alessandria…

La grande stagione della matematica culminata negli *Elementi* di Euclide

- Euclide è il **punto di arrivo** di una grande stagione della matematica, iniziata quasi tre secoli prima con Talete. Ma la **preistoria** della matematica greca (anche facendola decorrere solo dalle tavolette di Festo) è lunga…



Tra "algebra" e geometria: l'algebra geometrica

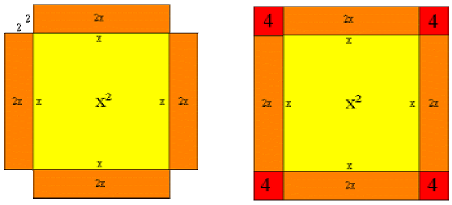
- Euclide usa la visualizzazione geometrica (anche) **per dimostrare delle proprietà algebriche.**
- Nello spirito del II libro degli *Elementi*, ad esempio, dimostriamo che:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Un approccio recentemente rivalutato dalla didattica della matematica!

Tra “algebra” e geometria: l’algebra geometrica

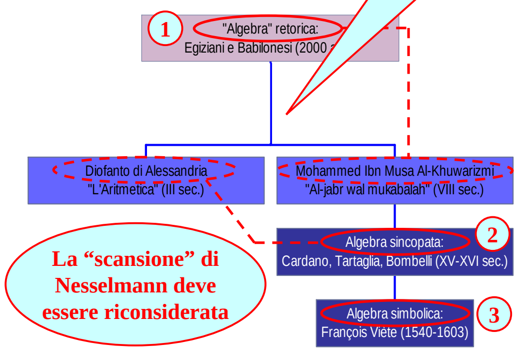
- Nello spirito dell’algebra geometrica, la matematica araba costruisce le tecniche per risolvere equazioni algebriche come: $x^2+8x = 105$



- $(x+4)^2 = 105+16$ da cui: $x+4 = 11$ quindi: $x = 7$

Nesselmann (1842) e l’espressione algebrica

Qui però qualche dato scompare!



Riflessione: la selezione dei dati storici è epistemologicamente neutra?

- G. Nesselmann, un secolo e mezzo fa, propose dunque per l’algebra la celebre scansione in tre fasi:

retorica → **sincopata** → **simbolica**

- Ciò fa pensare al *progresso* dell’algebra (L. Radford) “secondo il quale gli oggetti vengono **purificati** eliminando da essi tutta la dannosa sostanza fisica”…
- Ma come si spiega l’**algebra geometrica euclidea**?
- **Il rapporto (teorico e “culturale”) tra algebra e geometria è della massima importanza e non può essere ridotto alla considerazione platonistica di un’algebra “ideale”!**

Strumenti per la geometria
Sommario

- **Un quadro teorico**: Vygotskij, Wartofsky
- **Uno “strumento” chiave**: la storia della geometria
- **Due grandi a confronto**: Euclide e Bombelli
- **Ripensare Wittgenstein:** un efficace meccanismo
- **Infine: una geometria…** …“senza strumenti”?

La poesia “algebrica” di Tartaglia

- Quando che ’l cubo con le cose appresso se agguaglia à qualche numero discreto trovan dui altri differenti in esso. $x^3+px = q$, $p>0,\ q>0$, $q = u-v$
- Da poi terrai questo per consueto che ’l lor produtto sempre sia uguale al terzo cubo delle cose neto. $uv = (p/3)^3$
- El residuo poi suo generale delli lor lati cubi ben sottratti **varrà la tua cosa principale**. $x = \sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}$

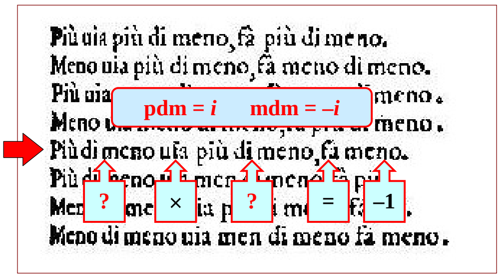
Questa semplificazione è delicata

L’*Algebra* di Bombelli

- La semplificazione dei radicali doppi fu studiata in alcuni casi particolari da **Rafael Bombelli** (1526-1573).
- Bombelli, bolognese (è stato trovato il certificato di battesimo a Borgo Panigale), pubblicò il proprio capolavoro, ***Algebra***, nel 1572-1579.


L'ALGEBRA
OPERA
Di Rafael Bombelli da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

“Più di meno”, “meno di meno”


Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia ... meno.
Meno ... meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno ... più.
Meno ... meno.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

- Queste “regole” si trovano a pagina 179 di *Algebra.*
- **Come le possiamo interpretare modernamente?**

Ma… che cosa ha a che fare tutto ciò con la geometria?

- Nel presentare pdm e mdm, Bombelli scrive:
- “Ho trovato un’altra sorte di R. c. legate molto differenti dall’altre, la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero […] la quale parerà a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch’io, sin che ho trovato la sua dimostrazione in linee”.
- Dunque **la “dimostrazione in linee” costituisce per Bombelli un essenziale elemento per l’accettazione della correttezza del risultato algebrico. In questo senso è chiara un’analogia con l’approccio greco.**

Bombelli (e più tardi Cartesio) capovolgono l’impostazione greca!

- Tuttavia, se qui Bombelli attribuisce una netta importanza all’interpretazione geometrica, non possiamo dimenticare che **in tutta la sua opera la “costruzione in linee” viene sempre ad essere successiva rispetto al ricavo algebrico.**
- Dunque se per i Greci la geometria era lo strumento primario, già per Bombelli (e successivamente per Cartesio) il ruolo dell’algebra viene rivalutato.
- Nella storia della matematica, quindi, algebra e geometria sono state legate da **un rapporto strumentale delicato e per molti versi reciproco.**

Geometria e strumenti (più o meno “tradizionali”)

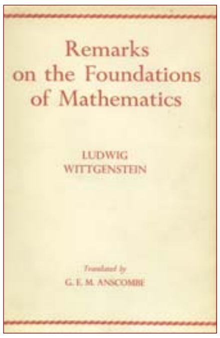
- Abbiamo finora parlato:
- di alcuni **strumenti tradizionali** della pratica geometrica (riga, compasso);
- dell’importante **differenza tra artefatto e strumento** (Rabardel), differenza che si collega all’attività che il soggetto svolge con l’artefatto;
- di “strumenti” importanti per introdurre la geometria nelle nostre aule scolastiche, come l’uso della **dimensione storica.**
- Ci occuperemo ora di strumenti meno tradizionali, ma certamente non meno importanti…

Strumenti per la geometria

Sommario

- **Un quadro teorico**: Vygotskij, Wartofsky
- **Uno “strumento” chiave**: la storia della geometria
- **Due grandi a confronto**: Euclide e Bombelli
- **Ripensare Wittgenstein:** un efficace meccanismo
- **Infine: una geometria…** …“senza strumenti”?

In alcuni passi delle *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica…*

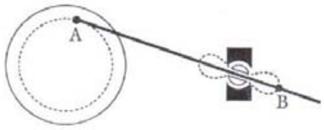


- …opera pubblicata (1956) postuma cinquantun anni fa, Ludwig Wittgenstein descrive un dispositivo meccanico
- **mediante il quale è possibile “suggerire” la dimostrazione di una proposizione.**

- Un primo accenno è nella III parte: «supponiamo che io abbia davanti a me le fasi del movimento di

sotto forma di immagine. Questo mi aiuta a formulare una proposizione che io ricavo, per così dire, dalla lettura di quest'immagine. […] È strano che dalla lettura di un'*immagine* si debba poter ricavare una proposizione. Tuttavia la proposizione non tratta dell'immagine che io vedo. Non dice che in quest'immagine si può vedere questo e quest'altro. Ma non dice nemmeno che cosa farà il meccanismo reale, per quanto lo faccia capire».

- E nella V parte: «considera un meccanismo.

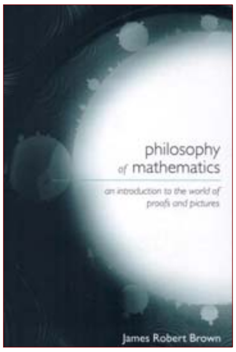


- Mentre il punto A descrive un cerchio, B descrive una figura a forma di otto. Questa proposizione la scriviamo come una proposizione della cinematica. Mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta. La proposizione corrisponde, poniamo, a un'immagine del meccanismo in cui siano disegnate le traiettorie descritte dai punti A e B. Dunque, per un certo aspetto, la proposizione è un'immagine di quel movimento. Tien fermo ciò di cui la *prova* mi convince».

Due diverse impostazioni dalla terza alla quinta

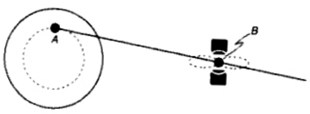
- L'enfasi, ora, non è più sulla possibilità che la raffigurazione del meccanismo avrebbe di "suggerire" la proposizione, ma sul fatto che "la proposizione è un'immagine di quel movimento".
- E, prosegue Wittgenstein, «se la prova registra il procedere secondo la regola allora, così facendo, produce un nuovo concetto». La conclusione è importante: «la prova deve mostrare il sussistere di una relazione interna perché la relazione interna è l'operazione che produce una struttura dall'altra […] – così che il passaggio conforme a questa successione di immagini è, *eo ipso*, un passaggio conforme a quelle regole di operazione».

Ma non tutti hanno apprezzato il meccanismo di Wittgenstein…

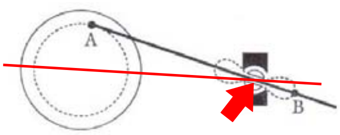


- Tra il funzionamento fisico e la proposizione matematica si colloca dunque **la mediazione della rappresentazione** visuale…
- e proprio questo collegamento può essere discusso in termini critici, come fa brillantemente **James Robert Brown.**

- **Una figura "corretta"** (per Brown) sarebbe simile a:



- – la figura descritta da B dovrebbe risultare **simmetrica** rispetto

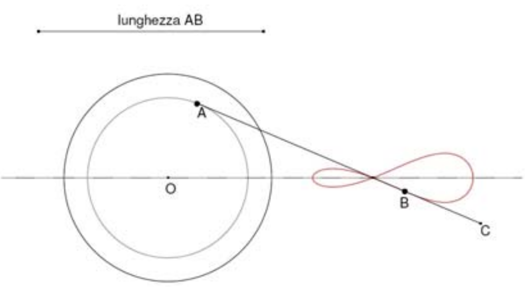


alla retta passante per il centro del cerchio e per il punto per il quale AB è vincolato a passare;
- – inoltre, quando A si trova nella posizione indicata, «B, invece di essere disegnato nella posizione a destra, dovrebbe trovarsi **al centro**» della figura "a otto".

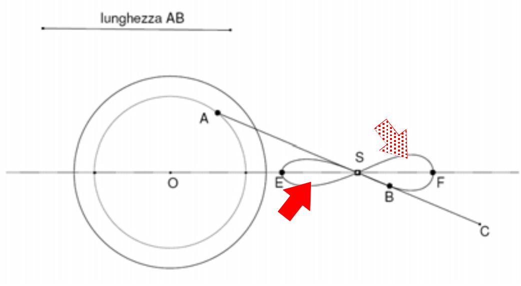
Qualche osservazione sui rilievi (sostanzialmente giusti) di Brown

- L'ultima osservazione è corretta solo partendo dal presupposto che la traiettoria di B sia la figura "a 8": ciò **non** è compatibile con la posizione di B, dunque se B è in tale posizione la traiettoria **non** è quella tracciata. Però non si può affermare che "la posizione di B è sbagliata": possiamo dire che, ritenendo fissata la posizione di A, si deve **rinunciare o alla posizione di B o alla figura da B descritta**; la distanza AB deve essere ben determinata per ottenere una figura "a 8".
- Inoltre la traiettoria nella figura originale è troppo piccola (soprattutto nella direzione di AB): la sua dimensione dovrebbe essere aumentata circa del 15%.

- In effetti la figura (realizzata con **Cabri**) che rispetta i dati originariamente forniti da Wittgenstein è:



- Non possiamo ottenere una "figure-eight" **simmetrica** rispetto al punto S; una figura… quasi simmetrica è:



(dove ES=SF, ma la parte destra…
… è più estesa della sinistra).

Le conclusioni (in chiave platonistica) di Brown

- Brown si chiede ora: «perché il diagramma è efficace, nonostante questi errori?»
- Dopo una lunga dissertazione conclude che la figura in esame «è **un disegno scadente** in quanto rappresenta erroneamente un meccanismo reale. Ma è **un buon simbolo**, in quanto rappresenta l'importante caratterizzazione astratta; esso "mostra l'esistenza di una relazione interna", nelle parole di Wittgenstein. In quest'ultimo senso è certamente efficace […] come un supporto alla comprensione».
- Brown conclude che **«non è necessario che il disegno sia accurato; esso deve solamente condurre al senso», platonisticamente inteso.**

Una critica alle conclusioni di Brown

- Confrontiamo però gli esempi nelle parti III e V.
- L'opera è stata pubblicata postuma riunendo diversi manoscritti, datati ma spesso modificati dallo stesso Autore: **la parte III si basa sul ms. 122**, iniziato il 16/10/1939 (la pagina qui a fianco è del 18/10) e datato fino al 3/2/1940…

La sintonia del funzionamento "fisico" e di quello "matematico" (la descrizione del moto mediante equazioni) non può ridursi ad un'analogia (e questo aspetto può rivelarsi molto importante per la didattica della matematica): è la *necessità* della natura fisica che si rispecchia nella matematica mediante la quale il movimento viene descritto.

- Ma nell'ultima parte si passa **dal suggerimento dato dall'immagine all'esecuzione del movimento del meccanismo**: «mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta». Se l'importanza della "costruzione sulla carta" non è accantonata, **si ricorre ad una pratica "esecuzione".**

Strumenti per la geometria

Sommario

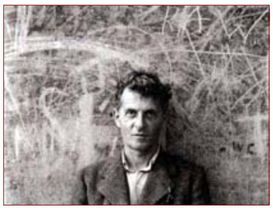
- **Un quadro teorico**: Vygotskij, Wartofsky
- **Uno "strumento" chiave**: la storia della geometria
- **Due grandi a confronto**: Euclide e Bombelli
- **Ripensare Wittgenstein:** un efficace meccanismo
- **Infine: una geometria…** …"senza strumenti"?

Possiamo pensare ad una geometria che faccia a meno di “strumenti”?

- “Capire una frase –potremmo dire– è comprenderne l’uso. (…) **Tutti i calcoli della matematica**

① **sono stati inventati per assecondare l’esperienza**

② **e poi sono stati resi indipendenti dall’esperienza”**



Ludwig Wittgenstein
(*Lezioni sui fondamenti della matematica: Cambridge 1939*. Cornell Univ. Press, Itacha 1986. Boringhieri, Torino 1982)

Possiamo pensare ad una geometria che faccia a meno di “strumenti”?

- Con il celebre *cogito ergo sum* Cartesio affermava: penso, dunque esisto.
- **Osservando che la matematica “funziona”, potremmo essere indotti ad affermare che essa “esiste”** e magari che il lavoro del matematico si riduce a quello dello scopritore.
- Questa conclusione non ci sembra però giustificata: **il fatto che la matematica funzioni significa che… funziona, nulla di più.**
- Potremmo limitarci a dire che essa funziona in quanto è stata **concepita (ovvero “creata”) in un certo modo**, **con la compresenza di** **due** **aspetti:**

Possiamo pensare ad una geometria che faccia a meno di “strumenti”?

(ispirandoci idealmente a Wittgenstein)

① **un collegamento con il** **mondo reale** (sebbene tale connessione non possa essere ridotta ad un semplice “rispecchiamento”);

② **la scelta di alcune** **posizioni convenzionali,** **socialmente elaborate ed accettate,** le quali rendono possibile stabilire proprietà e analogie, con la conseguente costruzione di “oggetti matematici” astratti.

“inventati per assecondare l’esperienza

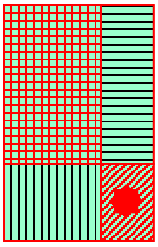
e poi sono stati resi indipendenti dall’esperienza”

Non si dimentichi tuttavia che questa “esistenza” di un procedimento non è “esistenza dei numeri”!

- Alcuni aspetti della matematica risentono di posizioni non del tutto collegate alla realtà.
- Perché ***meno per meno fa più?***
- Seguiamo idealmente l’approccio di **Muhammed ibn-Musa al-Kuwarizmi** (IX secolo).
- Visualizziamo:

$(a-b)(c-d) = ac-bc-ad+bd$

- Dal rettangolo ac togliamo i rettangoli bc e ad…



…e **aggiungiamo** ***bc*** (che avremmo tolto due volte).

Verso una “conclusione”

- Tuttavia, a nostro avviso, considerazioni come queste non devono e non possono avere la pretesa di essere conclusive…
- Chiudiamo dunque la nostra riflessione citando la serena espressione con cui **Hans-Georg Gadamer** chiuse il poscritto all’edizione 1972 di *Verità e metodo*:

«un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l’ultima parola»

Grazie
a Paolo Boero,
a Willibald Dörfler
e a Luigi Tomasi

Per risorse, materiali e indicazioni bibliografiche si può consultare il sito: www.syllogismos.it

A tutti Voi grazie dell’attenzione