

Udine, Polo Rizzi, 9 marzo 2007

Arte e matematica: breve storia della prospettiva



Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.svillogismos.it

Sommario: una storia tra **Matematica e Arte** (per superare un pregiudizio)

- La storia delle ricerche sulla prospettiva è **la storia di una grande e feconda collaborazione**:
- la Matematica supporta l'Arte nella ricerca di metodi rigorosi per la rappresentazione verosimile della realtà;
- l'Arte fornisce alla Matematica uno spunto di eccezionale importanza.
- **Uno dei massimi artisti del Rinascimento è anche un ottimo matematico** ed è il più importante trattatista sulla prospettiva. Dunque...

ha ancora senso parlare delle due culture?

Una rappresentazione **bidimensionale** della realtà



Non sembra possibile rilevare alcun senso di tridimensionalità nelle **incisioni rupestri** paleolitiche o neolitiche.

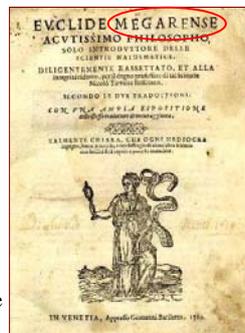
- Disegni **egizi** provano che i loro autori avevano intuito empiricamente la nozione di figure simili.
- **Età micenea** (1400-1100 a.C.): allineamenti di teste su piani diversi per ottenere immagini prospettiche.
- **Tcheou-Pei Suang Ching** (IV-III sec. a.C.; ma 1100 a.C.): determinazione geometrica di ombre.

Un architetto dell'età augustea, **Vitruvio**, in veste di storico dell'arte

- “**Democrito e Anassagora** scrissero di come le linee debbano corrispondere, in maniera naturale, alla visione degli occhi e all'estensione dei raggi, fissato un certo punto come centro, affinché immagini determinate dell'apparenza rendano l'aspetto degli edifici nelle pitture sceniche, e **le figurazioni in prospetto piano ora sembrano sfuggenti, ora prominenti**” (Vitruvio, *De architectura*, VII).
- Ai pittori **Apollodoro di Atene e Polignoto di Taso** (V-IV sec. a.C.) sono ricondotte esperienze nella rappresentazione di alcuni personaggi per suggerire l'effetto di profondità.

Un trattato fondamentale: **l'Optica di Euclide**

- Edizioni a stampa di *Optica* sono note dal XVI sec.; il trattato è stato inserito da J.L. Heiberg nel vol. VII dell'*Opera Omnia euclidea* (1895).
- Oltre ad *Optica* troviamo anche *Opticorum recensio Theonis* (Teone di Alessandria si occupò dell'edizione di *Elementi* di *Optica*).



L'*Optica* di Euclide: **i quattordici termini**

- In *Optica* sono proposti 14 termini. I primi due sono:
 - I.** I raggi emessi dall'occhio procedono per via dritta.
 - II.** La figura compresa dai raggi visivi è un cono che ha il vertice nell'occhio e la base al margine dell'oggetto visto.
- Euclide seguiva la concezione che fu di Platone, secondo la quale il raggio visivo **parte dall'occhio e segue una via rettilinea** (termine I).
- Il termine II ha importanza decisiva: **collega la comprensione e la descrizione dei fenomeni ottici alla geometria**.

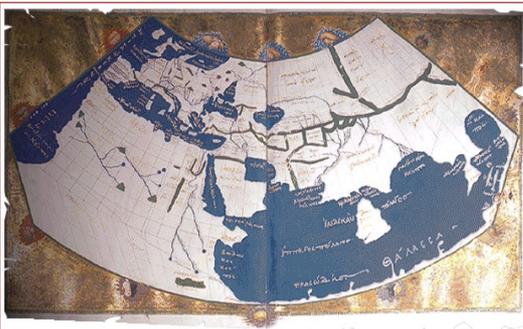
La rappresentazione della realtà e l'opzione razionale di Euclide

- Con l'*Ottica* euclidea gli sforzi per ottenere una rappresentazione verosimile della realtà imboccarono la strada dello studio matematico; questa scelta sarà definitiva e si snoderà attraverso tutta la storia.
- Alcuni risultati di Euclide, probabilmente già intuiti in precedenza, si ritrovano in **interessanti accorgimenti tecnici nella struttura degli edifici greci**: importante è la visione scenografica della facciata del tempio.
- Molti risultati dimostrati nei **trattati di prospettiva medievale e rinascimentale** furono direttamente ripresi o comunque ispirati dall'opera di Euclide.

Dopo Euclide: l'arte della Roma antica



Due protagonisti: Vitruvio e Claudio Tolomeo



Il contributo degli Arabi all'ottica geometrica

- “La matematica era studiata dagli Arabi soprattutto per far avanzare le scienze che essi coltivavano. L'obiettivo, nuovo nella storia della scienza, era quello di acquisire il dominio della natura” (M. Kline).
- **Alkindi** (800-873) scrisse *De aspectibus* mostrando di essere buon conoscitore delle teorie ottiche euclidee.
- L'astronomo e matematico **Ibn Haitam** detto **Alhazen** (965-1039) scrisse *Opticae Thesaurus Libris Septem*, tradotto in latino nel XII secolo da Gherardo da Cremona: si ribalta l'impostazione euclidea sulla propagazione della luce, sostenendo che i raggi visivi partono dagli oggetti per giungere all'occhio.

Il contributo degli Arabi all'ottica geometrica

- Il “problema di Alhazen” sarà ripreso da Vitellione...
- e infine trattato da Ch. Huygens, nel XVIII secolo, con l'applicazione di metodi geometrici.



L'ottica e la prospettiva nel Medioevo

- Le opere arabe stimolarono l'interesse per l'ottica:
- Roberto di Lincoln, Grossatesta (1175-1253): *De luce*;
- Ruggero **Bacone** (1214-1294): *Scientia perspectiva*;
- Giovanni **Peckham** (1242-1292) detto “Magister perspectivae”: scrisse *Perspectiva communis*.
- Parallelamente molti pittori si impegnarono nell'elaborazione di regole pratiche per una **rappresentazione verosimile della realtà**, in una prima fase attraverso la ricerca empirica. In particolare: **Duccio di Boninsegna** (1255-1319), **Giotto da Bondone** (1267-1336), **Ambrogio Lorenzetti** (attivo tra il 1319 e il 1348).

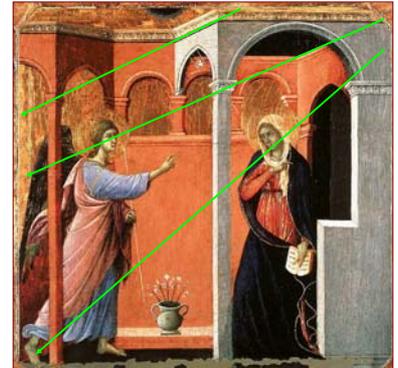
Il maestro di Giotto: Cimabue (1240-1302)

- Compaiono alcuni chiari riferimenti alla terza dimensione.
- Il trono nella parte inferiore della tavola presenta alcuni **accorgimenti intuitivi**.
- La rappresentazione è ancora influenzata da elementi estranei al reale (come **la dimensione dei personaggi**).



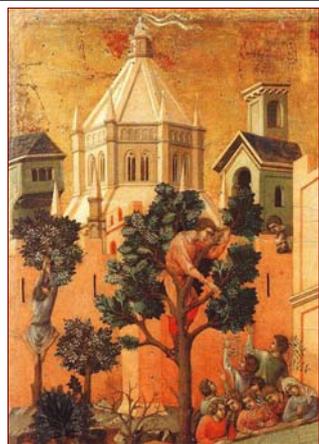
Inizio del XIV sec.: *L'annunciazione* Duccio

- C'è la chiara volontà di rappresentare lo spazio in **tre dimensioni**.
- Tuttavia alcune regole base della prospettiva **non** sono ancora considerate.



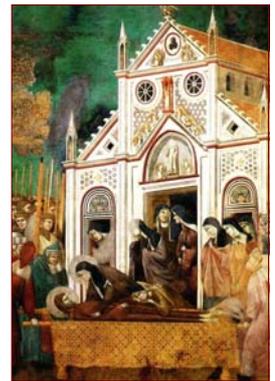
Inizio del XIV sec.: Duccio

- Nell'*Entrata in Gerusalemme* la tridimensionalità di alcuni elementi architettonici è resa con cura.
- Con **Duccio** siamo però ancora nella fase della **perspectiva naturalis** (o **communis**).



Gli affreschi di Giotto nella Basilica di San Francesco

- **Giotto** è un grande interprete della **perspectiva naturalis**.
- La sua ricerca della profondità **non** è però basata su metodi rigorosi.
- Quella di Giotto può essere considerata una scelta artistica.
- La storia dell'arte **non si interpreta in termini di "progresso"**.



Giotto: *La rinuncia agli averi* (cappella Bardi a Santa Croce)



Siena: *gli Effetti del Buon Governo* (1337-1340) di Ambrogio Lorenzetti



La svolta: la “regula legitima” di Filippo Brunelleschi (1377-1446)

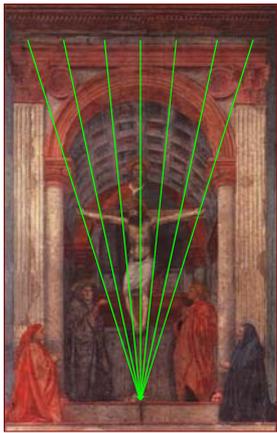


Masaccio segue Brunelleschi

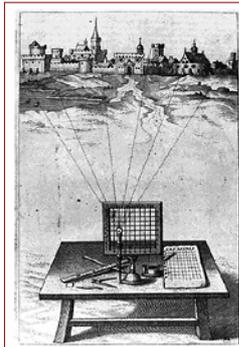


La Trinità del grande Masaccio

- L'opera (a Firenze, Santa Maria Novella) simboleggia un passaggio cruciale.
- Masaccio, che pure morì giovanissimo, è una figura chiave nella nascita della **perspectiva artificialis**.
- Si noti la presenza di un unico punto di fuga.

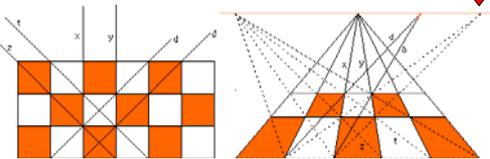


Leon Battista Alberti e la prospettiva del Rinascimento



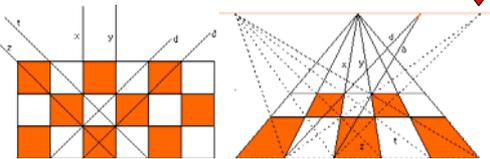
- Leon Battista Alberti (1404-1472) scrisse *Dell'Architettura e Della Pittura* (1435-1436, opera che sarà stampata nel 1511) in cui sono riprese e ampliate le idee di Brunelleschi.
- Il lavoro albertiano appare ancora legato a un vago **empirismo**.

La prospettiva del Rinascimento e l'idea di infinito



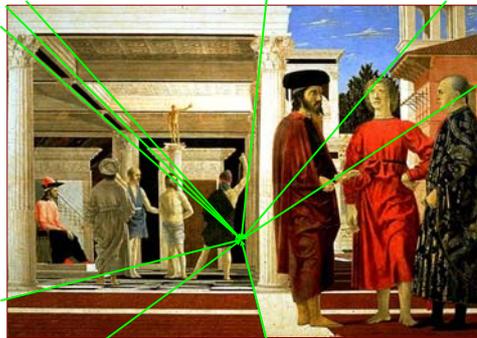
- Nella figura a sinistra la rappresentazione di un pavimento in pianta.
- Nella figura a destra la corrispondente costruzione rinascimentale secondo il principi di Leon Battista Alberti (la linea rossa sarà detta **retta all'infinito**).

La prospettiva del Rinascimento e l'idea di infinito



- Dai tempi di Aristotele lo status dell'infinito era vincolato all'impostazione **potenziale**.
- L'esplicita indicazione di “rette” e di “punti” collegati con l'infinito rappresenta un rilevante salto di qualità.

**“Il miglior geometra dei tempi suoi”:
Piero della Francesca (1416-1492)**

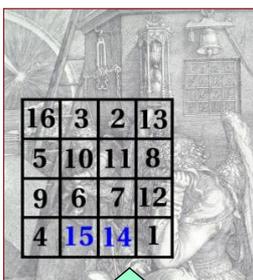


**Un altro grande artista si occupa
di geometria: Albrecht Dürer**



- La diffusione della prospettiva nell'Europa centro-settentrionale fu favorita da **Albrecht Dürer** (1471-1528) che fu a lungo in contatto con gli ambienti veneziano e bolognese.
- Nel 1525 Dürer pubblicò *Institutionum geometricarum Libri quatuor*.

**Un altro grande artista si occupa
di geometria: Albrecht Dürer**



un “quadrato magico”!

- Dürer espose alcune costruzioni di poligoni regolari, le tecniche di rappresentazione prospettica di poliedri e i loro sviluppi piani.
- Affermò che la struttura prospettica di un quadro non deve essere disegnata a mano libera, ma ricavata con procedimenti matematici.

**La tridimensionalità nelle opere di
Leonardo da Vinci (1452-1528)**

- A differenza Piero, Leonardo nel *Trattato della Pittura* sottolinea la tridimensionalità mediante accorgimenti squisitamente pittorici (sfumature etc.).



**Prospettiva
“pratica”**

- Accorgimenti per la realizzazione pratica di vedute in prospettiva vengono utilizzati... da Dürer ad oggi!
- La “camera obscura” è stata impiegata da molti pittori (anche da Canaletto).
- Ma la prospettiva “pratica” ormai ci interessa ben poco...



FOR HOLIDAY SKETCHING
Price 9/-
Postage 6d.

Provide yourself with the Periscope Sketcher, it will enable you to outline your sketches in perfect proportion and perspective. It supplies a long felt want and appeals to both amateur and professional artists.

Makers and Patentees
RALSTON & CO., 17 North Wallace St., Glasgow

**La prospettiva e i grandi: da Kepler
(1571-1630) a Desargues (1591-1661)**



- **Johannes Kepler** nel 1604 pubblicò *Paralipomena ad Vitellionem*: nasce l'ottica geometrica moderna.
- La trattazione unitaria delle coniche portava ad un'intuitiva introduzione del “punto all'infinito”.
- Kepler anticipò di trent'anni l'impostazione di **Girard Desargues**.

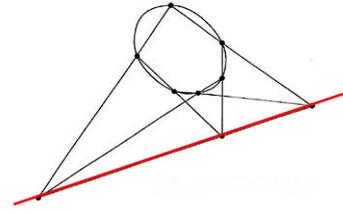
I punti all'infinito dalla prospettiva alla geometria proiettiva

- La convergenza di rette parallele al **punto di fuga**, collocato "infinitamente" lontano, porta i geometri (a partire da Kepler e da Desargues) ad introdurre il **punto improprio**.
- Sarà uno dei concetti fondamentali della **geometria proiettiva**.
- Afferma **Desargues**: due rette hanno un "**punto traguardo**" se sono incidenti (il loro comune punto proprio), ma **anche se sono parallele** (e si tratta del loro comune punto improprio).



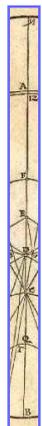
Il più importante dei seguaci di Desargues: Blaise Pascal (1623-1662)

- Teorema di Pascal** (in forma moderna). Condizione necessaria e sufficiente affinché un esagono sia inscrittibile in una conica è che siano allineati i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti.

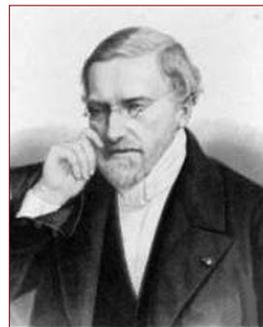


La rappresentazione della realtà tridimensionale: Gaspard Monge

- Gaspard Monge** (1746-1818), fu uno dei grandi sistematori delle questioni riguardanti la rappresentazione bidimensionale di oggetti tridimensionali: a lui si deve la **geometria descrittiva**.
- Monge si proponeva di risolvere sia il problema della rappresentazione di un oggetto tridimensionale che il problema inverso, ovvero la ricostruzione delle caratteristiche di un oggetto a partire dalla data sua rappresentazione.
- La rappresentazione di Monge non considera il problema "artistico" della verosimiglianza.



Il legislatore della geometria proiettiva: Jean-Victor Poncelet

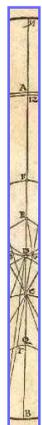
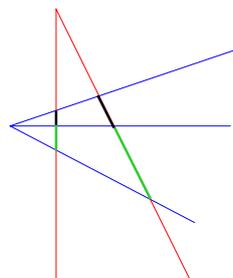


- Un allievo di Monge, **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867), pubblicò nel 1822 il *Traité des propriétés projectives des figures*: con tale opera si identifica la **nascita della moderna geometria proiettiva**.
- Poncelet riprese e completò l'opera di Desargues.



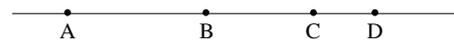
Il legislatore della geometria proiettiva: Jean-Victor Poncelet

- Poncelet si occupò in particolare delle quantità **invarianti** nelle trasformazioni proiettive, cioè delle caratteristiche che si mantengono nella catena di: **proiezioni** **sezioni** che costituiscono la trasformazione.



Il legislatore della geometria proiettiva: Jean-Victor Poncelet

- Tutte le trasformazioni proiettive conservano il **birapporto**.
- Dati quattro punti A, B, C, D allineati:



il birapporto è:

$$(ABCD) = (CA/CB) : (DA/DB)$$

- Tale quantità, calcolata per i punti originali (prima della trasformazione proiettiva) e per le loro immagini (dopo la trasformazione proiettiva) **non cambia**.



**Dalla geometria affine...
...alla geometria proiettiva**

**Dalla geometria affine...
...alla geometria proiettiva**

➤ Il punto da cui avviene la proiezione **non** è infinitamente lontano!

Geometria, geometrie: Felix Klein e il “programma di Erlangen”

- L’unificazione dell’opera dei geometri dell’Ottocento fu realizzata da **Felix Klein** (1849-1925), che nella prolusione del 1872 all’Università di Erlangen identificò la geometria con **lo studio degli invarianti rispetto a gruppi di trasformazioni**.
- La classificazione delle **trasformazioni** porta alle varie **“geometrie”**:
- **euclidea**: congruenze. Mantengono le **distanze**.
- **affine**: affinità. Invarianti: **rapporti** (su rette).
- **proiettiva**: trasformazioni proiettive. Gli invarianti sono i **birapporti**.

Geometria, geometrie: Felix Klein e il “programma di Erlangen”

Geometria, geometrie: Felix Klein e il “programma di Erlangen”

- Il programma di Erlangen armonizzò e riunì ogni settore di ricerca della geometria in un’impostazione unitaria per spirito, scopi e tecniche.
- La geometria proiettiva, sorta sulla base delle ricerche sulla prospettiva e sull’ottica geometrica, si fuse definitivamente con tutte le altre “interpretazioni del fare geometria”.
- In questo senso il **1872** segnò la fine della ricerca “isolata” nel campo della geometria proiettiva (come nel campo di qualsiasi “altra geometria”), ricerca conglobata ed organizzata, metodologicamente, nella più generale **algebra delle strutture**.

Bibliografia

- U. Cassina, La prospettiva e lo sviluppo dell’idea dei punti all’infinito, *Periodico di matematiche*, 1921, 4-1, 326-337.
- G. Bagni, B. D’Amore, *Alle radici storiche della prospettiva*, Angeli, Milano 1994.
- G. Bagni, B. D’Amore, *Leonardo e la matematica*, Giunti, Firenze 2006.

A tutti Voi grazie dell’attenzione

Un testo dettagliato è in rete al sito:
www.syllogismos.it