Esercizi

6.1. Matematica del discreto

Dire se i seguenti limiti sono verificati:

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-3}{n+6} = 1$ [Verif.]
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(3+\dfrac{2}{5n+7}\right) = 3$ [Verif.]
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{(2+n)^2} = 0$ [Verif.]
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{30} = 5$ [Non verif.]
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+2n)^{-3} = 0$ [Verif.]
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2-1}{2-n} = -1$ [Non verif.]
7. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{3} = +\infty$ [Verif.]
8. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-5}{11} = +\infty$ [Verif.]
9. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{7}-n}{\sqrt{5}-2} = +\infty$ [Non verif.]
10. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{2n+1} = +\infty$ [Verif.]
11. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n}{2} = +\infty$ [Verif.]
12. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{5-n}}{2} = +\infty$ [Non verif.]

13. Sei persone hanno a disposizione sei sedie: in quanti modi diversi le possono occupare? [720]

14. Sei persone devono occupare sei sedie (quindi una di esse rimane in piedi): in quanti modi diversi lo possono fare? [720]

15. A un torneo partecipano 10 squadre; la formula prevede la disputa di quattro incontri tra ciascuna coppia di squadre A, B: due nella sede di A, due nella sede di B. Quante partite verranno giocate? [$2\cdot D_{10,\,2} = 2\cdot 10\cdot 9 = 180$]

16. Si sviluppi $(2a+b)^6$ [$64a^6+192a^5b+240a^4b^2+160a^3b^3+60a^2b^4+12ab^5+b^6$]

Risolvere le equazioni nell'incognita x naturale:

17. $\dbinom{x}{3}-\dbinom{x}{2} = 0$ [$x = 5$]
18. $\dbinom{x}{3}+\dbinom{x}{5} = 0$ [Impossibile]
19. $\dbinom{x}{1}^2-\dbinom{x}{4}^2 = 0$ [$x = 5$]
20. $\dbinom{x}{6}^3-\dbinom{x}{3}^3 = 0$ [$x = 9$]

6.2. Limiti di funzioni

Dire se i seguenti limiti sono verificati:

21. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{3} = 0$ [Verif.]
22. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x-2\right) = -2$ [Verif.]

23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{x}=1$ [Non verif.]

24. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{-3}=+\infty$ [Verif.]

25. $\lim\limits_{x\to 1^-}\log_e x=0$ [Verif.]

26. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2}=0$ [Non ver.]

Calcolare i seguenti limiti:

27. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ [0]

28. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ [0]

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{10x}$ $[\dfrac{1}{10}]$

30. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(x^2+2x+3\right)$ [$+\infty$]

31. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+3}{3x+4}$ [1]

32. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x^2-2x-5\right)$ [$-\infty$]

33. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{7}{1+x}$ [0]

34. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2}{3x-5}$ [0]

35. $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{3x+1}$ [0]

36. $\lim\limits_{x\to 0} e^{x^2-2x+1}$ [e]

37. $\lim\limits_{x\to 1}\log_e x$ [0]

38. $\lim\limits_{x\to -\infty}\log_e(-x)$ [$+\infty$]

39. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ [1]

40. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-4x^2+25}{x^2-16}$ [$+\infty$]

41. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{x^{-1}}$ [e]

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{senx}{\log_e(1+x)}$ [1]

43. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3+sen2x}{\log_e x}$ [0]

44. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{45x^3-15x^2+10x+121}{x^4-1}$ [0]

45. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\operatorname{sen} 8x}{\operatorname{tg} 2x}$ [4]

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x senx-senx}{(e^x-1)^2}$ [1]

47. Determinare il dominio $D\subseteq\mathbf{R}$ della funzione $x\to x+\sqrt{4-x^2}$ e dimostrare che, in tale dominio, essa ammette massimo e minimo.

[$D=\{x\in\mathbf{R}: -4\le x\le 4\}$; si applichi poi il teorema di Weierstrass]

48. Data la funzione espressa da: $\begin{cases} y=x^2-1\\ x<1\end{cases} \cup \begin{cases} y=\log_e x\\ x\ge 1\end{cases}$ verificare che è continua per ogni $x\in\mathbf{R}$. Tracciare quindi il grafico e discutere la sua intersezione con la retta di equazione $y=k$ al variare del reale k.

[Per $k=-1$: due soluzioni coincidenti; per $k>-1$: due soluzioni distinte]

49. Data la funzione espressa da: $\begin{cases} y=x^2-2x+3a-4\\ x\le 0\end{cases} \cup \begin{cases} y=\dfrac{senax}{x}\\ x>0\end{cases}$ determinare il reale a in modo che sia continua per ogni $x\in\mathbf{R}$. [$a=2$]

6.3. Derivate

Applicando la definizione, calcolare (se possibile) la derivata prima di:

50. $x \to x^3$ $[x \to 3x^2]$ 51. $x \to \log_e(2x-1)$ $[x \to \dfrac{2}{2x-1}]$

52. $x \to e^{3x}$ $[x \to 3e^{3x}]$ 53. $x \to 3\,\text{sen}^2 x - \cos\pi + 3\cos^2 x$ $[x \to 0]$

54. Determinare i reali a, b in modo che la funzione $\begin{cases} y = e^x \\ x < 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = ax + b \\ x \geq 0 \end{cases}$ sia derivabile nel punto di ascissa $x = 0$. $[a = 1;\ b = 1]$

Determinare le derivate seguenti:

55. $D(x^2-3x+15)$ $[2x-3]$ 56. $D(e^x-1-\cos x)$ $[e^x+\text{sen}x]$

57. $D(x^5-6x^3)$ $[5x^4-18x^2]$ 58. $D(\log_e x+\sqrt{x})$ $[\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}]$

59. $D(xe^x-1)$ $[e^x+xe^x]$ 60. $D(x^2e^x-1)$ $[2xe^x+x^2e^x]$

61. $D\dfrac{x+1}{x+2}$ $[\dfrac{1}{(x+2)^2}]$ 62. $D\dfrac{2}{1+x^2}$ $[\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}]$

63. De^{3x-1} $[3e^{3x-1}]$ 64. $D(\text{sen}x+4)^5$ $[5(\text{sen}x+4)^4\cos x]$

65. $D\,\text{arctg}3x$ $[\dfrac{3}{9x^2+1}]$ 66. $D(15e^{x^2-2x}+41)$ $[15(2x-2)e^{x^2-2x}]$

67. $D\log_e\log_e x$ $[\dfrac{1}{x\log_e x}]$ 68. $D\log_e\dfrac{x+3}{x+2}$ $[-\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}]$

Determinare (se possibile) la derivata prima, la derivata seconda e la derivata terza delle funzioni espresse da:

69. $y = x^2+3x+\dfrac{1}{2}$ $[y' = 2x+3;\ y'' = 2;\ y''' = 0]$ 70. $y = 2e^x$ $[y' = y'' = y''' = 2e^x]$

71. Esprimere con una formula generale la derivata n-esima (n naturale non nullo) della funzione espressa da $y = 12+3e^{4x}$ $[y^{(n)} = 3\cdot 4^n e^{4x}]$

Determinare gli asintoti dei grafici di:

72. $y = \dfrac{x-3}{x-2}$ $[x = 2;\ y = 1]$ 73. $y = \dfrac{2x^2-3x+1}{x}$ $[x = 0;\ y = 2x-3]$

74. $y = \dfrac{6}{x+2}$ $[x = -2;\ y = 0]$ 75. $y = x+\dfrac{1}{x^2}$ $[x = 0;\ y = x]$

Studiare le seguenti funzioni:

76. $y = x^3+x^2$ 77. $y = x^4-2x^2$ 78. $y = x^3-4x$

79. $y = \dfrac{x-1}{x^2+1}$ 80. $y = \dfrac{x-2}{x^2-1}$ 81. $y = \sqrt{x^2-2x}$

82. $y = \text{sen}x(\cos x+1)-1$ 83. $y = \log_e(x^2-1)$ 84. $y = \dfrac{\text{sen}\,x+1}{\cos x-1}$

85. $y=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-1}}$ 86. $y=x-\sqrt{x-4}$ 87. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$

88. $y=\log_e\dfrac{x+1}{x-2}$ 89. $y=\dfrac{\log_2 x}{x}$ 90. $y=x^2e^x$

91. $y=xe^x$ 92. $y=e^{\frac{x-2}{x+1}}$ 93. $y=x^3e^x$

94. $y=(x^2-1)e^x$ 95. $y=\dfrac{1-e^{-x}}{x+2}$ 96. $y=x+e^x$

97. $y=x+e^{-x}$ 98. $y=\cos x+\dfrac{\cos x}{2-\cos x}$ 99. $y=\mathrm{tg}2x+\mathrm{sen}x$

6.4. Integrali

Determinare i seguenti integrali indefiniti:

100. $\int\left(5x^4-x\right)dx$ $[x^5-\frac{1}{2}x^2+c]$ 101. $\int(\mathrm{sen}\,x+\cos x)dx$ $[\cos x-\mathrm{sen}x+c]$

102. $\int\left(e^x-4x\right)dx$ $[e^x-2x^2+c]$ 103. $\int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$ $[\log_e|x|-\frac{1}{x}+c]$

104. $\int\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-x^3\right)dx$ $[\mathrm{arcsen}x-\frac{1}{4}x^4+c]$

105. $\int\left(\frac{1}{1+x^2}-5x^2+2e^x\right)dx$ $[\mathrm{arctg}x-\frac{5}{3}x^3+2e^x+c]$

106. $\int\left(3\,\mathrm{sen}\,x+4\cos x+5e^x-19\right)dx$ $[-3\cos x+4senx+5e^x-19x+c]$

107. $\int 2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx$ $[\int 2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\int\mathrm{sen}\,xdx=-\cos x+c]$

108. $\int e^{3x}dx$ $[\frac{1}{3}e^{3x}+c]$ 109. $\int(5x+1)^8dx$ $[\frac{1}{45}(5x+1)^9+c]$

110. $\int\mathrm{sen}^4x\cos xdx$ $[\frac{1}{5}\mathrm{sen}^5x+c]$ 111. $\int e^{\cos x}\,\mathrm{sen}\,xdx$ $[-e^{\cos x}+c]$

112. $\int\frac{\mathrm{sen}\,x}{2+\cos x}dx$ $[-\log_e|2+\cos x|+c]$ 113. $\int\frac{x^2}{x^3+1}dx$ $[\frac{1}{3}\log_e|x^3+1|+c]$

Calcolare i seguenti integrali definiti:

114. $\int_0^3 x^2dx$ [9] 115. $\int_{-5}^5 x^4dx$ [1250]

116. $\int_0^1 e^xdx$ $[e-1]$ 117. $\int_1^2\frac{dx}{x}$ $[\log_e 2]$

118. $\int_0^\pi\left(senx-\cos x\right)dx$ [2] 119. $\int_0^{2\pi}\left(3-2\cos x\right)dx$ $[6\pi]$

120 $\int_0^9 \sqrt{x}dx$ [18] 121. $\int_0^{2\pi}\left(e^x + senx\right)dx$ [$e^{2\pi}-1$]

122. $\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}dx$ [$\log_e 2$] 123. $\int_0^1 e^{-3x}dx$ $\left[\frac{e^3-1}{3e^3}\right]$

124. $\int_0^1 xe^{x^2}dx$ $\left[\frac{e-1}{2}\right]$ 125. $\int_0^\pi sen^2x\cos x dx$ [0]

126. $\int_0^\pi \cos\frac{x}{2}dx$ [2] 127. $\int_1^2 \frac{x+1}{x}dx$ [$1+\log_e 2$]

Calcolare l'area delle parti di piano individuate da:

128. $\begin{cases} senx \le y \le 2senx \\ 0 \le x \le \pi \end{cases}$ [2] 129. $\begin{cases} x \le y \le 1+e^x \\ x-x^2 \ge 0 \end{cases}$ $\left[e-\frac{1}{2}\right]$

130. $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{1}{1+x^2} \\ 0 \le x \le \sqrt{3} \end{cases}$ $\left[\frac{\pi}{3}\right]$ 131. $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{2senx}{\cos^3 x} \\ 0 \le 4x \le \pi \end{cases}$ [1]

6.5. Algebra lineare

Dire se i vettori seguenti sono linearmente dipendenti o indipendenti:

132. **v** = (–2; 1), **w** = (–1; 3). [Indipendenti]
133. **v** = (1; –6), **w** = (3; –3), **z** = (–2; 3) [Dipendenti]
134. **v** = (–2; 1; –6), **w** = (–1; 3; –3), **z** = (1; 2; 3) [Dipendenti]
135. **v** = (–1; –2; –3), **w** = (–4; –4; –1), **z** = (3; 2; –2) [Dipendenti]
136. **v** = (0; 1; 0), **w** = (–1; 0; 0), **z** = (0; 0; 8) [Indipendenti]
137. **v** = (3; 5; 2; 1), **w** = (1; 1; 2; 3), **z** = (5; 7; 6; 7) [Dipendenti]

138. Determinare $k \in \mathbf{R}$ tale che i vettori di $\mathbf{R}^2$: **v** = (8; –4) e **w** = (k; 2) siano linearmente dipendenti. [$k = -4$]

139. Determinare $k \in \mathbf{R}$ tale che i vettori di $\mathbf{R}^3$: **v** = (2; 6; –8) e **w** = (k; –3; 4) siano linearmente dipendenti. [$k = -1$]

140. Date $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \\ 6 & 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ determinare la matrice $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

[$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 & 2 \\ 33 & 26 & 0 & 19 \\ 33 & 27 & 0 & 21 \end{bmatrix}$]

141. Determinare il rango per righe e il rango per colonne di $\begin{bmatrix} 9 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ e verificarne l'uguaglianza. [Entrambi i ranghi sono 2]

142. Determinare il rango delle matrici seguenti:

$$\begin{bmatrix} 67 & 0 & 0 \\ 0 & 33 & 174 \\ 0 & 258 & 12 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & \pi \\ 5 & 7 & 0 \\ 4 & 6 & 2\pi \end{bmatrix}$$ [3; 2; 2]

143. Determinare il valore del parametro reale α in modo che $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & \alpha & 6 \end{bmatrix}$ abbia rango minore di 3. [α = –3]

144. Determinare il valore del reale k tale che sia $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 15 \\ k & 1 & 2k \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 30$. [$k = 3$]

145. Calcolare: $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 7 & 5 & -5 \\ -2 & -2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 8 & -8 & -7 \\ 2 & 9 & 4 \end{vmatrix}$ [–37; 87; 417]

146. Determinare $k \in \mathbf{R}$ in modo che $\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) x - \begin{vmatrix} k & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$ abbia soluzione $x = 2$. [$k = 3$]

147. Determinare $\alpha \in \mathbf{R}$ in modo che $\begin{bmatrix} -5 & 2 & 2 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$ sia singolare. [α = 1]

148. Risolvere: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 13 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \end{cases}$ [$x_1 = 2 \wedge x_2 = 2 \wedge x_3 = 1$]

Si dica, in base al teorema di Rouché-Capelli, se sono possibili i sistemi:

149. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = 7 \end{cases}$ 150. $\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$ 151. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 = 2 \\ 2x_1 - 8x_2 = 4 \end{cases}$

[Possibile; Impossibile; Possibile]