Capitolo 5

Algebra lineare

5.1. VETTORI

In generale, nella geometria elementare un segmento AB è introdotto come la parte di retta compresa tra i due punti A, B fissati su di essa, senza specificare un "ordine" tra gli estremi A, B. In questo capitolo, però, non potremo più considerare del tutto equivalenti i segmenti indicati con AB e con BA. Il concetto di vettore si basa infatti sul concetto di segmento *orientato*, cioè di parte di retta che collega un *primo* estremo a un *secondo* estremo.

Definizione 5.1. Assegnati, nel piano, due punti P, Q, si dice segmento orientato nel piano il segmento $\overrightarrow{PQ}$ avente quale primo estremo (o punto di applicazione) il punto P e quale secondo estremo il punto Q.

Le caratteristiche di un segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ sono le seguenti:

- *lunghezza*: è la lunghezza del segmento PQ; fissata l'unità di misura, è anche possibile considerare la misura di PQ, indicata con $\overline{PQ}$ ed espressa da un reale non negativo (rapporto tra PQ e l'unità di misura);
- *direzione*: è la direzione della retta alla quale appartiene PQ; due segmenti orientati hanno dunque la stessa direzione se appartengono alla stessa retta o a rette parallele;
- *verso*: corrisponde all'ordine con cui vengono considerati gli estremi di PQ; su PQ possono quindi essere fissati due versi tra loro opposti: quello in cui P precede Q (il segmento orientato si scrive allora $\overrightarrow{PQ}$) e quello in cui Q precede P (il segmento orientato si scrive allora $\overrightarrow{QP}$).

Definizione 5.2. Due segmenti orientati si dicono equipollenti se hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione, lo stesso verso.

La relazione di equipollenza è una relazione di equivalenza; infatti, essa gode delle proprietà *riflessiva* (ogni segmento orientato è equipollente a se stesso), *simmetrica* (se un segmento orientato è equipollente a un secondo, allora anche questo secondo segmento orientato è equipollente al primo), *transitiva* (se due segmenti orientati sono equipollenti a un terzo segmento orientato, allora sono equipollenti tra loro).

Definizione 5.3. Si dice vettore piano una classe di equivalenza definita nell'insieme dei segmenti orientati nel piano dalla relazione di equipollenza.

I vettori devono essere sempre tenuti ben distinti dai numeri; al fine di rendere evidente tale distinzione anche dal punto di vista della notazione, i vettori si indicano con una lettera in grassetto: **v**, **w** … (talvolta si utilizzano lettere sopralineate, come $\overline{\mathbf{v}}$, o sovrastate da una freccetta, come $\vec{\mathbf{v}}$).

Un vettore piano è individuato da un segmento orientato $\overrightarrow{PQ}$ della classe di equivalenza. Un vettore è dunque caratterizzato da modulo, direzione e verso.

Definizione 5.4. Si dice vettore piano nullo il vettore piano avente modulo 0; esso si indica con il simbolo **0**.

Definizione 5.5. Dati i vettori piani **v**, **w**, rappresentati rispettivamente dai segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, aventi lo stesso punto di applicazione, si dice *somma* di **v** e **w** il vettore piano **v**+**w** rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{AP}$, essendo AP diagonale del parallelogrammo ABPC.

L'elemento neutro rispetto all'addizione di vettori è il vettore nullo. Infatti, per ogni vettore piano **v** risulta: $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Definizione 5.6. Dato il vettore piano **v** e lo scalare $k\in\mathbf{R}$, si dice prodotto di **v** per k il vettore piano $\mathbf{w} = k\cdot\mathbf{v}$ avente il modulo uguale al modulo di **v** moltiplicato per il valore assoluto di k, la direzione uguale alla direzione di **v**, il verso uguale a quello di **v** se k è positivo, opposto a quello di **v** se k è negativo.

Il prodotto di un vettore piano **v** qualsiasi per 0 è il vettore piano nullo, **0**. La sottrazione di **w** da **v** si realizza addizionando a **v** il vettore piano $(-1)\cdot\mathbf{w}$:

$$\mathbf{v}+(-1)\cdot\mathbf{w} \qquad \text{si scrive, brevemente:} \qquad \mathbf{v}-\mathbf{w}$$

e il vettore piano $(-1)\cdot\mathbf{w}$, detto *opposto* di **w**, si indica con la scrittura $-\mathbf{w}$.

Definizione 5.7. Assegnate, nel piano, due rette distinte e incidenti r, s, si dicono vettori componenti di un vettore piano **v** (secondo le direzioni delle rette assegnate) due vettori piani **a**, **b**, aventi rispettivamente le direzioni di r, s, la cui somma sia **v**.

L'esistenza e l'unicità dei vettori componenti di un vettore piano secondo due direzioni sono garantite dal risultato seguente, che ci limitiamo a enunciare.

Proposizione 5.1. Assegnate, nel piano, due rette distinte e incidenti r, s e un vettore piano **v**, esiste ed è unica la coppia di vettori piani **a**, **b**, aventi rispettivamente le direzioni di r, s, la cui somma sia **v**.

Definizione 5.8. Siano assegnate, nel piano, due rette distinte e incidenti r, s, e un'unità di misura; siano fissati due vettori piani $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ (detti *versori*) di modulo unitario e aventi le direzioni rispettivamente di r e di s; si dicono componenti di un vettore piano $\mathbf{v}$ i due reali a, b tali che, detti $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i vettori componenti di $\mathbf{v}$ secondo le direzioni di r e di s, risulta: $\mathbf{a} = a\cdot\mathbf{u}_x \quad \mathbf{b} = b\cdot\mathbf{u}_y$

La definizione precedente ci consente quindi di identificare un vettore piano con una coppia ordinata (a; b) di numeri reali, detti componenti del vettore dato. D'ora in avanti, *supporremo che siano assegnate, nel piano, due rette distinte e incidenti r, s e un'unità di misura, e che siano fissati due versori* $\mathbf{u}_x$, $\mathbf{u}_y$ *aventi le direzioni rispettivamente di r e di s*. Tutto ciò ci consentirà di riferirci a un vettore piano $\mathbf{v}$ attraverso la coppia ordinata delle sue componenti.

Per quanto riguarda le operazioni di addizione di vettori piani e di prodotto di un vettore piano per uno scalare enunciamo le due proposizioni seguenti.

Proposizione 5.2. Siano $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ due vettori piani rispettivamente di componenti (a; b) e (c; d). Allora il vettore piano $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ ha componenti ($a+c$; $b+d$).

Proposizione 5.3. Sia $\mathbf{v}$ un vettore piano di componenti (a; b) e sia $k\in\mathbf{R}$ uno scalare. Allora il vettore piano $k\cdot\mathbf{v}$ ha componenti ($k\cdot a$; $k\cdot b$).

Un vettore piano è dato dalla coppia ordinata delle componenti; per esprimere un vettore nello spazio tridimensionale è necessario ricorrere a una *terna ordinata di reali* (a; b; c). E il concetto può essere esteso alla scrittura: (a_1; a_2; a_3; ...; a_n), *n-pla ordinata di reali*, essendo n un naturale maggiore di 3.

Definizione 5.9. Si dice vettore n-dimensionale una n-pla ordinata di numeri reali: (a_1; a_2; a_3; ...; a_n)

L'insieme dei vettori n-dimensionali si indica con $\mathbf{R}^n$. Due vettori (a_1; a_2; a_3; ...; a_n) e (b_1; b_2; b_3; ...; b_n) di $\mathbf{R}^n$ (aventi, dunque, la stessa dimensione) sono *uguali* se e soltanto se: $a_1 = b_1 \ \wedge\ a_2 = b_2 \ \wedge\ a_3 = b_3 \ \wedge\ \dots \ \wedge\ a_n = b_n$

Esempio 5.1. Il vettore di $\mathbf{R}^5$ (0; 0; 0; 0; 0) è il vettore nullo di $\mathbf{R}^5$ e non deve essere confuso con i vettori nulli di $\mathbf{R}^n$ con $n \neq 5$ né con il numero reale 0.

Le proposizioni precedenti possono essere generalizzate:

Proposizione 5.4. Siano $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ due vettori di $\mathbf{R}^n$ rispettivamente di componenti (v_1; v_2; v_3; ...; v_n) e (w_1; w_2; w_3; ...; w_n). Allora il vettore $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ ha componenti (v_1+w_1; v_2+w_2; v_3+w_3; ...; v_n+w_n).

Proposizione 5.5. Sia $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbf{R}^n$ di componenti (v_1; v_2; v_3; ...; v_n) e sia $k \in\mathbf{R}$ uno scalare. Allora il vettore $k\cdot\mathbf{v}$ ha componenti ($k\cdot v_1$; $k\cdot v_2$; $k\cdot v_3$; ...; $k\cdot v_n$).

Esempio 5.2. Dati i due vettori di $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{v} = (1; 4; -2)$, $\mathbf{w} = (-1; 0; 3)$, il vettore $2\mathbf{v}+\mathbf{w}$ è il vettore di $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{v}+\mathbf{w} = (0; 8; 2)$

Definizione 5.10. L'insieme $\mathbf{R}^n$, in cui siano definite la legge di composizione interna *addizione di vettori* e la legge di composizione esterna *moltiplicazione per uno scalare reale* si dice *spazio vettoriale* su $\mathbf{R}$ in quanto:

- per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{z}$ di $\mathbf{R}^n$:
  $(\mathbf{v}+\mathbf{w})+\mathbf{z} = \mathbf{v}+(\mathbf{w}+\mathbf{z})$ (proprietà *associativa*);
  il vettore nullo $\mathbf{0}$ di $\mathbf{R}^n$ è *neutro* rispetto alla addizione di vettori;
  ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{R}^n$ ha in $\mathbf{R}^n$ l'inverso additivo, $-\mathbf{v}$, *opposto* di $\mathbf{v}$;
  $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$ (proprietà *commutativa*);
- inoltre, per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ di $\mathbf{R}^n$ e per ogni a, b di $\mathbf{R}$, risulta:
  $a\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = a\cdot\mathbf{v}+a\cdot\mathbf{w}$
  $(a+b)\cdot\mathbf{v} = a\cdot\mathbf{v}+b\cdot\mathbf{v}$
  $a\cdot(b\cdot\mathbf{v}) = (ab)\cdot\mathbf{v}$
  $1\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}$

Diciamo che il naturale n è la *dimensione* dello spazio vettoriale $\mathbf{R}^n$.

Un concetto fondamentale collegato ai vettori è quello di dipendenza lineare.

Definizione 5.11. Dati i vettori $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, ... $\mathbf{v}_m$ di $\mathbf{R}^n$ e gli scalari reali k_1, k_2, k_3, ... k_m, si dice combinazione lineare di tali vettori secondo gli scalari dati il vettore di $\mathbf{R}^n$: $k_1\cdot\mathbf{v}_1+k_2\cdot\mathbf{v}_2+k_3\cdot\mathbf{v}_3+ \ldots +k_m\cdot\mathbf{v}_m$

Esempio 5.3. Dati i due vettori di $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{v} = (1; 4; -2)$, $\mathbf{w} = (-1; 0; 3)$ e i due scalari reali α, β, la loro combinazione lineare è il vettore di $\mathbf{R}^3$:

$$\alpha\cdot\mathbf{v}+\beta\cdot\mathbf{w} = (\alpha-\beta; 4\alpha; -2\alpha+3\beta)$$

Se gli scalari k_1, k_2, k_3, ... k_m sono *tutti* nulli, allora la combinazione lineare di m vettori *qualsiasi* $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, ... $\mathbf{v}_m$ di $\mathbf{R}^n$ secondo tali scalari è il vettore $\mathbf{0}$ di $\mathbf{R}^n$. Ma è vero il *viceversa*? In altri termini: se una combinazione lineare di m vettori è il vettore nullo, possiamo essere *sicuri* che gli scalari sono tutti nulli? In generale *no*. Tutto dipende dagli m vettori che sono stati impiegati per ottenere la combinazione lineare in questione: è possibile (con *alcune* scelte di vettori) ottenere come risultato il vettore $\mathbf{0}$ *anche senza ricorrere a scalari tutti nulli*.

Esempio 5.4. Siano dati i due vettori di $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{v} = (2; -6; -4)$, $\mathbf{w} = (-3; 9; 6)$. La loro combinazione lineare è (con α, β reali):

$$\alpha\cdot\mathbf{v}+\beta\cdot\mathbf{w} = (2\alpha-3\beta; -6\alpha+9\beta; -4\alpha+6\beta)$$

Sappiamo già che se $\alpha = \beta = 0$, risulta: $\alpha\cdot\mathbf{v}+\beta\cdot\mathbf{w} = (0; 0; 0) = \mathbf{0}$.
Tuttavia, anche scegliendo i reali α, β nel modo seguente:

$\alpha = 3k \quad \wedge \quad \beta = 2k \qquad$ con: $k \in \mathbf{R}$

risulta: $\alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{w} = (0; 0; 0) = \mathbf{0}$. Ad esempio, per $\alpha = 3$ e $\beta = 2$ otteniamo:

$$\alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{w} = (6-6; -18+18; -12+12) = (0; 0; 0) = \mathbf{0}$$

Combinando linearmente altri vettori può essere impossibile ottenere il vettore nullo senza ricorrere a scalari tutti nulli.

Esempio 5.5. Siano dati i due vettori di $\mathbf{R}^2$: $\mathbf{v} = (2; 5)$, $\mathbf{w} = (4; -3)$. La loro combinazione lineare è (con α, β reali): $\alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{w} = (2\alpha+4\beta; 5\alpha-3\beta)$. Troviamo i reali α, β in modo da ottenere $\alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{w} = (0; 0) = \mathbf{0}$? Deve risultare:

$$2\alpha+4\beta = 0 \quad \wedge \quad 5\alpha-3\beta = 0$$

Ricaviamo α dalla prima equazione: $\alpha = -2\beta$ e sostituendo nella seconda:

$$5(-2\beta)-3\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0$$

Pertanto, la combinazione lineare dei vettori $\mathbf{v} = (2; 5)$ e $\mathbf{w} = (4; -3)$ è il vettore $\mathbf{0}$ se e soltanto se gli scalari impiegati in essa sono tutti nulli.

I comportamenti esaminati negli esempi introducono la definizione seguente.

Definizione 5.12. Gli m vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots \mathbf{v}_m$ di $\mathbf{R}^n$ si dicono *linearmente indipendenti* se la loro combinazione lineare $k_1 \cdot \mathbf{v}_1 + k_2 \cdot \mathbf{v}_2 + k_3 \cdot \mathbf{v}_3 + \ldots + k_m \cdot \mathbf{v}_m$ è il vettore nullo $\mathbf{0}$ di $\mathbf{R}^n$ *soltanto* nel caso in cui $k_1 = k_2 = k_3 = \ldots = k_m = 0$.

Gli m vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots \mathbf{v}_m$ di $\mathbf{R}^n$ si dicono *linearmente dipendenti* se la loro combinazione lineare $k_1 \cdot \mathbf{v}_1 + k_2 \cdot \mathbf{v}_2 + k_3 \cdot \mathbf{v}_3 + \ldots + k_m \cdot \mathbf{v}_m$ può essere il vettore nullo $\mathbf{0}$ di $\mathbf{R}^n$ anche se gli scalari $k_1, k_2, k_3, \ldots, k_m$ *non* sono tutti nulli.

Per quanto visto negli esempi, i vettori di $\mathbf{R}^3$: $\mathbf{v} = (2; -6; -4)$ e $\mathbf{w} = (-3; 9; 6)$ sono linearmente dipendenti; i vettori di $\mathbf{R}^2$: $\mathbf{v} = (2; 5)$ e $\mathbf{w} = (4; -3)$ sono linearmente indipendenti. Ci limitiamo a enunciare la proposizione seguente:

Proposizione 5.6. Se $m > n$, allora m vettori di $\mathbf{R}^n$ sono linearmente dipendenti.

La condizione $m > n$ espressa dalla proposizione 5.6 affinché m vettori di $\mathbf{R}^n$ siano linearmente dipendenti è sufficiente, ma non necessaria: m vettori di $\mathbf{R}^n$ possono essere linearmente dipendenti anche se $m \leq n$.

Proposizione 5.7. Se (almeno) uno degli m vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \ldots \mathbf{v}_m$ di $\mathbf{R}^n$ è il vettore nullo $\mathbf{0}$ di $\mathbf{R}^n$, gli m vettori considerati sono linearmente dipendenti.

Anche la condizione sufficiente ora espressa non è necessaria: m vettori possono essere linearmente dipendenti anche se nessuno di essi è il vettore nullo.

5.2. MATRICI

Definizione 5.13. Si dice matrice $m \times n$ una tabella rettangolare costituita da numeri reali disposti secondo m righe e n colonne.

Indicheremo una matrice con la scrittura $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ oppure, più brevemente, con: $\mathbf{A}(m \times n)$. Gli $m \cdot n$ reali che costituiscono una matrice $m \times n$ si dicono *elementi* della matrice; per identificare la posizione di ciascuno di essi, si usa indicare un elemento con a_{ij} in cui i indica il numero di riga dell'elemento considerato e j il numero di colonna (dunque a_{ij} è l'elemento della i-esima riga e della j-esima colonna della matrice assegnata).

Il raffronto delle rispettive definizioni consente di affermare che il concetto di vettore può essere considerato una particolarizzazione del concetto di matrice: un vettore può infatti essere pensato come una matrice $1 \times n$ (*"matrice-riga"* o *"vettore-riga"*: una sola riga e n colonne) o come una matrice $m \times 1$ (*"matrice-colonna"* o *"vettore-colonna"*: m righe e una sola colonna).

Due matrici sono *dello stesso tipo* quando hanno lo stesso numero di righe e lo stesso numero di colonne. In due matrici $\mathbf{A}(m \times n)$ e $\mathbf{B}(m \times n)$ dello stesso tipo, elementi con la stessa posizione, a_{ij} e b_{ij}, sono detti *corrispondenti*.

Definizione 5.14. Due matrici dello stesso tipo si dicono uguali se hanno tutti gli elementi corrispondenti uguali.

Definizione 5.15. Data la matrice $\mathbf{A}(m \times n)$, si dice matrice trasposta la $\mathbf{A}^\mathbf{T}(n \times m)$ ottenuta dalla $\mathbf{A}(m \times n)$ scambiando le righe con le colonne e viceversa.

Esempio 5.6. La trasposta della $\mathbf{C}(2 \times 3)$: $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ è la $\mathbf{C}^\mathbf{T}(3 \times 2)$: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$

Definizione 5.16. Una matrice $m \times n$ si dice matrice nulla se tutti i suoi elementi sono 0. La matrice nulla $m \times n$ si indica con la scrittura $\mathbf{0}(m \times n)$.

Se in una matrice il numero delle righe è uguale a quello delle colonne, essa è detta matrice *quadrata*. Una matrice quadrata $\mathbf{A}(m \times m)$ si dice di *ordine m*.

Definizione 5.17. Si dice matrice simmetrica una matrice quadrata $\mathbf{A}(m \times m)$ tale che, per ogni i tale che $1 \le i \le m$ e per ogni j tale che $1 \le j \le m$ risulta: $a_{ij} = a_{ji}$

Il lettore può facilmente rendersi conto che la matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$ è simmetrica se e soltanto se: $\mathbf{A}(m\times m) = \mathbf{A}^{\mathbf{T}}(m\times m)$ cioè se e soltanto se $\mathbf{A}(m\times m)$ coincide con la propria trasposta.

Definizione 5.18. Si dice matrice diagonale una matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$ tale che: $a_{ij} = 0$ con $i \neq j$, per ogni i tale che $1\le i\le m$, per ogni j tale che $1\le j\le m$.

Definizione 5.19. Si dice matrice unità (o matrice identità) una matrice quadrata $\mathbf{I}(m\times m)$ tale che: $a_{ii} = 1$ per ogni i tale che $1\le i\le m$; e $a_{ij} = 0$ con $i \neq j$, per ogni i tale che $1\le i\le m$, per ogni j tale che $1\le j\le m$.

La definizione seguente introduce l'operazione di addizione di matrici: si noti che essa è definita *solo se le matrici da addizionare sono dello stesso tipo*.

Definizione 5.20. Date le matrici dello stesso tipo $\mathbf{A}(m\times n)$ e $\mathbf{B}(m\times n)$, si dice *somma* di tali matrici la matrice $\mathbf{C}(m\times n)$ i cui elementi sono le somme degli elementi corrispondenti di $\mathbf{A}(m\times n)$ e di $\mathbf{B}(m\times n)$; cioè: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ per ogni i tale che $1\le i\le m$ e per ogni j tale che $1\le j\le n$.

Esempio 5.7. Date le matrici $\mathbf{A}(2\times 3)$ e $\mathbf{B}(2\times 3)$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

la matrice somma di esse è la $\mathbf{C}(2\times 3)$: $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+5 & 7+1 \\ 1+0 & 4+2 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$

L'addizione di matrici gode delle proprietà espresse dalla proposizione seguente (lasciamo al lettore le semplici dimostrazioni).

Proposizione 5.8. L'addizione di matrici gode delle proprietà seguenti:
- l'addizione di matrici $m\times n$ è un'operazione *interna* all'insieme delle matrici $m\times n$: addizionando due matrici $m\times n$ otteniamo una matrice $m\times n$;
- l'addizione di matrici $m\times n$ è un'operazione *associativa*; per ogni terna di matrici dello stesso tipo $\mathbf{A}(m\times n)$, $\mathbf{B}(m\times n)$, $\mathbf{C}(m\times n)$, risulta: $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C} = \mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$
- l'addizione di matrici $m\times n$ è un'operazione *commutativa*; per ogni coppia di matrici dello stesso tipo $\mathbf{A}(m\times n)$, $\mathbf{B}(m\times n)$, risulta: $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \mathbf{B}+\mathbf{A}$
- la matrice $\mathbf{0}(m\times n)$ è *elemento neutro* rispetto all'addizione di matrici $m\times n$;
- per ogni $\mathbf{A}(m\times n)$, esiste una $-\mathbf{A}(m\times n)$ tale che: $\mathbf{A}+(-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A})+\mathbf{A} = \mathbf{0}$ (dove con $\mathbf{0}$ si indica la matrice nulla $m\times n$). La matrice $-\mathbf{A}(m\times n$ si dice *matrice opposta* della matrice $\mathbf{A}(m\times n)$: gli elementi della matrice $-\mathbf{A}(m\times n)$ sono gli opposti additivi dei corrispondenti elementi della matrice $\mathbf{A}(m\times n)$.

Definizione 5.21. Data la matrice $\mathbf{A}(m\times n)$ e dato $k\in\mathbf{R}$, si dice prodotto di $\mathbf{A}(m\times n)$ per lo scalare k la matrice $\mathbf{B}(m\times n)$ i cui elementi sono i prodotti degli elementi corrispondenti di **A**(m×n) per k; ovvero tale che: $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ per ogni i tale che $1 \le i \le m$ e per ogni j tale che $1 \le j \le n$.

Il prodotto di una matrice m×n qualsiasi per 0 è la matrice nulla **0**(m×n).

Introduciamo la *moltiplicazione di due matrici*. Si tratta di un'operazione la cui esecuzione è tecnicamente più impegnativa, possibile soltanto tra le matrici:

A(m×p) e **B**(p×n)

(*attenzione: considerate in questo ordine*, in quanto il prodotto tra matrici, come vedremo, *non* è un'operazione commutativa). Quindi: è possibile moltiplicare una prima matrice per una seconda matrice soltanto se il numero delle colonne della prima coincide con il numero delle righe della seconda.

Iniziamo da un caso particolare: se come primo fattore consideriamo una matrice **A**(1×p) e come secondo fattore consideriamo una matrice **B**(p×1), la condizione sopra anticipata è soddisfatta. Pertanto, ha senso introdurre il prodotto di una matrice-riga (o vettore-riga) con p elementi per una matrice-colonna (o vettore-colonna) con p elementi. Come vedremo, il prodotto di una matrice **A**(1×p) per una matrice **B**(p×1) sarà una matrice **C**(1×1): una matrice di una sola riga e di una sola colonna, costituita da un solo numero reale.

Definizione 5.22. Date la matrice **A**(1×p) ("matrice-riga") e la matrice **B**(p×1) ("matrice-colonna"), si dice prodotto **A**·**B** la matrice **C**(1×1) costituita dal numero reale ottenuto moltiplicando, per ogni i tale che $1 \le i \le p$, l'elemento a_{ij} di **A** per l'elemento b_{ij} di **B** e sommando quindi i prodotti ottenuti.

Quindi il prodotto di $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \end{bmatrix}$ e di: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{p1} \end{bmatrix}$ è la matrice

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [c_{11}]$, con: $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1p} \cdot b_{p1}$

Esempio 5.8. Date le due matrici: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ il loro prodotto è la matrice 1×1: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = [6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3] = [11]$

Possiamo ora generalizzare quanto introdotto al caso di matrici **A**(m×p) e **B**(p×n): si ricordi, comunque, che affinché sia eseguibile la moltiplicazione di due matrici (prese in un dato ordine) *il numero delle colonne della prima deve essere uguale al numero di righe della seconda*.

Definizione 5.23. Date le matrici $\mathbf{A}(m \times p)$ e $\mathbf{B}(p \times n)$, si dice prodotto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ la matrice $\mathbf{C}(m \times n)$ tale che ogni elemento c_{ij} di $\mathbf{C}$ sia il prodotto della riga i-esima di $\mathbf{A}$ per la colonna j-esima di $\mathbf{B}$.

Esempio 5.9. Date le matrici $\mathbf{A}(3 \times 2)$ e $\mathbf{B}(2 \times 4)$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 & 1 \\ 6 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

la matrice $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}(3 \times 4)$ è la seguente:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2\cdot 3+7\cdot 6 & 2\cdot 2+7\cdot 5 & 2\cdot 9+7\cdot 8 & 2\cdot 1+7\cdot 4 \\ 3\cdot 3+4\cdot 6 & 3\cdot 2+4\cdot 5 & 3\cdot 9+4\cdot 8 & 3\cdot 1+4\cdot 4 \\ 1\cdot 3+5\cdot 6 & 1\cdot 2+5\cdot 5 & 1\cdot 9+5\cdot 8 & 1\cdot 1+5\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 39 & 74 & 30 \\ 33 & 26 & 59 & 19 \\ 33 & 27 & 49 & 21 \end{bmatrix}$$

Proposizione 5.9. La moltiplicazione di matrici gode delle proprietà seguenti:

- se tutte le operazioni indicate sono eseguibili (se il numero delle colonne del primo fattore è uguale al numero delle righe del secondo fattore, in tutte le moltiplicazioni), la moltiplicazione di matrici è *associativa*: $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
- se le operazioni indicate sono eseguibili, valgono le proprietà *distributive*:

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \qquad (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

- la moltiplicazione di matrici *non* è un'operazione commutativa.

In alcuni casi particolari può accadere che risulti $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$; ad esempio, se:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

è:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1\cdot 5+0\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot 7 \\ 0\cdot 5+0\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5\cdot 1+0\cdot 0 & 5\cdot 0+0\cdot 0 \\ 0\cdot 1+7\cdot 0 & 0\cdot 0+7\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tutto ciò non significa che la moltiplicazione di matrici possa essere considerata commutativa: affinché un'operazione goda di una proprietà occorre che questa valga in ogni possibile situazione, non soltanto per alcuni casi.

Alcune osservazioni possono essere sviluppate nel caso di moltiplicazioni di matrici quadrate. Enunciamo la proposizione seguente.

Proposizione 5.10. La moltiplicazione di matrici è un'operazione interna all'insieme delle matrici quadrate $m \times m$. Inoltre, siano $\mathbf{A}(m \times m)$ una matrice quadrata, $\mathbf{I}(m \times m)$ la matrice unità $m \times m$, $\mathbf{0}(m \times m)$ la matrice nulla $m \times m$; allora:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

La matrice unità $\mathbf{I}(m \times m)$ è quindi, nell'insieme delle matrici quadrate $m \times m$, l'elemento neutro rispetto alla moltiplicazione di matrici.

L'ultima tesi della proposizione non deve far pensare a una sorta di "legge di annullamento del prodotto" per la moltiplicazione di matrici. Infatti, se è vero che moltiplicando una matrice $\mathbf{A}(m \times m)$ per la matrice nulla $\mathbf{0}(m \times m)$ si ottiene come prodotto una matrice nulla (il lettore può verificare che ciò accade anche se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{0}$ non sono quadrate: basta che sia possibile la moltiplicazione), bisogna notare anche che *la matrice nulla può essere il prodotto di due matrici entrambe non nulle*.

Esempio 5.10. Date le $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ (entrambe non nulle), risulta:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 4 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Il lettore consideri anche le matrici (non nulle): $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e verifichi che risulta:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{ma:} \qquad \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Prima di concludere la presentazione della moltiplicazione di matrici quadrate, è spontaneo domandarsi se, data una $\mathbf{A}(m \times m)$, esiste nell'insieme delle matrici quadrate $m \times m$ l'elemento inverso $\mathbf{A}^{-1}(m \times m)$ di $\mathbf{A}$ rispetto alla moltiplicazione.

In molti casi esiste una tale matrice $\mathbf{A}^{-1}(m \times m)$ (che chiameremo *matrice inversa* della $\mathbf{A}$), ma non sempre. Limitiamoci per ora a fissare la definizione della matrice inversa, senza affermare alcunché circa la sua esistenza.

Definizione 5.24. Assegnata la matrice quadrata $\mathbf{A}(m \times m)$, si dice matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}(m \times m)$ della matrice $\mathbf{A}$ (se $\mathbf{A}^{-1}$ esiste) la matrice quadrata tale che:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Esempio 5.11. Data la matrice (2×2): $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ verifichiamo che la sua matrice inversa è la: $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Infatti, risulta:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot(-1)+1\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot(-1)+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 1+(-1)\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

Una matrice $m\times n$, com'è noto, può essere pensata come un insieme di n matrici-colonna $m\times 1$ (o vettori-colonna m-dimensionali). Consideriamo ora questi n vettori-colonna (m-dimensionali) e domandiamoci: sono essi linearmente indipendenti o linearmente dipendenti? La risposta a quest'ultima domanda è essenziale per introdurre il concetto di rango (per colonne) di una matrice.

Definizione 5.25. Si dice rango (o caratteristica) per colonne di una matrice $\mathbf{A}(m\times n)$ il massimo numero r_c dei vettori-colonna costituenti $\mathbf{A}$ linearmente indipendenti.

Esempio 5.12. Sia data la matrice $\mathbf{A}(3\times 3)$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ Qual è il suo rango r_c per colonne? Innanzitutto r_c deve essere un intero positivo *non maggiore di 3* (la matrice data ha tre colonne). Per trovare r_c, chiediamoci se tutti i tre vettori-colonna che costituiscono $\mathbf{A}$ sono linearmente indipendenti. La risposta è *no*:

$$\alpha\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \gamma\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

per $\alpha = 0$, $\beta = 2k$, $\gamma = -k$ (essendo k un qualsiasi reale, anche non nullo). Pertanto *il numero di colonne linearmente indipendenti di* $\mathbf{A}$ *deve essere minore di 3*, ovvero *il rango per colonne* r_c *di* $\mathbf{A}$ *deve essere minore di 3*.

Possiamo trovare *due* colonne di $\mathbf{A}$ linearmente indipendenti? Concentriamo la nostra attenzione, ad esempio, sulle prime due colonne di $\mathbf{A}$, e scriviamo:

$$\alpha\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+\beta\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad \text{che equivale al sistema:}\quad \begin{cases}\alpha=0\\ \beta=0\\ \alpha+2\beta=0\end{cases}$$

Tale sistema è soddisfatto soltanto per $\alpha = \beta = 0$; pertanto, *il numero di colonne linearmente indipendenti di* **A** *è 2*, cioè *il rango per colonne* r_c *di* **A** *è 2*.

Una matrice $m \times n$ può anche essere pensata come un insieme di m matrici-riga $1 \times n$ (o vettori-riga n-dimensionali). Possiamo quindi introdurre una seconda definizione di rango (rango per righe).

Definizione 5.26. Si dice rango (caratteristica) per righe di una matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ il massimo numero r_r dei vettori-riga costituenti **A** linearmente indipendenti.

Proposizione 5.11. Il rango per colonne r_c di **A** e il rango per righe r_r di una matrice **A** coincidono; il loro comune valore è detto rango (caratteristica) di **A**.

Esempio 5.13. Sia data la matrice $\mathbf{A}(2\times2)$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix}2 & 3\\0 & 5\end{bmatrix}$ Verifichiamo che il suo rango per colonne r_c e il suo rango per righe r_r sono entrambi 2. Infatti:

$$\alpha\cdot\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}+\beta\cdot\begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\quad \text{equivale a:}\quad \begin{cases}2\alpha+3\beta=0\\ 5\beta=0\end{cases}$$

verificato soltanto se $\alpha = \beta = 0$. Pertanto possiamo affermare che $r_c = 2$. Inoltre:

$$\alpha\cdot[2\quad 3]+\beta\cdot[0\quad 5]=[0\quad 0]\quad \text{equivale a:}\quad \begin{cases}2\alpha=0\\ 3\alpha+5\beta=0\end{cases}$$

e tale sistema è verificato soltanto se $\alpha = \beta = 0$. Pertanto anche $r_r = 2$.

Introduciamo ora una funzione definita nell'insieme Q delle matrici *quadrate*:

det: $Q \to \mathbf{R}$

Il *determinante* di una matrice quadrata $\mathbf{A} \in Q$ si indica con la scrittura: det**A** oppure: $|\mathbf{A}|$. Se la matrice $\mathbf{A}(m \times m)$ è scritta in forma estesa, con tutti i suoi elementi, il suo determinante si indica con la scrittura:

$$\det\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm}\end{vmatrix}$$

Iniziamo a definire il determinante nel caso, particolarmente semplice, di una matrice 1×1 (costituita, cioè, da un solo numero reale).

Definizione 5.27. Sia $\mathbf{A} = [a_{11}]$ una matrice quadrata 1×1; diciamo determinante di **A** il reale a_{11} e scriviamo: $\det\mathbf{A} = a_{11}$

Dunque $|a_{11}| = a_{11}$. Per estendere la definizione a matrici quadrate $m \times m$ (con $m>1$), dobbiamo introdurre il concetto di complemento algebrico.

Definizione 5.28. Data la matrice quadrata $\mathbf{A}(m \times m)$ e considerato il suo elemento a_{ij} (appartenente alla riga i-esima e alla colonna j-esima), si dice complemento algebrico A_{ij} dell'elemento a_{ij} il determinante della matrice $(m-1)\times(m-1)$ ottenuta dalla matrice **A** sopprimendo la riga i-esima e la colonna j-esima, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.

Esempio 5.14. Data la matrice quadrata $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ risulta:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |a_{22}| = (+1) \cdot a_{22} = 4$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot |a_{21}| = (-1) \cdot a_{21} = -7$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot |a_{12}| = (-1) \cdot a_{12} = -8$$
$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot |a_{11}| = (+1) \cdot a_{11} = 6$$

Definizione 5.29. Data la matrice quadrata $\mathbf{A}(m \times m)$, diciamo determinante di **A** il reale ottenuto moltiplicando tutti gli elementi di una (qualsiasi) riga o di una (qualsiasi) colonna di **A** per i rispettivi complementi algebrici, e sommando i prodotti così ricavati.

La precedente definizione presuppone che il determinante trovato *non vari al variare della particolare riga o colonna considerata per effettuarne praticamente il calcolo* (è possibile dimostrare questa invarianza).

Esempio 5.15. Per $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ è: $\det\mathbf{A} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = 6 \cdot 4 + 8 \cdot (-7) = -32$

Il calcolo del determinante di una matrice 2×2 è sintetizzato nella regola:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Esempio 5.16. Data la matrice $\mathbf{A}(3 \times 3)$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ risulta:

det**A** = $a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}$

Calcoliamo i complementi algebrici A_{11}, A_{12}, A_{13}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}9 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix} = (+1)\cdot(9\cdot8-5\cdot7) = 37$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 5\\ 6 & 8\end{vmatrix} = (-1)\cdot(4\cdot8-5\cdot6) = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 9\\ 6 & 7\end{vmatrix} = (+1)\cdot(4\cdot7-9\cdot6) = -26$$

Quindi: det**A** = $3\cdot37+1\cdot(-2)+2\cdot(-26) = 57$

Anche per il calcolo del determinante di una matrice quadrata 3×3 esiste una regola pratica (detta *regola di Sarrus*), riassunta nel procedimento seguente:

- si scriva la matrice **A**(3×3) in questione e, di seguito, si riscrivano le sue prime due colonne:

$$\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{matrix}$$

- con riferimento alla tabella così ottenuta, si considerino i prodotti degli elementi che si trovano sulle diagonali "discendenti", aventi direzione "dall'alto-sinistra al basso-destra":

$$a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} \qquad a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} \qquad a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$

  Tali prodotti devono essere addizionati tra loro (così come vengono ottenuti, senza essere cambiati di segno);
- si considerino quindi i prodotti degli elementi che si trovano sulle diagonali "ascendenti", con direzione "dal basso-sinistra all'alto-destra":

$$a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} \qquad a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} \qquad a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

  Tali prodotti devono essere *cambiati di segno* e addizionati ai precedenti. Il risultato che si ottiene è il determinante della matrice **A**(3×3):

$$\det\mathbf{A} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} + \\ - a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13} - a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11} - a_{33}\cdot a_{21}\cdot a_{12}$$

Esempio 5.17. Data la matrice **A**(3×3) esaminata nell'esempio precedente), calcoliamo il suo determinante con la regola di Sarrus. Dalla tabella:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 4 & 9 \\ 6 & 7 \end{matrix}$$

otteniamo: $\det\mathbf{A} = 3\cdot9\cdot8 + 1\cdot5\cdot6 + 2\cdot4\cdot7 - 6\cdot9\cdot2 - 7\cdot5\cdot3 - 8\cdot4\cdot1 = 57$

Definizione 5.30. La matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$ si dice singolare se il suo determinante è nullo.

Esempio 5.18. Determinare il valore di $\alpha\in\mathbf{R}$ in modo che la matrice $\mathbf{A}(3\times3)$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & \alpha \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

sia singolare. Il determinante di **A** può essere facilmente calcolato se notiamo che la prima colonna è costituita dall'elemento 1 seguito da due elementi nulli:

$$\det\mathbf{A} = 1\cdot\begin{vmatrix} 5 & \alpha \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 30-3\alpha$$

(gli altri due complementi algebrici vengono moltiplicati per 0).

Pertanto **A** è singolare quando $\alpha = 10$.

Enunciamo ora i due risultati seguenti.

Proposizione 5.12. Esiste la matrice inversa della matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$ se e soltanto se **A** non è singolare. In tale caso, la matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}$ della matrice **A** è unica.

Una matrice quadrata non singolare viene anche denominata *invertibile*.

Proposizione 5.13. Data la matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$ non singolare, la sua matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}$ $(m\times m)$ si ottiene scrivendo la trasposta $\mathbf{A}^T$ della matrice data, sostituendo a ciascun elemento di tale matrice trasposta il rispettivo complemento algebrico e dividendo la matrice così ottenuta per $\det\mathbf{A}$.

Esempio 5.19. Determiniamo l'inversa della $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ Risulta $\det\mathbf{A} = -32$; pertanto **A** è non singolare e dunque invertibile. La trasposta è: $\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$.

Sostituiamo a ogni elemento di $\mathbf{A}^T$ il rispettivo complemento algebrico:

$$\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Dividiamo infine quest'ultima matrice per det**A** = –32; risulta:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{32} & \frac{8}{32} \\ \frac{7}{32} & -\frac{6}{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{32} & -\frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

Possiamo inoltre verificare che è $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Infatti:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{32} & -\frac{3}{16} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 6\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+8\cdot\left(\frac{7}{32}\right) & 6\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+8\cdot\left(-\frac{3}{16}\right) \\ 7\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)+4\cdot\left(\frac{7}{32}\right) & 7\cdot\left(\frac{1}{4}\right)+4\cdot\left(-\frac{3}{16}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{7}{32} & -\frac{3}{16} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot 6+\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 7 & \left(-\frac{1}{8}\right)\cdot 8+\left(\frac{1}{4}\right)\cdot 4 \\ \left(\frac{7}{32}\right)\cdot 6+\left(-\frac{3}{16}\right)\cdot 7 & \left(\frac{7}{32}\right)\cdot 8+\left(-\frac{3}{16}\right)\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}$$

La determinazione del rango può essere condotta applicando il concetto di determinante. Enunciamo a tale riguardo l'importante proposizione seguente:

Proposizione 5.14. Data una matrice **A**($m\times n$), sia k il massimo intero positivo tale che la matrice quadrata **B**($k\times k$), ottenuta considerando gli elementi comuni a k righe e a k colonne di **A**, sia non singolare; allora il rango di **A**($m\times n$) è k.

Esempio 5.20. Data $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, è det**A** = 57 ≠ 0. Il rango di **A**(3×3) è 3.

Esempio 5.21. Determiniamo il rango della matrice $\mathbf{A}(3\times 2)$: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ Il rango di **A** non può superare 2: coincide con il rango per righe di **A** (non maggiore di 3) e con il rango per colonne di **A** (non maggiore di 2); inoltre, il massimo intero positivo k tale che una matrice ottenuta considerando gli elementi comuni a k righe e a k colonne di **A** sia quadrata è 2. Per dire che il rango di **A** è 2 dovremmo "estrarre" da **A** una $\mathbf{B}(2\times 2)$ non singolare; le matrici 2×2 ottenute considerando due righe e due colonne di **A** sono però tutte singolari:

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e risulta:} \quad \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 3 - 9\cdot 1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e risulta:} \quad \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3\cdot 6 - 9\cdot 2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e risulta:} \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 3\cdot 2 = 0$$

Il rango di **A** è 1: infatti, qualsiasi matrice 1×1 estratta da **A** (costituita da un singolo elemento di **A**) ha determinante non nullo e quindi è non singolare.

Ci occuperemo ora della risoluzione di un sistema di m equazioni di primo grado nelle n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$. Tale sistema, denominato sistema lineare, può essere efficacemente descritto utilizzando vettori e matrici.

Definizione 5.31. Il sistema:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

di m equazioni di primo grado nelle n incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ si dice *sistema lineare*; esso, considerando la matrice $\mathbf{A}(m\times n)$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$$

detta matrice dei coefficienti, il vettore-colonna $\mathbf{x}(n\times 1)$:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

detto vettore delle incognite e il vettore colonna $\mathbf{b}(m\times 1)$:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

detto vettore dei termini noti, può essere scritto, in forma compatta:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Si dice soluzione di un sistema lineare in m incognite un vettore numerico $n\times 1$:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

tale che, posto uguale al vettore $\mathbf{x}$ delle incognite, tutte le equazioni costituenti il sistema siano soddisfatte. Un sistema lineare si dice:

- *possibile* (o compatibile) se ammette (almeno) una soluzione;
- *impossibile* (o incompatibile) se non ammette alcuna soluzione.

Un sistema lineare possibile si dice inoltre:

- *determinato* se ammette un'unica soluzione;
- *indeterminato* se ammette più di una soluzione.

Si può dimostrare che se un sistema lineare ammette più di una soluzione, allora esso ammette *infinite* soluzioni.

Per risolvere un sistema lineare di m equazioni in m incognite $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ consideriamo la $\mathbf{A}$, matrice quadrata $m\times m$. *Se* $\mathbf{A}$ *è non singolare*, cioè se $\det\mathbf{A}\neq 0$, esiste la matrice inversa $\mathbf{A}^{-1}$ e possiamo moltiplicare a sinistra entrambi i membri della precedente uguaglianza per $\mathbf{A}^{-1}$; otteniamo: $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$ e, ricordando che $\mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{I}$, risulta: $\mathbf{I}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$ e infine:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$$

soluzione di tale sistema (si può provare che tale soluzione è unica).

Riassumiamo quanto finora esposto nella proposizione seguente.

Proposizione 5.15. Il sistema lineare di m equazioni in m incognite: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con la matrice $\mathbf{A}(m\times m)$ non singolare ammette una e una sola soluzione; essa è data dal vettore: $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b}$

Esempio 5.22. Risolviamo il sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 4 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ è non singolare, essendo det$\mathbf{A}$ = 1.

Possiamo dunque ricavare la matrice inversa $\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. Per determinare la soluzione (unica) del sistema lineare, calcoliamo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 - 2\cdot 4 \\ -4\cdot 3 + 3\cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La soluzione del sistema lineare assegnato è data quindi da: $x_1 = 1 \;\wedge\; x_2 = 0$

Uno dei più diffusi procedimenti per la risoluzione di un sistema lineare di m equazioni in m incognite (quando la matrice dei coefficienti è non singolare) è basato sul teorema di Cramer, che enunciamo.

Proposizione 5.16. Teorema di Cramer. Dato il sistema lineare di m equazioni in m incognite: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}(m\times m)$ non singolare, la sua unica soluzione è data da:

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \quad \ldots, \quad x_m = \frac{\det \mathbf{A}_m}{\det \mathbf{A}}$$

dove le $\mathbf{A}_i$ (con $1\le i\le m$) sono le matrici ottenute sostituendo alla i-esima colonna della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ il vettore-colonna $\mathbf{b}$ dei termini noti.

Esempio 5.23. Risolviamo il sistema lineare di 3 equazioni in 3 incognite:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 13 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 19 \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 20 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti è: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ e non è singolare: $\det\mathbf{A} = -17$.

Risolviamo il sistema lineare dato con la regola di Cramer; risulta:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 13 & 2 & 2 \\ 19 & 4 & 3 \\ 20 & 5 & 2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-17}{-17} = 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 13 & 2 \\ 2 & 19 & 3 \\ 4 & 20 & 2 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-34}{-17} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 13 \\ 2 & 4 & 19 \\ 4 & 5 & 20 \end{vmatrix}}{-17} = \frac{-51}{-17} = 3$$

La soluzione del sistema è data quindi da: $x_1 = 1 \wedge x_2 = 2 \wedge x_3 = 3$

I metodi per la risoluzione di un sistema lineare detti "della matrice inversa" e "di Cramer", presentati nei due paragrafi precedenti, sono eleganti ed efficaci, ma sono soggetti a una pesante limitazione: possono essere applicati soltanto a sistemi lineari di m equazioni in m incognite. Ci occuperemo ora del caso generale di un sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

tale che la matrice $\mathbf{A}(m\times n)$ dei coefficienti possa anche *non* essere quadrata.

Il primo problema da risolvere è il seguente: *un sistema lineare di m equazioni in n incognite è sempre possibile? Quali condizioni devono essere verificate affinché un tale sistema ammetta (almeno) una soluzione?* La risposta può essere fatta seguire dal teorema seguente, che ci limitiamo a enunciare.

Proposizione 5.17. Teorema di Rouché-Capelli. Dato il sistema lineare di m equazioni in n incognite:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

diciamo *matrice incompleta* del sistema la matrice $m\times n$ dei coefficienti:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

e diciamo *matrice completa* del sistema la matrice $m\times(n+1)$ ottenuta affiancando, a destra della matrice dei coefficienti, il vettore-colonna dei termini noti:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Allora il sistema dato è *possibile* (cioè ammette una o infinite soluzioni) *se e soltanto se le sue matrici incompleta e completa hanno lo stesso rango.*

Il teorema di Rouché-Capelli consente quindi di identificare i sistemi lineari possibili e quelli impossibili. Nel passaggio dalla matrice incompleta alla completa, il rango *potrebbe* aumentare: se ciò accade, il sistema in esame è impossibile; se ciò non accade, il sistema è possibile (determinato o indeterminato).

Esempio 5.24. Il sistema lineare di tre equazioni in due incognite:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 = 7 \\ 5x_1 + 6x_2 = 11 \\ 2x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases}$$

non ammette soluzioni. Infatti il rango della sua matrice incompleta $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$ è 2 (il lettore lo verificherà ad esempio provando che $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$), mentre il rango della matrice completa $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 5 & 6 & 11 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ è 3 (il determinante di essa è $10 \neq 0$).

Esempio 5.25. È dato il sistema lineare di due equazioni in tre incognite:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

La sua matrice incompleta è: $\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ e ha rango 2 (il lettore lo verificherà, ad esempio, provando che $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$); anche la sua matrice completa:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

ha rango 2 (si può ripetere la verifica precedente!) e quindi, in base al teorema di Rouché-Capelli, il sistema è possibile.

Per impostare la risoluzione, *consideriamo un numero di equazioni e di incognite pari al rango (2) della matrice incompleta, accertando che la matrice dei coefficienti di tali incognite sia non singolare*; le rimanenti incognite saranno considerate parametri (e portate al secondo membro, con i termini noti).

Possiamo scegliere come incognite x_1, x_2 e considerare x_3 parametro:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 1 + x_3 \\ 4x_1 + 3x_2 = 2 + x_3 \end{cases}$$

Questo sistema, di due equazioni in due incognite, può essere risolto applicando il teorema di Cramer; si ottiene:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 + x_3 & 2 \\ 2 + x_3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = x_3 - 1 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 + x_3 \\ 4 & 2 + x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = 2 - x_3$$

Pertanto, per ogni valore attribuito all'incognita x_3, che possiamo indicare con $k \in \mathbf{R}$, troviamo una soluzione del sistema:

$$x_1 = k - 1 \quad \wedge \quad x_2 = 2 - k \quad \wedge \quad x_3 = k$$

Il sistema lineare dato è possibile e indeterminato.

Definizione 5.32. Un sistema lineare di m equazioni in m incognite si dice omogeneo se tutti i suoi termini noti sono nulli, cioè se può essere scritto nella forma: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ essendo $\mathbf{0}$ il vettore nullo m-dimensionale.

È possibile applicare, anche in questo caso, i teoremi di Cramer e di Rouché-Capelli. Ma alcune considerazioni specifiche si rivelano interessanti.

La risoluzione di un sistema omogeneo è semplice se la matrice **A**($m \times m$) dei coefficienti è non singolare. In tale caso risulta applicabile il teorema di Cramer, in base al quale perveniamo alla soluzione (unica):

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{\mathrm{m}} = 0$$

Più interessante è il caso in cui la matrice **A**($m \times m$) dei coefficienti è *singolare*. A tale situazione è dedicata la proposizione seguente, che enunciamo.

Proposizione 5.18. Se il sistema lineare omogeneo di m equazioni in m incognite $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ ha la matrice dei coefficienti **A**($m \times m$) singolare, allora la sua soluzione è (per ogni $k \in \mathbf{R}$):

$$x_1 = k \cdot \mathrm{A}_{i1} \quad \wedge \quad x_2 = k \cdot \mathrm{A}_{i2} \quad \wedge \quad \ldots \quad \wedge \quad x_1 = k \cdot \mathrm{A}_{im}$$

essendo A_{i1}, A_{i2}, ..., A_{im} (con $1 \le i \le m$) i complementi algebrici non tutti nulli di una riga della matrice **A**($m \times m$).

Esempio 5.26. È assegnato il sistema lineare omogeneo di tre equazioni in tre incognite (dove α è un parametro reale): $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + \alpha x_3 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

Si determini α in modo che tale sistema abbia soluzioni *non* tutte nulle, e in tale caso si risolva il sistema. Il determinante della matrice dei coefficienti è:

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 & \alpha \\ 2 & 6 & -4 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 50 - 22\alpha$$

Affinché il sistema dato ammetta soluzioni non tutte nulle, dobbiamo imporre che la matrice dei coefficienti sia singolare, cioè che il suo determinante sia nullo. Questo accade se: $\alpha = \frac{25}{11}$. In tale caso la soluzione del sistema è:

$$x_1 = k \cdot \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \quad \wedge \quad x_2 = -k \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \wedge \quad x_3 = k \cdot \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$$

(dove abbiamo indicato i complementi algebrici degli elementi della prima riga della matrice dei coefficienti) cioè:

$$x_1 = -2k \quad \wedge \quad x_2 = -14k \quad \wedge \quad x_3 = -22k$$

per ogni valore attribuito al reale k.