Capitolo 4

Integrazione

4.1. INTEGRALE DEFINITO

Il calcolo integrale è la branca dell'analisi matematica che si occupa della risoluzione di due problemi: *il calcolo delle aree di parti di piano qualsiasi* (non soltanto quindi di poligoni o di parti di piano caratterizzate da determinate regolarità); *la ricerca delle funzioni aventi per derivata una funziona assegnata*.

Le due questioni indicate possono sembrare indipendenti l'una dall'altra. Un approfondimento della situazione, tuttavia, basato sul teorema fondamentale del calcolo integrale (detto anche teorema di Torricelli, o di Torricelli-Barrow) stabilirà un nesso strettissimo tra di esse. Il lettore esamini i due esempi seguenti, riferiti a due parti di piano la cui area è calcolabile mediante le note formule della geometria elementare.

Esempio 4.1. L'area della parte di piano individuata dal sistema:

$$\begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 0 \le x \le b \end{cases} \qquad \text{con } b \text{ reale non negativo}$$

(un rettangolo) cresce *linearmente* al crescere di *b*. Possiamo infatti esprimere tale area in funzione di *b* nella forma:

$$Area = A(b) = b$$

E risulta dunque proporzionale all'ascissa *b*.

Esempio 4.2. L'area della parte di piano individuata dal sistema:

$$\begin{cases} 0 \le y \le mx \\ 0 \le x \le b \end{cases} \qquad \text{con } m \text{ reale positivo e } b \text{ reale non negati-}$$

vo

(un triangolo) cresce al crescere di *b*, *ma non linearmente*. Possiamo infatti esprimere tale area in funzione di *b* nella forma:

$$Area = A(b) = \frac{m}{2}b^2$$

e risulta dunque proporzionale non all'ascissa *b*, ma a b^2. Tutto ciò richiederà un'adeguata interpretazione.

Inoltre, la "velocità" con cui $A(b)$ cresce al crescere di *b* dipende dalla pendenza della retta di equazione $y = mx$, cioè dal suo coefficiente angolare *m*: per "bassi" valori di m, un assegnato incremento di b comporterà un "modesto" incremento di $A(b)$, mentre per "elevati" valori di m, lo stesso incremento di b comporterà un "elevato" incremento di $A(b)$. Nel primo esempio è $m = 0$, tuttavia l'area cresce ugualmente al crescere di b, crescendo come b.

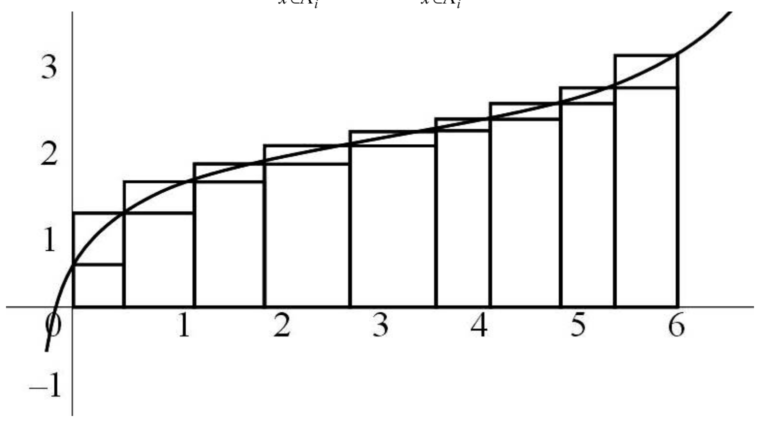
Dall'esame dei precedenti esempi, possiamo concludere che, assegnata una figura nel piano cartesiano mediante il sistema: $\begin{cases} 0 \le y \le f(x) \\ 0 \le x \le b \end{cases}$ l'*incremento della sua area* al crescere di b *sembra dipendere proprio dal coefficiente angolare della retta tangente* alla curva di equazione $y = f(x)$. Non approfondiremo ora le caratteristiche di tale "dipendenza": ma il problema del calcolo dell'area di una parte di piano dovrà tener conto di questa osservazione.

Per introdurre l'integrale definito occupiamoci inizialmente della *suddivisione* di un intervallo $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$.

Definizione 4.1. Consideriamo l'intervallo (segmento) $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$ e l'insieme B $= \{x_0; x_1; x_2; ...; x_n\}$ con $x_0 = a$, $x_n = b$ e con $x_0 < x_1 < x_2 <... < x_n$; si dice *suddivisione* generata da B in $[a; b]$ la famiglia degli n intervalli (segmenti):

$$A_1 = [x_0; x_1]; \quad A_2 = [x_1; x_2]; \quad A_3 = [x_2; x_3]; \quad ...; \qquad A_n = [x_{n-1}; x_n].$$

Data una f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ limitata, cioè tale che $(\forall x \in [a; b])(\exists k_1 \in \mathbf{R}, \exists k_2 \in \mathbf{R}: k_1 \le f(x) \le k_2)$, procediamo nel modo seguente: considerata una suddivisione $\{A_1; A_2; ...; A_n\}$, per ogni suo elemento A_i cercheremo l'estremo inferiore e l'estremo superiore dei valori $f(x)$ quando $x \in A_i$ e moltiplicheremo ciascuno di tali valori, $\inf\limits_{x \in A_i} f(x)$, $\sup\limits_{x \in A_i} f(x)$, per la misura del segmento A_i ottenendo così le misure (le aree) dei due rettangoli aventi per misura della base la misura di A_i e per misura delle altezze rispettivamente $\inf\limits_{x \in A_i} f(x)$ e $\sup\limits_{x \in A_i} f(x)$.



Infine sommeremo le aree di tutti i rettangoli ottenuti considerando i vari elementi della suddivisione $\{A_1; A_2; ...; A_n\}$ e definiremo la *somma inferiore* e la *somma superiore* per la funzione $x \to f(x)$ e per la suddivisione considerata.

Definizione 4.2. Consideriamo l'intervallo (segmento) $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$ e l'insieme B $= \{x_0; x_1; x_2; ...; x_n\}$ con $x_0 = a$, $x_n = b$ e con $x_0 < x_1 < x_2 <... < x_n$; consideriamo la funzione f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ limitata; i reali:

$$I_{inf}(f; B) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) \qquad I_{sup}(f; B) = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$$

si dicono rispettivamente *somma inferiore* e *somma superiore* per la funzione $x \to f(x)$ e per la suddivisione generata da B.

Ci limitiamo a enunciare le proposizioni seguenti.

Proposizione 4.1. Consideriamo l'intervallo (segmento) $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$ e l'insieme $B = \{x_0; x_1; x_2; ...; x_n\}$ con $x_0 = a$, $x_n = b$ e con $x_0 < x_1 < x_2 <... < x_n$; consideriamo la funzione f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ limitata; Se $B \subseteq B'$, essendo $B' = \{x'_0; x'_1; x'_2; ...; x'_p\}$ con $x'_0 = a$, $x'_p = b$ e con $x'_0 < x'_1 < x'_2 <... < x'_p$, risulta:

$$I_{inf}(f; B) \le I_{inf}(f; B') \qquad I_{sup}(f; B) \ge I_{sup}(f; B')$$

Pertanto, passando da una suddivisione a una suddivisione più fine, la somma inferiore non decresce e la somma superiore non cresce.

Proposizione 4.2. Consideriamo l'intervallo (segmento) $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$ e gli insiemi $B = \{x_0; x_1; x_2; ...; x_n\}$ con $x_0 = a$, $x_n = b$ e con $x_0 < x_1 < x_2 <... < x_n$, e $B' = \{x'_0; x'_1; x'_2; ...; x'_p\}$ con $x'_0 = a$, $x'_p = b$ e con $x'_0 < x'_1 < x'_2 <... < x'_p$; consideriamo la funzione f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ limitata; allora risulta: $I_{inf}(f; B) \le I_{sup}(f; B')$

Pertanto, qualsiasi siano le suddivisioni considerate, una somma inferiore è non maggiore di una somma superiore.

Definizione 4.3. Consideriamo l'intervallo (segmento) $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$ e la funzione f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ limitata; i reali: $\sup[I_{inf}(f; B)]$ e $\inf[I_{sup}(f; B)]$ (per *ogni* insieme B che genera una suddivisione in $[a; b]$, e quindi per *ogni* suddivisione di $[a; b]$) si dicono rispettivamente *integrale inferiore secondo Riemann* e *integrale superiore secondo Riemann* della funzione $x \to f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$.

Per quanto sopra detto è certamente: $\sup[I_{inf}(f; B)] \le \inf[I_{sup}(f; B')]$. Il caso in cui risulti $\sup[I_{inf}(f; B)] = \inf[I_{sup}(f; B')]$ è particolarmente importante:

Definizione 4.4. Consideriamo l'intervallo (segmento) $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$ e la funzione f: $[a; b] \to \mathbf{R}$ limitata; se: $\sup[I_{inf}(f; B)] = \inf[I_{sup}(f; B)]$ allora la funzione si dice *integrabile secondo Riemann* e il comune valore di $\sup[I_{inf}(f; B)] = \inf[I_{sup}(f;$

B)] viene detto *integrale secondo Riemann* della funzione $x \to f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$ e si scrive:

$$\sup[I_{inf}(f; B)] = \inf[I_{sup}(f; B)] = \int_a^b f(x)dx$$

L'integrale secondo Riemann viene spesso detto *integrale definito*; l'intervallo $[a; b]$ è detto *intervallo di integrazione*, la funzione $x \to f(x)$ è detta *funzione integranda* e la *x variabile d'integrazione*.

L'integrale secondo Riemann è un numero reale che non dipende dalla variabile di integrazione x (detta talvolta *variabile apparente*). In altri termini:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(z)dz = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(\xi)d\xi = ...$$

Ripercorriamo l'introduzione dell'integrale con riferimento all'interpretazione geometrica. Prima di proseguire diamo la definizione seguente (che sarà riferita per semplicità alle sole funzioni positive, ma che potrà essere estesa facilmente a funzioni qualsiasi).

Definizione 4.5. Sia $x \to f(x)$ una funzione definita in $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$ tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a; b]$; si dice *trapeziode relativo alla f nell'intervallo [a; b]* la parte di piano cartesiano individuata da: $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$

La *somma inferiore* e la *somma superiore* sono quindi le aree delle unioni dei rettangoli (tali unioni sono talvolta dette *plurirettangoli*) aventi per basi le misure dei segmenti A_i e per altezze rispettivamente $\inf_{x \in A_i} f(x)$ e $\sup_{x \in A_i} f(x)$: la somma inferiore è riferita al plurirettangolo incluso nel trapezoide relativo alla funzione f nell'intervallo $[a; b]$; la somma superiore è riferita al plurirettangolo che include tale trapezoide.

Riprendiamo la definizione di integrale: se è $\sup[I_{inf}(f; B)] = \inf[I_{sup}(f; B)]$, il loro comune valore $\int_a^b f(x)dx$ (l'elemento separatore delle classi contigue costituite dalle somme inferiori e dalle somme superiori) può essere assunto come *area del trapeziode considerato*.

Occupiamoci, ora, della questione dell'integrabilità di una funzione in un intervallo $[a; b]$. Enunciamo innanzitutto il seguente risultato, che ci consente di classificare come integrabili le funzioni appartenenti a un vasto insieme.

Proposizione 4.3. Una funzione continua in $[a; b]$ è integrabile in $[a; b]$.

La proposizione precedente esprime una condizione *sufficiente ma non necessaria* affinché una funzione sia integrabile: cioè esistono funzioni dotati di punti di discontinuità che risultano integrabili secondo Riemann. Una funzione *non integrabile* secondo Riemann è, ad esempio, la funzione definita in **R** che assume valore 1 se e solo se x è razionale e 0 altrove.

Abbiamo assegnato un significato alla scrittura $\int_a^b f(x)dx$ con $a < b$. Estendiamo ora tale definizione a scritture analoghe, ma aventi il primo estremo dell'intervallo di integrazione *maggiore* del secondo estremo.

Definizione 4.6. Se $x \to f(x)$ è integrabile in $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Possiamo infine assegnare un significato anche alla scrittura $\int_a^a f(x)dx$.

Definizione 4.7. Poniamo: $\int_a^a f(x)dx = 0$

Quest'ultima definizione ben si accorda con la precedente; infatti:

$$\int_a^a f(x)dx = -\int_a^a f(x)dx \quad \Rightarrow \quad 2\int_a^a f(x)dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

Ci limitiamo a enunciare l'utile risultato seguente.

Proposizione 4.4. Siano $x \to f(x)$ e $x \to g(x)$ funzioni integrabili in $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$ e siano α e β costanti reali. Allora $x \to \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$ è integrabile in $[a; b]$ ed è:

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)dx$$

La proposizione precedente esprime una condizione *sufficiente ma non necessaria* di integrabilità. Ci limitiamo a enunciare l'utile risultato seguente.

Proposizione 4.5. Per ogni terna di reali a, b, c, risulta:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Introduciamo ora il valor medio integrale di una funzione in un intervallo.

Definizione 4.8. Sia $x \to f(x)$ una funzione definita e integrabile in $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$; si dice *valore medio integrale* della funzione $x \to f(x)$ in $[a; b]$ il reale:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \text{(se } a \text{ e } b \text{ non coincidono)}$$

Proposizione 4.6. Teorema del valore medio integrale. Sia $x \to f(x)$ una funzione continua in $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$. Allora esiste (almeno) un punto $x = c$, interno all'intervallo di definizione $[a; b]$ tale che: $(b-a) \cdot f(c) = \int_a^b f(x)dx$

Dimostrazione. Il teorema di Weierstrass ci assicura che la funzione $x \to f(x)$, continua in $[a; b]$ (intervallo chiuso e limitato) assume massimo e minimo in tale intervallo. Siano m e M rispettivamente il minimo e il massimo assunti dalla funzione $x \to f(x)$ in $[a; b]$. Risulta:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \qquad \Rightarrow \qquad m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$$

essendo $m(b-a)$ l'area di un rettangolo inscritto nel trapezoide, $M(b-a)$ l'area di un rettangolo circoscritto nel trapezoide.

Pertanto $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ è compreso tra il minimo e il massimo assunti dalla funzione $x \to f(x)$ in $[a; b]$. In base al teorema dei valori intermedi esiste (almeno) un punto $x = c$ interno all'intervallo di definizione $[a; b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad \Rightarrow \qquad (b-a) \cdot f(c) = \int_a^b f(x)dx \quad \blacksquare$$

Geometricamente, il teorema della media integrale si interpreta affermando che il trapeziode relativo alla funzione f nell'intervallo $[a; b]$ è equivalente a un rettangolo avente per base lo stesso segmento $[a; b]$ (sull'asse delle ascisse) e per altezza il valore $f(c)$ assunto dalla f in un (conveniente) punto interno ad $[a; b]$. Il lettore è invitato a tracciare una rappresentazione grafica della situazione.

La definizione seguente precisa il concetto di funzione primitiva.

Definizione 4.9. Sia data la funzione f: $D \to \mathbf{R}$, con $D \subseteq \mathbf{R}$. La funzione Φ: $D \to \mathbf{R}$ si dice *funzione primitiva* dell'assegnata funzione f se, per ogni $x \in D$, la derivata prima di F, calcolata in x, è $f(x)$: $\Phi'(x) = f(x)$

Esempio 4.3. Consideriamo la $x \to \cos x$ definita (e continua) in $\mathbf{R}$. *Una* sua primitiva è la funzione: $x \to \operatorname{sen} x$ in quanto, per ogni x reale: $D\operatorname{sen} x = \cos x$.

Essa è *"una"* primitiva, non *"la"* primitiva, in quanto anche tutte le funzioni del tipo: $x \to \operatorname{sen} x + c$ essendo $c \in \mathbf{R}$ una (qualsiasi) costante, hanno per derivata prima la funzione assegnata, $x \to \cos x$ (infatti due funzioni derivabili che differiscono per una costante reale hanno la stessa derivata prima).

Generalizzando possiamo dunque enunciare la proposizione seguente.

Proposizione 4.7. Se la funzione espressa da $y = \Phi(x)$ è una primitiva della funzione f, allora anche ogni funzione espressa da $y = \Phi(x)+c$, con $c \in \mathbf{R}$, è una primitiva della funzione f.

Spesso la ricerca di una funzione primitiva di una funzione assegnata è presentata come l'*operazione inversa* della derivazione. Affermare ciò non è del tutto esatto: mentre la derivazione associa a ogni funzione (derivabile) *una e una sola funzione* (la derivata), la ricerca di una primitiva può associare a una funzione *infinite funzioni*, che differiscono tra di loro per una costante.

Per quanto riguarda l'*esistenza* della primitiva di una funzione si può dimostrare il risultato seguente:

Proposizione 4.8. Una funzione continua in un intervallo ammette, in tale intervallo, funzioni primitive.

Consideriamo la funzione $x \to f(x)$ integrabile (sappiamo che a tale proposito è sufficiente che f sia continua) nell'intervallo $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$. Introdurremo ora una nuova funzione $x \to F(x)$ in $[a; b]$ con la definizione seguente.

Definizione 4.10. Data la funzione $x \to f(x)$ integrabile nell'intervallo $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$, si dice *funzione integrale* la funzione $x \to F(x)$ definita in $[a; b]$:

$$x \to \int_a^x f(t)dt$$

La $x \to f(x)$ viene detta *funzione integranda*.

Il lettore non si stupisca della scelta di indicare con t la variabile d'integrazione nell'integrale $\int_a^x f(t)dt$. La variabile di integrazione è una variabile *apparente*, *non* compare nel risultato. Abbiamo preferito utilizzare t al posto di x per evitare confusione tra la variabile di integrazione e il secondo estremo dell'intervallo di integrazione $[a; x]$.

Geometricamente, sappiamo che $\int_a^b f(x)dx$ è interpretabile come l'area del trapezoide relativo alla funzione espressa da $y = f(x)$ nell'intervallo $[a; b]$. Analogamente, la funzione integrale $x \to \int_a^x f(t)dt$ associa a ogni $x \in [a; b]$ l'area del trapezoide relativo alla funzione espressa da $y = f(x)$ nell'intervallo $[a; x]$, con $a \le x \le b$. In particolare, se indichiamo con $x \to F(x)$ la funzione integrale, risulta:

$$x = a \quad \to \quad F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$$

$$x = b \quad \to \qquad F(b) = \int_a^b f(t)dt \; = \int_a^b f(x)dx$$

La proposizione che ora enunceremo e dimostreremo è un risultato della massima importanza per l'analisi matematica.

Proposizione 4.9. Teorema fondamentale del calcolo (di Torricelli). Si consideri la funzione $x \to f(x)$ continua nell'intervallo $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$; allora la funzione integrale $x \to F(x)$: $x \to \int_a^x f(t)dt$ è derivabile in $[a; b]$ e risulta: $F'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Consideriamo $x \in [a; b]$ e $x+h \in [a; b]$ (qualsiasi); risulta:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right] = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt$$

Applichiamo ora a $\int_x^{x+h} f(t)dt$ il teorema del valor medio integrale: deve esistere (almeno) un punto c compreso tra x e $x+h$ se $h>0$ o tra $x+h$ e x se $h<0$ tale che:

$$(x+h-x)\cdot f(c) = h\cdot f(c) = \int_x^{x+h} f(t)dt$$

Dunque: $$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \frac{1}{h}\cdot h \cdot f(c) = f(c)$$

Essendo c tra x e $x+h$ se $h>0$ o tra $x+h$ e x se $h<0$. Se h tende a 0, $x+h$ tende a x e anche c, compreso tra x e $x+h$, tende a x. Ricordando la continuità di f:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c) \qquad \Rightarrow \qquad F'(x) = f(x) \quad \blacksquare$$

Il teorema fondamentale consente di ridurre il problema del calcolo di un integrale definito di una funzione $x \to f(x)$ al problema della determinazione di una primitiva della $x \to f(x)$. Per fare ciò, applicheremo il seguente corollario.

Proposizione 4.10. Si consideri la funzione $x \to f(x)$ continua in $[a; b] \subseteq \mathbf{R}$; allora, detta $x \to \Phi(x)$ *una* funzione primitiva di $x \to f(x)$, risulta:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Dimostrazione. Se $x \to \Phi(x)$ *una* primitiva di $x \to f(x)$, risulta: $\Phi'(x) = f(x)$. Per il teorema fondamentale è: $F'(x) = f(x)$ dove: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ con $a \le x \le b$. Le funzioni $x \to \Phi(x)$ e $x \to F(x)$ hanno in $[a; b]$ la stessa derivata prima e dunque (terzo corollario del teorema di Lagrange) differiscono per una costante:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + k$$

Occupiamoci di k: poniamo $x = a$ e otteniamo:

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt + k \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(a) = k$$

e sostituendo quanto trovato in $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + k$ perveniamo a:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \Phi(a)$$

da cui, ponendo infine $x = b$ (indicando con x la variabile di integrazione):

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt + \Phi(a) \qquad \Rightarrow \qquad \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f(x)dx \quad \blacksquare$$

Siamo ora in grado di calcolare il valore di alcuni integrali definiti. Si è soliti indicare la scrittura $\Phi(b) - \Phi(a)$ con il simbolo $[\Phi(x)]_a^b$, e dunque scriveremo:

$$\int_a^b f(x)dx = [\Phi(x)]_a^b$$

Esempio 4.4. Sapendo che una primitiva di $x \to \cos x$ è $x \to \mathrm{sen}\,x$, calcoliamo:

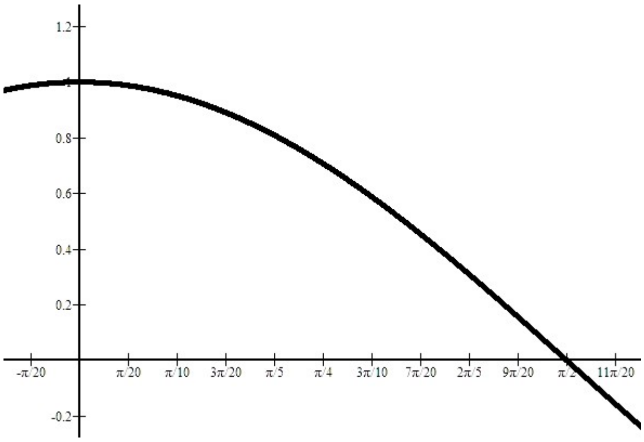
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\mathrm{sen}\,x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{sen}\frac{\pi}{2} - \mathrm{sen}\,0 = 1 - 0 = 1$$

Tenendo presente l'interpretazione geometrica dell'integrale definito, possiamo calcolare l'area di molte parti di piano cartesiano. Iniziamo a considerare una funzione $x \to f(x)$ definita in $[a; b]$ e *positiva*, cioè tale che $f(x) > 0$ per ogni $x \in [a; b]$. L'area del trapeziode relativo alla funzione f nell'intervallo $[a; b]$, cioè l'area della parte di piano cartesiano individuata dal sistema:

$$\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$$

può essere calcolata mediante l'integrale definito: $\int_a^b f(x)dx = [\Phi(x)]_a^b$.

Esempio 4.5. Data la parte di piano cartesiano individuata da $\begin{cases} 0 \le y \le \cos x \\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ se ne calcoli l'area.



Sapendo che $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1-0 = 1$ possiamo concludere che l'area della parte di piano indicata è 1.

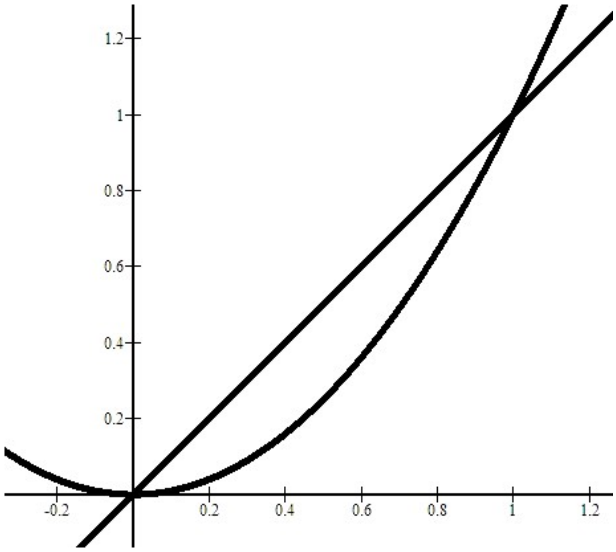
Non sempre la parte di piano di cui è richiesta l'area ha le caratteristiche sopra indicate; può accadere che la parte di piano da considerare non sia compresa tra l'asse delle x e il grafico di $y = f(x)$, ma sia compresa tra i grafici di *due funzioni* (che supporremo inizialmente entrambe positive) e sia indicata dal sistema:

$$\begin{cases} f_1(x) \le y \le f_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$$

In questo caso si calcola l'area della parte di piano indicata da: $\begin{cases} 0 \le y \le f_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$

e si sottrae quella di: $\begin{cases} 0 \le y \le f_1(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$. Dunque l'area di $\begin{cases} f_1(x) \le y \le f_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ è data da: $\int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$

Esempio 4.6. Data la parte di piano cartesiano individuata da $\begin{cases} x^2 \le y \le x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$ calcoliamone l'area, sapendo che una primitiva della funzione $x \to x - x^2$ è la funzione $x \to \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$ (il lettore può verificarlo direttamente).



L'area in questione è espressa dall'integrale $\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx$ che si calcola:

$$\int_0^1 \left(x - x^2\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Il procedimento suggerito *non varia se l'intera figura viene sottoposta a una traslazione di vettore parallelo all'asse delle y*. Dunque l'area della parte di piano individuata da: $\begin{cases} f_1(x) \le y \le f_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ e l'area delli quella (*congruente alla precedente*) individuata da: $\begin{cases} f_1(x) + k \le y \le f_2(x) + k \\ a \le x \le b \end{cases}$ sono uguali per ogni costante k e valgono $\int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right] dx$.

Ciò significa che il procedimento messo a punto *è del tutto indipendente dalla posizione dell'asse delle x*. L'area di una *qualsiasi* parte di piano compresa, per $a \le x \le b$, tra i grafici di $y = f_1(x)$ e di $y = f_2(x)$, con $f_1(x) \le f_2(x)$ per ogni $x\in[a; b]$, è data da $\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$ (dall'integrale da a a b della funzione "posta al di sopra" meno la funzione "posta al di sotto").

4.2. INTEGRALE INDEFINITO

Definizione 4.11. Sia data la funzione f: D→**R**, con D⊆**R**. Si dice *integrale indefinito* della funzione f e si scrive $\int f(x)dx$ l'insieme delle espressioni delle funzioni primitive (se esistono) dell'assegnata funzione f.

La scrittura indicata non inganni il lettore: l'integrale indefinito di una funzione f non rappresenta *una singola* funzione, bensì un *insieme* di funzioni; tale insieme, se non è vuoto (ciò accade quando la funzione integranda non ammette primitive) è un insieme infinito. L'integrale indefinito può quindi essere scritto:

$$\int f(x)dx = \{\Phi(x) : \Phi'(x) = f(x)\}$$

Esempio 4.7. Dagli esempi precedenti: $\int \cos x dx = \text{sen}x + c$ con $c\in\mathbf{R}$.

La costante $c\in\mathbf{R}$ viene denominata *costante d'integrazione*. Nel seguito quando indicheremo "$+c$" sottintenderemo che c è un numero reale qualsiasi.

Esempio 4.8. $\int \frac{1}{x} dx = \log_e|x| + c$ Risulta: $D(\log_e|x| + c) = \frac{1}{x}$ (lasciamo al lettore il compito di verificare l'uguaglianza, discutendo il valore assoluto con $x>0$ e con $x<0$). Sarebbe errato scrivere $\int \frac{1}{x} dx = \log_e x + c$ (*senza* il valore assoluto). Infatti il dominio della funzione integranda è costituito dai reali non nulli e anche il dominio delle primitive deve essere costituito dai reali non nulli.

Nell'esempio seguente ci riferiremo a una *famiglia* di funzioni espressa da: $f(x) = \int g(x)dx$ e individueremo *una* di tali funzioni mediante una condizione.

Esempio 4.9. Individuiamo $y = f(x)$ sapendo che: $f(x) = \int 2x dx \wedge f(1) = 0$
Sappiamo che $f(x) = x^2+c$ e in questo caso *siamo in grado* di determinare la costante c; infatti, sostituendo nella formula precedente la condizione: $f(1) = 0$ otteniamo: $0 = 1+c \Rightarrow c = -1$. L'equazione richiesta è quindi $y = x^2-1$

Determiniamo gli integrali indefiniti delle funzioni di uso più comune. I casi più semplici sono quelli in cui *la funzione integranda appare come derivata* *prima di un'altra funzione*. Una prima tavola di formule di integrazione indefinita, quindi, può essere ottenuta sulla base di una tavola di derivazione:

$$\int senx dx = -\cos x + c \qquad \int \cos x dx = \mathrm{sen} x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int \frac{1}{x} dx = \log_e|x| + c \qquad \ldots$$

È immediato dimostrare:

Proposizione 4.11. Se $n \neq -1$, risulta:

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \qquad \text{con } c \in \mathbf{R}.$$

Esempio 4.10. $\int 1 \cdot dx = \int x^0 \cdot dx = x + c$ Inoltre: $\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + c$. La formula vale anche per n non intero: $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + c$

Le formule *di integrazione immediata* possono essere generalizzate grazie ad alcune riflessioni collegate alla nota regola di derivazione delle funzioni composte. Invitiamo il lettore a esaminare con molta attenzione i seguenti esempi.

Esempio 4.11. Si voglia ricavare l'integrale indefinito della funzione $x \to \cos 2x$. Ricordando che $\int \cos x dx = \mathrm{sen} x + c$ potremmo supporre (erroneamente) che l'integrale richiesto sia $\mathrm{sen}2x + c$. Non è però difficile rendersi conto che ciò è inaccettabile: se infatti deriviamo la funzione trovata, otteniamo:

$$\mathrm{D}(\mathrm{sen}2x + c) = 2 \cdot \cos 2x$$

che *non* coincide con la funzione integranda ($\cos 2x$).

Correggiamo l'errore; abbiamo notato che: $\mathrm{D}(\mathrm{sen}2x + c) = 2 \cdot \cos 2x$ e quindi:

$$\int 2\cos 2x dx = \mathrm{sen}2x + c$$

Ma nell'esempio precedente era richiesto $\int \cos 2x dx$. Risulta allora:

$$\int 2\cos 2x dx = \mathrm{sen}2x + c \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int 2\cos 2x dx = \frac{1}{2}\mathrm{sen}2x + c$$

da cui infine: $\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}\mathrm{sen}2x + c$

Esaminiamo attentamente la $\int 2\cos 2x dx = \mathrm{sen}2x + c$. Essa è collegata alla ben nota $\int \cos x dx = \mathrm{sen} x + c$. La differenza consiste in questo: la funzione integranda non è costituita da cos$x$, ma dalla funzione composta cos2x, *moltiplicata per la derivata* (2) *dell'argomento* (2x) *del coseno*. In generale:

$$\int \cos f(x) f'(x) dx = \mathrm{sen} f(x) + c$$

Una nuova tavola di formule di integrazione indefinita, quindi, può essere ottenuta generalizzando le formule presentate poco fa. Ricaviamo allora:

$$\int \mathrm{sen} f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + c \qquad \int \cos f(x) f'(x) dx = \mathrm{sen} f(x) + c$$

$$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log_e |f(x)| + c \qquad \ldots$$

La formula dimostrata nella proposizione 4.11 si generalizza nella:

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]^{n+1} + c \quad (n \neq -1)$$

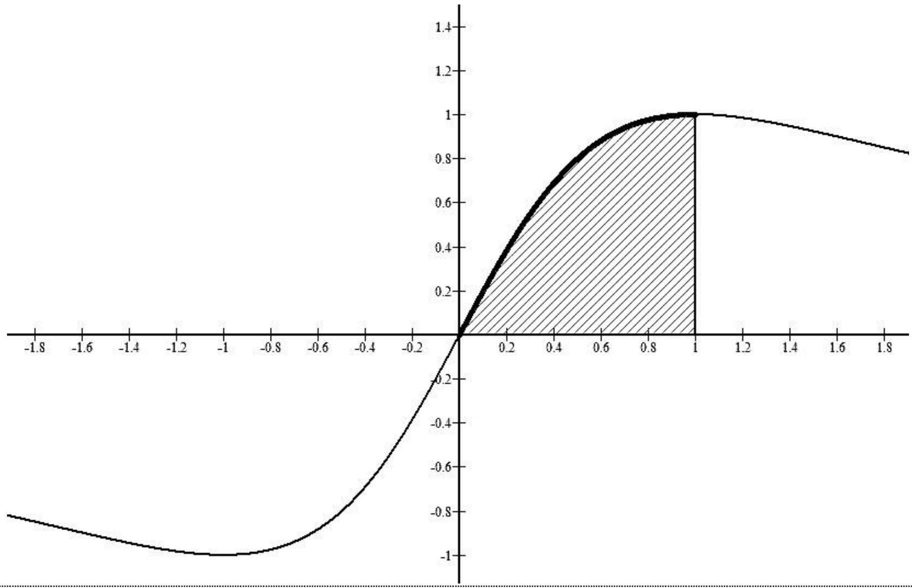
Esempio 4.12. È $\int e^x e^{e^x} dx = e^{e^x} + c$ in base alla $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$

Esempio 4.13. Risulta: $\int \mathrm{sen}^3 x dx = \int \mathrm{sen} x \,\mathrm{sen}^2 x dx = \int \mathrm{sen} x (1 - \cos^2 x) dx =$

$$= \int (\mathrm{sen} x - \mathrm{sen} x \cos^2 x) dx = -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + c$$

Esempio 4.14. Calcoliamo l'area della parte di piano cartesiano individuata da:

$$\begin{cases} 0 \le y \le \dfrac{2x}{x^2+1} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$



In base alla $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ = $\log_e|f(x)|+c$ risulta:

È $\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \log_e\left|x^2+1\right| + c = \log_e\left(x^2+1\right) + c$ e dunque concludiamo:

$$\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\log_e\left(x^2+1\right)\right]_0^1 = \log_e 2$$

La proprietà di linearità dell'integrale *definito*, espressa da:

$$\int_a^b [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)dx$$

è valida anche per l'integrale *indefinito*. Sappiamo infatti che l'integrale indefinito $\int f(x)dx$ è costituito dall'insieme delle espressioni delle primitive della $x \to f(x)$; e nel teorema fondamentale del calcolo abbiamo stabilito che la funzione integrale $x \to \int_a^x f(t)dt$ e tutte le funzioni $x \to \int_a^x f(t)dt + c$ sono primitive della $x \to f(x)$. Possiamo scrivere, anche per gli integrali indefiniti:

$$\int [\alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)]dx = \alpha \cdot \int f(x)dx + \beta \cdot \int g(x)dx$$

Il lettore ricorderà che un'analoga proprietà vale per la derivazione; ma l'analogia non può essere estesa indiscriminatamente. Ad esempio, *non disponiamo di una formula generale per integrare prodotti e rapporti di funzioni*. Pertanto una "strategia risolutiva" per l'integrazione consiste nel trasformare gli integrali di prodotti e di quozienti di funzioni in integrali di somme.

Esempio 4.15. $\int (1+senx)(1+\cos x)dx = \int (1 + senx + \cos x + senx\cos x)dx =$

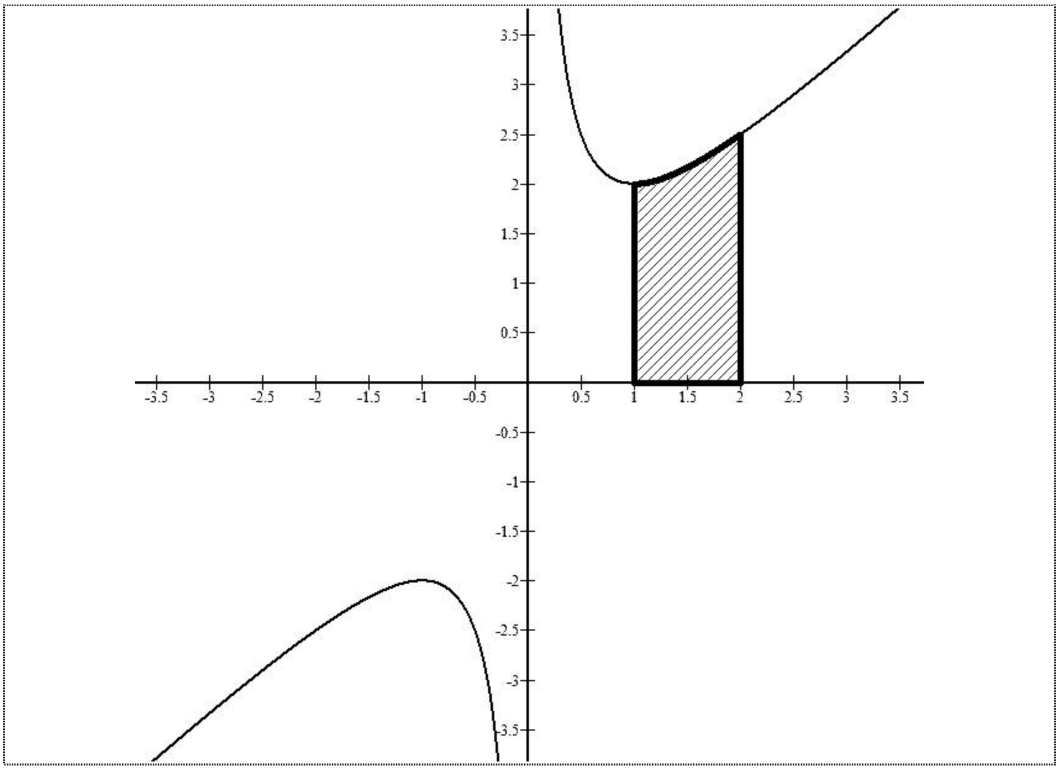
$= x - \cos x + senx + \frac{1}{4}\int 2sen2xdx = x - \cos x + senx - \frac{1}{4}\cos 2x + c$

Esempio 4.16. Calcoliamo l'area della parte di piano cartesiano individuata da:

$$\begin{cases} 0 \le y \le \dfrac{x^2+1}{x} \\ 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

È $\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int \left(x + \frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 + \log_e|x| + c$ e dunque concludiamo:

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x}dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + \log_e|x|\right]_1^2 = 2 + \log_e 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \log_e 2$$



Riportiamo una tabella riassuntiva di integrali indefiniti:

Proposizione 4.12. Integrali indefiniti di funzioni di uso comune

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad (n \neq -1) \qquad \int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e|x| + c \qquad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log_e|f(x)| + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c \qquad \int e^{f(x)} f'(x)dx = e^{f(x)} + c$$

$$\int a^x dx = \frac{1}{\log_e a} a^x + c \qquad \int a^{f(x)} f'(x)dx = \frac{1}{\log_e a} a^{f(x)} + c$$

$$\int sen x dx = -\cos x + c \qquad \int sen f(x) f'(x)dx = -\cos f(x) + c$$

$$\int \cos x dx = sen x + c \qquad \int \cos f(x) f'(x)dx = sen f(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tg x + c \qquad \int \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)} dx = tg f(x) + c$$

$$\int \frac{1}{sen^2 x} dx = -cotg x + c \qquad \int \frac{f'(x)}{sen^2 f(x)} dx = -cotg f(x) + c$$

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsen}x+c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}dx = \text{arcsen}f(x)+c$
$\int \frac{1}{x^2+1}dx = \text{arctg}x+c$	$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+1}dx = \text{arctg}f(x)+c$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx = \text{arcsen}\frac{x}{\lvert a\rvert}+c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{a^2-[f(x)]^2}}dx = \text{arcsen}\frac{f(x)}{\lvert a\rvert}+c$
$\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{\lvert a\rvert}+c$	$\int \frac{f'(x)}{[f(x)]^2+a^2}dx = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{f(x)}{\lvert a\rvert}+c$
$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\log_e\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+c$	$\int \frac{f'(x)}{a^2-[f(x)]^2}dx = \frac{1}{2a}\log_e\left\lvert\frac{a+f(x)}{a-f(x)}\right\rvert+c$

Come complemento a quanto ora trattato ci occuperemo del calcolo del volume della parte di spazio descritta ruotando una parte di piano cartesiano individuata da $\begin{cases} 0 \le y \le f(x) \\ a \le x \le b \end{cases}$ di un giro completo intorno all'asse delle ascisse.

Dall'espressione del volume dV del singolo cilindro ottenuto ruotando il rettangolo avente per base dx e per altezza $f(x)$ otteniamo:

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx$$

Integriamo ora in [a; b]: consideriamo l'intero intervallo [a; b] suddiviso in "intervallini" (dx), facciamo tendere a 0 l'ampiezza del massimo "intervallino" (e quindi a $+\infty$ il loro numero) e sommiamo tutti i dV relativi a ogni rettangolo; otteniamo:

$$V = \pi\cdot\int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Esempio 4.17. Il volume del paraboloide generato ruotando la parte di piano individuata da $\begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{x} \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$ di un giro intorno all'asse delle ascisse è:

$$V = \pi\cdot\int_0^4 \left[\sqrt{x}\right]^2 dx = \pi\cdot\int_0^4 x dx = \pi\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4 = 8\pi$$

Esempio 4.18. Il volume dell'ellissoide generato ruotando la parte di piano individuata da $\begin{cases} 0 \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \\ -a \le x \le a \end{cases}$ di un giro intorno all'asse delle ascisse è:

$$V = \pi\cdot \int_{-a}^{a} \left[\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \right]^2 dx = \pi\cdot \frac{b^2}{a^2}\cdot \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) dx =$$

$$= \pi\cdot \frac{b^2}{a^2}\cdot \left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3 \right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

Concludiamo con un cenno alle equazioni differenziali. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione avente per incognita una funzione $x \rightarrow y(x)$; in tale equazione compaiono x, y e le derivate di y: y', y'', … Cioè:

$$F(x; y; y'; y''; ...) = 0$$

Il massimo ordine delle derivate si dice l'*ordine dell'equazione differenziale*.

Esempio 4.19. Determiniamo la funzione $x \rightarrow y(x)$ sapendo che $2xdx+dy = e^x dx$ e che: $y(0) = 3$ (condizione iniziale). Riscriviamo l'equazione nella forma:

$$dy = (e^x - 2x)dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^x - 2x \quad \Rightarrow \quad y' = e^x - 2x$$

L'equazione è dunque del primo ordine. Pertanto, la funzione $x \rightarrow y(x)$ cercata è una primitiva di $x \rightarrow e^x - 2x$. Sapendo che $\int \left(e^x - 2x\right)dx = e^x - x^2 + c$ si può affermare che $x \rightarrow y(x)$ è una funzione del tipo:

$$x \rightarrow e^x - x^2 + c$$

Possiamo infine determinare il valore di c ricordando la condizione iniziale:

$$y(0) = 3 \quad \Rightarrow \quad e^0 - 0^2 + c = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + c = 3 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

Pertanto, la funzione $x \rightarrow y(x)$ incognita è: $x \rightarrow e^x - x^2 + 2$