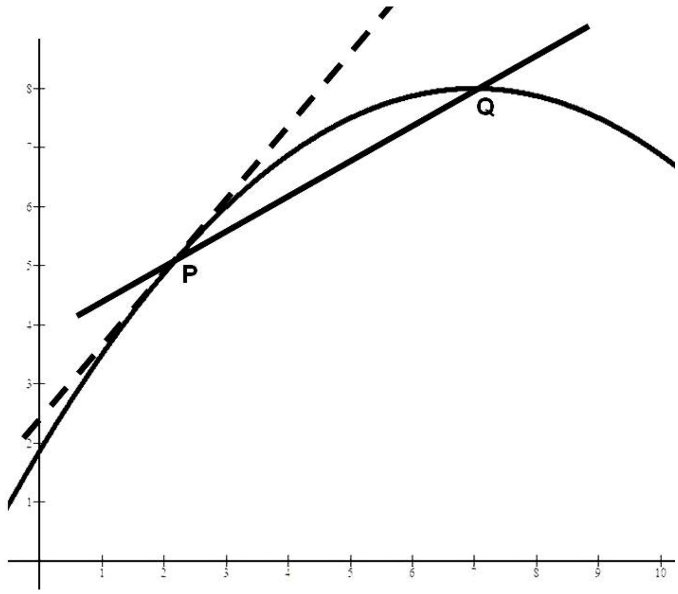
Capitolo 3

Derivazione

3.1. DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Sia data, nel piano cartesiano, una curva di equazione $y = f(x)$; di tale curva, sia fissato un punto P, individuato dall'ascissa $x = x_P$. Vogliamo calcolare il coefficiente angolare della retta tangente alla curva assegnata nel punto dato con un procedimento nuovo e generale.

Per trovare il coefficiente angolare di una retta nel piano cartesiano è necessario conoscere le coordinate di due punti distinti di tale retta. Nel caso ora in esame, invece, conosciamo le coordinate cartesiane del solo punto P della retta tangente: P $[x_P; f(x_P)]$ (dove l'ordinata del punto P è stata ricavata sostituendo la sua ascissa nell'equazione della curva data, essendo P un punto di tale curva).



Procediamo nel modo seguente: consideriamo un altro punto Q appartenente alla curva e distinto da P, individuato dall'ascissa: $x_Q = x_P+h \;\wedge\; h \neq 0$ essendo x_P+h appartenente al dominio della funzione f (dove il reale non nullo h viene detto *incremento*). Le coordinate di Q sono quindi: Q $[x_P+h; f(x_P+h)]$.

Possiamo ora calcolare direttamente il coefficiente angolare della retta PQ:

$$m_{PQ} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{x_P + h - x_P} = \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{h}$$

Tale quantità è detta *rapporto incrementale* relativo alla funzione f di equazione $y = f(x)$ nel punto di ascissa $x = x_P$; sottolineiamo che il rapporto incrementale è, a sua volta, una funzione della variabile reale h (l'incremento), secondo la definizione seguente.

Definizione 3.1. Data una funzione $x \to f(x)$ e fissato un punto di ascissa $x = x_P$ appartenente al dominio della funzione f, si dice *funzione rapporto incrementale* $\frac{\Delta f(x_P)}{\Delta x_P}$ relativa alla funzione f nel punto di ascissa $x = x_P$ la funzione della variabile h definita da: $\frac{\Delta f(x_P)}{\Delta x_P}(h) = \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{h}$ essendo x_P+h appartenente al dominio della funzione f.

Con la funzione rapporto incrementale abbiamo dunque determinato il coefficiente angolare della retta *secante* passante per i punti P e Q della curva. Per ottenere il cercato coefficiente angolare della retta tangente alla curva di equazione $y = f(x)$, osserviamo che se consideriamo incrementi h sempre più piccoli (cioè se Q viene scelto sempre più "vicino" a P), conseguentemente la retta secante PQ si "avvicina" sempre più alla retta tangente alla curva data in P. Possiamo dunque dire che, passando al limite:

$$m_{\text{tangente in P}} = \lim_{h \to 0} m_{PQ}$$

Ricordando l'espressione di m_{PQ}:

$$m_{\text{tangente in P}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{h}$$

Il limite precedente (se esiste ed è finito) viene detto *derivata prima della funzione f di equazione $y = f(x)$* calcolata nel punto di ascissa $x = x_P$, come formalizzato nella definizione seguente.

Definizione 3.2. Data una funzione $x \to f(x)$ definita in un intorno $I \subseteq \mathbf{R}$ del punto x_P, si dice *derivata prima* della funzione f nel punto di ascissa $x = x_P$ il limite, se esiste ed è finito: $f'(x_P) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_P + h) - f(x_P)}{h}$

Esempio 3.1. Determiniamo l'equazione della retta tangente alla curva di equazione $y = e^x$ nel suo punto di ascissa $x = 0$. La retta tangente passerà per il punto di tangenza (0; 1) e sarà quindi del tipo: $y = mx+1$

Determiniamo il coefficiente angolare m della retta tangente:

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

La retta tangente alla curva di equazione $y = e^x$ nel punto di ascissa $x = 0$ ha equazione: $y = x+1$

Non è necessario impostare tale procedimento sulla base di un punto fissato: è possibile ricavare il coefficiente angolare della retta tangente a una curva di equazione $y = f(x)$ nel punto del suo dominio di ascissa x (*qualsiasi*). Così facendo otterremo una *espressione* (e *non più un singolo valore numerico*) dipendente da x, una funzione di x: la *funzione derivata prima*.

Definizione 3.3. Data una funzione $x\to f(x)$, definita nell'intervallo $I\subseteq\mathbf{R}$, si dice *funzione derivata prima* di f la funzione $x\to f'(x)$ espressa da:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

nei punti di ascissa $x\in I$ per i quali tale limite esiste ed è finito.

La derivata prima f' della f si indica anche con i simboli: $Df(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\dot{y}$, y'

Esempio 3.2. Verifichiamo che la derivata prima di una funzione costante $x\to k$ (con $k\in\mathbf{R}$) è la funzione nulla: $Dk = 0$. Ricaviamo infatti la funzione derivata prima della funzione costante $x\to k$; il rapporto incrementale è nullo e risulta:

$$\lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Esempio 3.3. Determiniamo la funzione derivata prima della funzione: $x\to a^x$

$$Da^x = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a^x(a^h - 1)}{h} = a^x\cdot\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x\cdot\log_e a$$

Pertanto: $Da^x = a^x\cdot\log_e a$ e, in particolare, se $a = e$, risulta: $De^x = e^x$

Abbiamo dunque provato che l'espressione della derivata prima della funzione $x\to e^x$ coincide con quella della funzione.

Esempio 3.4. Determiniamo la funzione derivata prima della funzione: $x\to x^3$

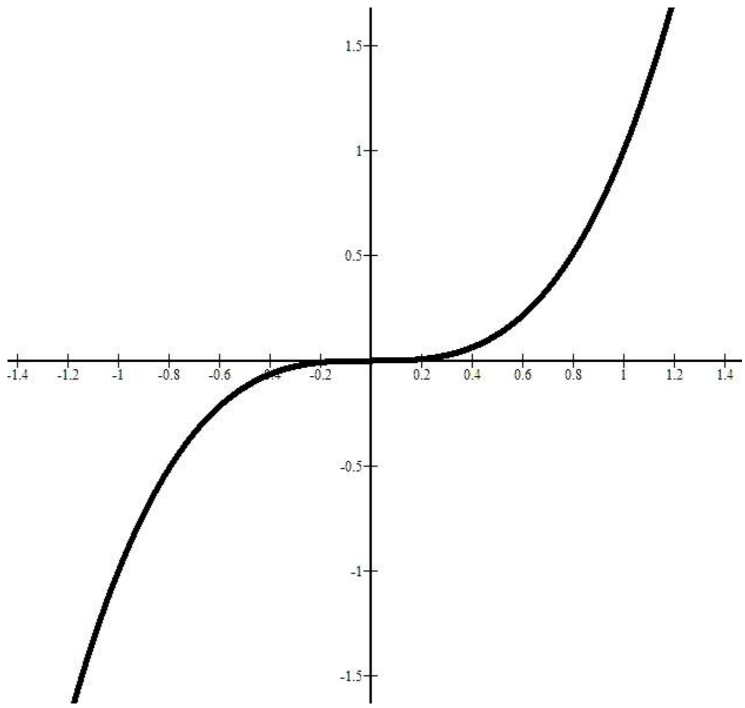
$$Dx^3 = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} (3x^2+3hx+h^2) = 3x^2$$

Pertanto concludiamo che: $Dx^3 = 3x^2$

La conoscenza della funzione derivata prima di una data funzione f costituisce un importante contributo alla conoscenza dell'andamento del grafico dell'equazione $y = f(x)$: l'applicazione del concetto di derivata prima, come vedremo, si rivelerà essenziale nello studio del grafico di una funzione.

Nell'esempio seguente sono sintetizzate alcune delle informazioni sul grafico di $y = f(x)$ che possono essere ricavate dall'espressione della derivata prima della funzione f.

Esempio 3.5. Nell'esempio 3.4 abbiamo ricavato: $Dx^3 = 3x^2$. Ciò significa, con riferimento al grafico, che:



in corrispondenza all'ascissa	il grafico di f: $y = x^3$ ammette retta tangente con coefficiente angolare
...	...
$x = -2$	$m = f'(-2) = 12$
$x = -1$	$m = f'(-1) = 3$
$x = 0$	$m = f'(0) = 0$
$x = 1$	$m = f'(1) = 3$
$x = 2$	$m = f'(2) = 12$
$x = 3$	$m = f'(3) = 27$
$x = 5$	$m = f'(5) = 75$
...	...

Nel punto di ascissa $x = 0$ il grafico di $y = x^3$ ha tangente con coefficiente angolare nullo (ha "tangente orizzontale"); negli altri punti il coefficiente angolare è positivo, e appare maggiore nei punti più "distanti" dall'origine.

Definizione 3.4. La funzione $x \to f(x)$ si dice *derivabile nel punto c* del proprio dominio se per $x = c$ il limite: $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ esiste ed è finito.

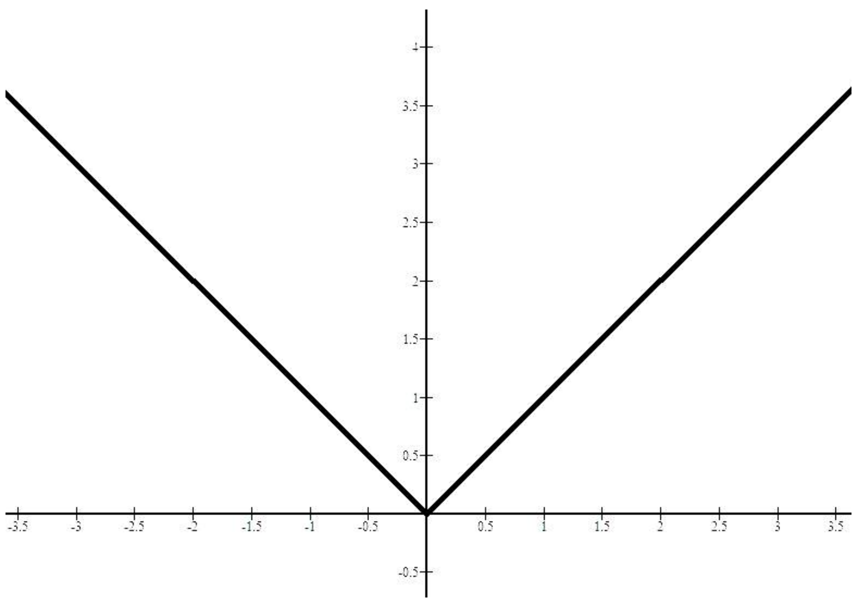
Si dice che $x \to f(x)$ è *derivabile in* $I \subseteq \mathbf{R}$ se è derivabile in tutti i punti di I.

Abbiamo fnora parlato di derivata prima di una funzione f in $x = c$ facendo riferimento a un punto di ascissa $x = c$, a proposito del quale abbiamo detto solamente: c appartiene al dominio di f. Ma la derivabilità di una funzione in un punto è anche collegata alla sua *continuità* in quel punto. Si dimostra:

Proposizione 3.1. Se la funzione $x \to f(x)$ è derivabile in $x = c$, allora f è continua in $x = c$.

Dunque la continuità è condizione necessaria per la derivabilità (con riferimento alla continuità e alla derivabilità di una funzione f nello stesso punto, di fissata ascissa $x = c$, del dominio di f). Tale condizione non è sufficiente: mentre non può accadere che una funzione sia derivabile in $x = c$ senza essere ivi continua, *può invece accadere che una funzione sia continua in $x = c$ senza essere ivi derivabile*.

Esempio 3.6. Consideriamo la funzione $f: x \to y$ espressa da: $y = |x|$



Il dominio di f è **R** e tale funzione è continua in tutto **R** (lasciamo la dimostrazione al lettore). Per il punto di ascissa nulla (l'origine degli assi) la funzione non è derivabile. Il limite che definisce la derivata in $x = 0$ non esiste: il limite destro è 1 e il sinistro –1 (lo si verifica facilmente).

Punti di questo tipo sono detti *punti angolosi*: diamo la loro definizione.

Definizione 3.5. Sia data una funzione $x \to f(x)$ definita in un intorno $\mathrm{I} \subseteq \mathbf{R}$ del punto $x = x_P$ e continua in $x = x_P$; il punto di coordinate $[x_P; f(x_P)]$ si dice *punto angoloso* del grafico di $y = f(x)$ se i due limiti:

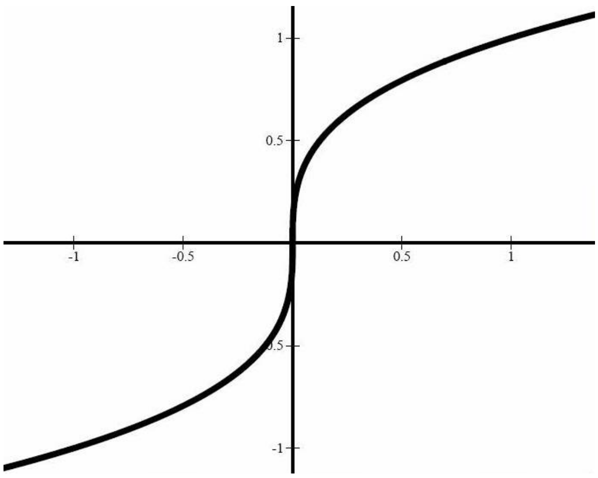
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{e:} \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

esistono entrambi finiti, ma non coincidono.

I limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono talvolta indicati con le rispettive denominazioni di *derivata prima destra* e *derivata prima sinistra* della funzione f nel punto $x = x_P$.

I punti angolosi, introdotti dalla definizione precedente, non sono gli unici punti in corrispondenza dei quali una funzione è continua ma non derivabile.

Esempio 3.7. Consideriamo la funzione f: $x \to y$ espressa da: $y = \sqrt[3]{x}$ il cui grafico cartesiano è riportato nella figura seguente.



Il suo dominio è **R** e tale funzione è continua in tutto **R**. Per quanto riguarda la derivabilità, verifichiamo che la funzione esaminata non è derivabile nel punto di ascissa $x = 0$: infatti il limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt[3]{x+h} - \sqrt[3]{x}}{h}$$

calcolato in $x = 0$ fornisce: $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$

Essendo infinito il limite del rapporto incrementale calcolato a partire dal punto $x = 0$, la derivata in tale punto non esiste.

Sintetizziamo nelle tabelle seguenti i risultati pratici più utili sulla derivazione:

Proposizione 3.2. Regole di derivazione

$\mathrm{D}[k\cdot f(x)] = k\cdot \mathrm{D}f(x)$	derivata prodotto per k costante
$\mathrm{D}[f(x)+g(x)] = \mathrm{D}f(x)+\mathrm{D}g(x)$	derivata della somma
$\mathrm{D}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot \mathrm{D}g(x)+g(x)\cdot \mathrm{D}f(x)$	derivata del prodotto
$\mathrm{D}\dfrac{1}{f(x)} = -\dfrac{\mathrm{D}f(x)}{[f(x)]^2}$	derivata del reciproco
$\mathrm{D}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)\cdot \mathrm{D}f(x) - f(x)\cdot \mathrm{D}g(x)}{[g(x)]^2}$	derivata del quoziente
$\mathrm{D}f[g(x)] = \mathrm{D}f(t)\cdot \mathrm{D}g(x)$, con: $t = \mathrm{g}(x)$	derivata funzione composta
$\mathrm{D}f^{-1}(y) = \dfrac{1}{\mathrm{D}f(x)}$ con: $y = f(x)$	derivata funzione inversa
$\mathrm{D}f(x) = f(x)\cdot \mathrm{D}[\log_e f(x)]$	derivazione logaritmica
$\mathrm{D}[f(x)]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\cdot \mathrm{D}[g(x)\cdot \log_e f(x)]$	derivata f. in forma esponenziale

Proposizione 3.3. Derivate di alcune funzioni di uso comune

$\mathrm{D}k = 0$	con k costante
$\mathrm{D}x^n = n\cdot x^{n-1}$	n intero positivo, $x\in\mathbf{R}$
$\mathrm{D}x^a = a\cdot x^{a-1}$	a reale, $x\in\mathbf{R}^+$
$\mathrm{D}a^x = a^x\cdot \log_e a$	in particolare: $\mathrm{D}e^x = e^x$
$\mathrm{D}\log_b\lvert x\rvert = \dfrac{1}{x}\cdot \log_b e$	$b>0$, $b\neq 1$; in particolare: $\mathrm{D}\log_e\lvert x\rvert = \dfrac{1}{x}$
$\mathrm{Dsen}x = \cos x$	$\mathrm{D}\cos x = -\mathrm{sen}x$
$\mathrm{Dtg}x = 1+\mathrm{tg}^2 x$	oppure: $\mathrm{Dtg}x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$\mathrm{Dcotg}x = -1-\mathrm{cotg}^2 x$	oppure: $\mathrm{Dcotg}x = -\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$

$$\mathrm{Darcsen}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathrm{Darccos}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\mathrm{Darctg}x = \frac{1}{x^2+1} \qquad \mathrm{Darccotg}x = -\frac{1}{x^2+1}$$

Esempio 3.8. Determiniamo la funzione derivata prima della funzione $x \to y$ espressa da: $y = 5x^3-8x^2+3x-11$. In base alle regole e ricordando che la derivata prima di una funzione costante è la funzione nulla, risulta:

$$\mathrm{D}(5x^3-8x^2+3x-11) = 5\mathrm{D}x^3-8\mathrm{D}x^2+3\mathrm{D}x = 15x^2-16x+3$$

Esempio 3.9. Determiniamo la funzione derivata prima della funzione $x \to y$ espressa da: $y = \cos(3x-1)$. La funzione data, $f \bullet g$, è composta dalle funzioni:

$$f: t \to \cos t \qquad g: x \to 3x-1$$

Si ha $\mathrm{D}\cos(3x\text{-}1) = \mathrm{D}\cos t \cdot \mathrm{D}(3x-1) = -\mathrm{sen}t \cdot 3$ e ponendo $t = 3x-1$ otteniamo:

$$\mathrm{D}\cos(3x-1) = -3\mathrm{sen}(3x-1)$$

Esempio 3.10. Determiniamo, con il procedimento della derivazione logaritmica, la derivata prima della funzione: $x \to x^x$ definita per x reale positivo:

$$\mathrm{D}x^x = x^x \cdot \mathrm{D}\log_e x^x = x^x \cdot \mathrm{D}(x \cdot \log_e x) = x^x \cdot (1+\log_e x)$$

La derivazione è un *procedimento analitico*, con il quale si ottiene, mediante il limite del rapporto incrementale, una nuova funzione, detta derivata prima. Pertanto data una funzione derivabile f e ricavata la sua derivata prima f', è possibile *iterare* il procedimento di derivazione e determinare la derivata della funzione derivata prima, naturalmente se la funzione f' è, a sua volta, derivabile. La funzione così ottenuta, cioè la "derivata della derivata", non sarà più ricollegabile ai coefficienti angolari delle rette tangenti al grafico di $y = f(x)$: una sua interpretazione geometrica sarà precisata tra poco.

Definizione 3.6. Data una funzione $x \to f(x)$ derivabile nell'intervallo $\mathrm{I} \subseteq \mathbf{R}$, e indicata con $x \to f'(x)$ la sua derivata prima, si dice *funzione derivata seconda* di f la funzione $x \to f''(x)$ espressa da:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

nei punti di ascissa $x \in \mathrm{I}$ per i quali tale limite esiste ed è finito.

La funzione derivata seconda f'' della funzione f si indica anche con uno dei simboli: $\mathrm{D}^2 f(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$. $\ddot{y}$, y''.

Esempio 3.11. Determiniamo le derivate prima e seconda di: $x \to \mathrm{sen}(5x+1)$, definita e continua in tutto **R**. Risulta:

$$\mathrm{D}\,\mathrm{sen}(5x+1) = 5\cos(5x+1)$$
$$\mathrm{D}^2\mathrm{sen}(5x+1) = -25\,\mathrm{sen}(5x+1)$$

Le derivate prima e seconda della funzione data esistono per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Definizione 3.7. Data una funzione $x \to f(x)$ $n-1$ volte derivabile nell'intervallo $\mathrm{I} \subseteq \mathbf{R}$, e indicata con $x \to f^{(n-1)}(x)$ la sua derivata $(n-1)$-esima, si dice funzione derivata n-esima di f la funzione $x \to f^{(n)}(x)$ espressa da:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

nei punti di ascissa $x \in \mathrm{I}$ per i quali tale limite esiste ed è finito.

Esempio 3.12. Determiniamo le derivate della funzione: $x \to x^3-4x^2+x+5$ definita e continua in tutto **R**. Risulta:

$$\mathrm{D}(x^3-4x^2+x+5) = 3x^2-8x+1$$
$$\mathrm{D}^2(x^3-4x^2+x+5) = 6x-8$$
$$\mathrm{D}^3(x^3-4x^2+x+5) = 6$$
$$\mathrm{D}^4(x^3-4x^2+x+5) = 0$$

La funzione $x \to x^3-4x^2+x+5$ è quindi *continua e indefinitamente derivabile* in tutto **R**: infatti, abbiamo sopra determinato le derivate della funzione data fino alla derivata *quarta*, ma è possibile procedere ancora nella derivazione. Tutte le derivate successive, dopo la quarta, saranno funzioni identicamente nulle:

$$\mathrm{D}^n(x^3-4x^2+x+5) = 0 \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N} \wedge n \geq 4$$

3.2. CALCOLO DIFFERENZIALE

La parte dell'analisi che studia le proprietà delle funzioni sulla base delle loro derivate si dice *calcolo differenziale*. Tale importante settore della matematica si basa su alcuni teoremi classici che ci limitiamo a enunciare.

Proposizione 3.4. Teorema di Rolle. Sia $x \to f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b] \subset \mathbf{R}$, derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$ e tale da assumere valori uguali agli estremi dell'intervallo considerato $f(a) = f(b)$. Allora esiste (almeno) un punto c, interno all'intervallo di definizione $[a; b]$ tale che: $f'(c) = 0$.

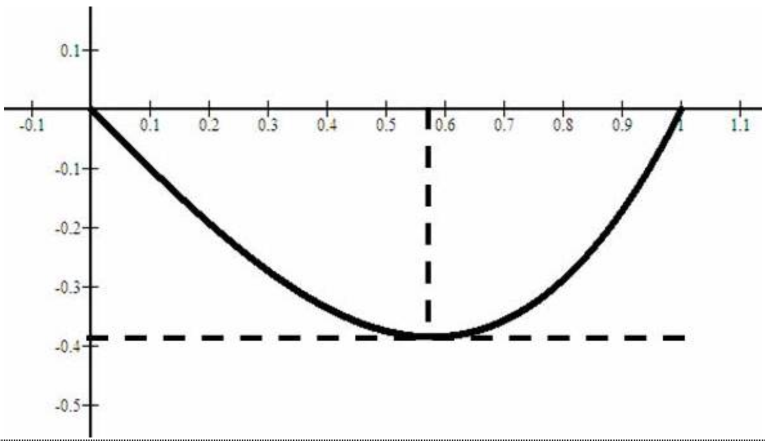
Geometricamente il teorema di Rolle afferma che il grafico di una funzione continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ e tale che $f(a) = f(b)$ ha retta tangente orizzontale in almeno un punto di $]a; b[$.

Esempio 3.13. Mostriamo che $f: x \to x^3 - x$ in $0 \le x \le 1$ verifica il teorema di Rolle.

Notiamo che la funzione data è continua in $0 \le x \le 1$, è derivabile in $0 < x < 1$; essendo inoltre $f(0) = f(1) = 0$, risulta verificata l'ipotesi del teorema di Rolle. La tesi prevede che esista almeno un punto c di $]0; 1[$ tale che $f'(c) = 0$. Essendo: $f'(x) = 3x^2 - 1$, risulta:

$$3c^2 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \vee \quad c = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Essendo il punto $c = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ appartenente a $]0; 1[$, il teorema di Rolle è verificato.



Esempio 3.14. Dimostriamo, con tre opportuni controesempi, che se una delle tre condizioni previste dall'enunciato del teorema di Rolle non è verificata allora il teorema stesso non è valido (Maturità scientifica, sessione ordinaria 1984).

Ricordiamo le tre ipotesi del teorema di Rolle:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array} \quad \begin{cases} f \ \textit{continua in} \ [a; b] \\ f \ \textit{derivabile in} \ ]a; b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$$

Primo controesempio. Valgono (1), (2). Non vale (3).

$$\begin{cases} y = x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

Essa è continua in [0; 1], è derivabile in]0; 1[, ma non rispetta l'ipotesi (3), essendo: $f(0) = 0 \neq 1 = f(1)$. Per tale funzione non è verificata la tesi del teorema di Rolle; infatti, la sua derivata prima è $x \to 1$ per ogni x di]0; 1[.

Secondo controesempio. Valgono (1), (3). Non vale (2).

$$\begin{cases} y = |x| \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Essa è continua in [−1; 1], assume valore $f(-1) = f(1) = 1$ negli estremi dell'intervallo [−1; 1], ma non rispetta l'ipotesi (2), non essendo derivabile in $x = 0$ (punto angoloso): essa non può dirsi derivabile in]−1; 1[. Per tale funzione non risulta verificata la tesi del teorema di Rolle; infatti, la sua derivata prima è data dalla funzione $x \to \dfrac{x}{|x|}$ per ogni x di]−1; 1[e tale funzione non si annulla per alcun punto di]−1; 1[.

Terzo controesempio. Valgono (2), (3). Non vale (1).

Si tratta di definire una funzione *derivabile, ma non continua*. A una prima lettura la richiesta può apparire assurda, in quanto la derivabilità presuppone la continuità. Ma la continuità è richiesta nell'intervallo *chiuso* [a; b], mentre la derivabilità è richiesta nell'intervallo *aperto*]a; b[. Questa osservazione ci suggerisce una soluzione del problema: potremmo definire una funzione in [a; b] in modo che non sia continua in (almeno) uno degli estremi a, b, che sia derivabile (quindi anche continua) nell'intervallo aperto]a; b[(e tale da assumere uguali valori negli estremi dell'intervallo). Ad esempio:

$$\begin{cases} y = x \\ 0 \leq x < 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Essa è derivabile in]0; 1[, assume valore $f(0) = f(1) = 0$ negli estremi dell'intervallo [0; 1], ma non rispetta l'ipotesi (1).

Per tale funzione non risulta verificata la tesi del teorema di Rolle; infatti, la sua derivata prima è data dalla funzione $x \to 1$ per ogni x di]0; 1[.

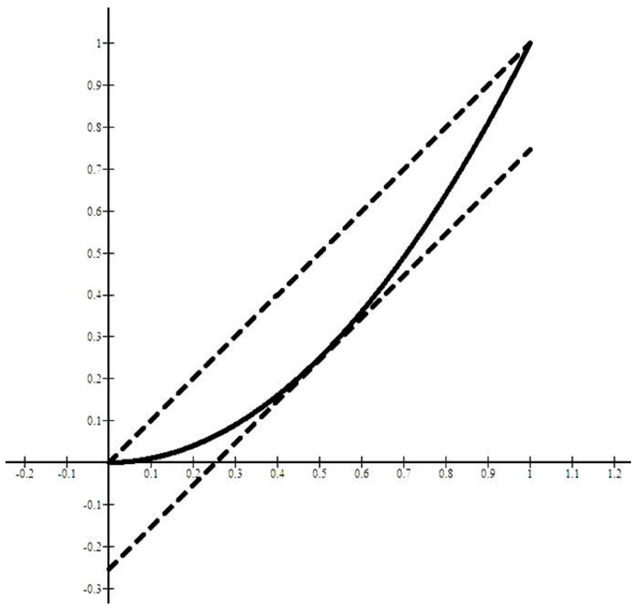
Il teorema di Rolle esprime una condizione *sufficiente* affinché la derivata prima della funzione data si annulli in un punto (per l'esistenza di un "punto a tangente orizzontale"); tale condizione *non è necessaria*: può accadere che la derivata prima di una funzione f sia nulla in uno o più punti anche se la f non rispetta, in alcun intervallo [a; b]$\subset\mathbf{R}$, le ipotesi del teorema di Rolle.

Esempio 3.15. La funzione f: $x \to x^3$ *non* rispetta le ipotesi del teorema di Rolle in alcun intervallo [a; b]$\subset\mathbf{R}$: tale funzione è infatti iniettiva, e non potrà quindi mai accadere che sia $f(a) = f(b)$ con $a \neq b$. Eppure, la sua derivata prima è f': $x \to 3x^2$ e quindi risulta: $f'(0) = 0$.

Proposizione 3.5. Teorema di Lagrange. Sia $x \to f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b] \subset \mathbf{R}$ e derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$. Allora esiste (almeno) un punto c, interno all'intervallo di definizione $[a; b]$ tale che: $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Per quanto riguarda l'interpretazione geometrica, il teorema di Lagrange afferma che il grafico di una funzione continua in $[a; b]$ e derivabile in $]a; b[$ ha, in almeno un punto di $]a; b[$, retta tangente parallela alla retta che congiunge gli estremi dell'arco di curva considerato (si veda l'esempio seguente). Infatti, l'uguaglianza $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ sancisce che il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di $y = f(x)$ in $x = c$ è uguale al coefficiente angolare della retta passante per i punti di coordinate $[a; f(a)]$ e $[b; f(b)]$, estremi dell'arco di curva considerato; e l'uguaglianza dei coefficienti angolari comporta il parallelismo delle due rette.

Esempio 3.16. Mostriamo che la funzione $x \to x^2$ considerata per $0 \leq x \leq 1$ verifica il teorema di Lagrange.



Notiamo che la funzione data è continua in $0 \leq x \leq 1$ e derivabile in $0 < x < 1$: ciò verifica l'ipotesi del teorema di Lagrange. La tesi di tale teorema prevede che esista almeno un punto c di $]0; 1[$ tale che:

$$f'(c) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1^2 - 0^2 = 1$$

Essendo: $f'(x) = 2x$, risulta che: $2c = 1 \;\Rightarrow\; c = \frac{1}{2}$

Dunque, per $c = \frac{1}{2}$ il valore della derivata prima della funzione data coincide con $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$; ed essendo il punto trovato $c = \frac{1}{2}$ appartenente a $]0; 1[$, il teorema di Lagrange è verificato.

Proposizione 3.6. Primo corollario del teorema di Lagrange. Sia $x \rightarrow f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b] \subset \mathbf{R}$, derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$; se per ogni $x \in]a; b[$ è $f'(x) > 0$, allora la funzione f è *crescente* in $[a; b]$; se per ogni $x \in]a; b[$ è $f'(x) < 0$, allora la funzione f è *decrescente* in $[a; b]$.

Esempio 3.17. La funzione: $x \rightarrow e^{(5x-1)/25}$ definita e continua in $\mathbf{R}$, derivabile in $\mathbf{R}$, è crescente (in tutto il proprio dominio). Infatti:

$$\mathrm{D}\, e^{(5x-1)/25} = \frac{e^{(5x-1)/25}}{5}$$

ed è immediato verificare che tale derivata prima è positiva $\forall x \in \mathbf{R}$.

Il primo corollario del teorema di Lagrange esprime una condizione *sufficiente ma non necessaria* affinché una funzione sia crescente (o decrescente) in un intervallo $[a; b]$. In altri termini, è possibile che una funzione sia crescente (o decrescente) in un $[a; b]$ anche senza che a essa sia applicabile il primo corollario del teorema di Lagrange (il lettore verifichi ciò per la $x \rightarrow 2x + |x|$, crescente, considerata in un intervallo $[a; b] \subset \mathbf{R}$ tale che $a < 0$ e $b > 0$).

Proposizione 3.7. Secondo corollario del teorema di Lagrange. Sia $x \rightarrow f(x)$ una funzione definita e continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b] \subset \mathbf{R}$, derivabile nell'intervallo aperto $]a; b[$ e tale che per ogni $x \in]a; b[$ sia $f'(x) = 0$. Allora f è costante in $[a; b]$.

Proposizione 3.8. Terzo corollario del teorema di Lagrange. Siano $x \rightarrow f(x)$ e $x \rightarrow g(x)$ due funzioni definite e continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b] \subset \mathbf{R}$, derivabili nell'intervallo aperto $]a; b[$ e tali che $\forall x \in]a; b[$ sia $f'(x) = g'(x)$. Allora la funzione $x \rightarrow f(x) - g(x)$ è costante in $[a; b]$.

Proposizione 3.9. Teorema di Cauchy. Siano $x \rightarrow f(x)$ e $x \rightarrow g(x)$ due funzioni definite e continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b] \subset \mathbf{R}$, derivabili nell'intervallo aperto $]a; b[$ e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a; b[$. Allora esiste (almeno) un punto c, interno all'intervallo di definizione $[a; b]$ tale che:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

Notiamo che il teorema di Lagrange può essere considerato un diretto corollario del teorema di Cauchy: infatti è sufficiente scegliere, per la funzione g, la funzione identità $x \to x$ per ricondurre la tesi del teorema di Cauchy:

$$\exists c \in]a; b[: \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

alla tesi del teorema di Lagrange: $\exists c \in]a; b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Dunque il teorema di Lagrange può essere considerato un'immediata conseguenza del teorema di Cauchy. *Maggiore attenzione richiederebbe, invece, l'affermazione contraria*: esaminiamo infatti la seguente (errata!) "dimostrazione" del teorema di Cauchy.

Esempio 3.18. Consideriamo le ipotesi del teorema di Cauchy:

$$\begin{cases} f \textit{ continua in } [a; b] \\ f \textit{ derivabile in }]a; b[\\ g \textit{ continua in } [a; b] \\ g \textit{ derivabile in }]a; b[\\ \forall x \in]a; b[, \ g'(x) \neq 0 \end{cases}$$

In tale situazione, le ipotesi del teorema di Lagrange sono rispettate sia dalla funzione f che dalla g; potremmo quindi scrivere, per il teorema di Lagrange:

$$\exists c \in]a; b[: f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\exists c \in]a; b[: g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$$

e, dividendo membro a membro, finiremmo con l'ottenere:

$$\exists c \in]a; b[: \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

la tesi del teorema di Cauchy.

La "dimostrazione" sopra riportata *non* è però accettabile: infatti, essa *non garantisce che i due punti sopra indicati con "c", la cui esistenza è prevista grazie all'applicazione (ripetuta due distinte volte) del teorema di Lagrange* *siano lo stesso punto!* Mentre il teorema di Cauchy afferma che esiste "un punto c dell'intervallo $]a; b[$ tale che...".

Pertanto, applicando due distinte volte il teorema di Lagrange avremmo:

$$\exists c \in]a; b[: f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
$$\exists \xi \in]a; b[: g'(\xi) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

e da ciò *non* può direttamente essere ottenuta la tesi del teorema di Cauchy.

Quanto rilevato non significa che il teorema di Cauchy non possa essere dimostrato tenendo come ipotesi il teorema di Lagrange (ad esempio, attraverso la sequenza: teorema di Lagrange $\Rightarrow$ teorema di Rolle $\Rightarrow$ teorema di Cauchy); ma tale dimostrazione non può essere ridotta a quella sopra riportata.

Torniamo ora al calcolo di limiti che si presentano in forma indeterminata.

Proposizione 3.10. Primo teorema di de L'Hospital. Siano $x \to f(x)$ e $x \to g(x)$ due funzioni definite e continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b] \subset \mathbf{R}$, con $c \in]a; b[$, derivabili nell'intervallo aperto $]a; b[$ (ad eccezione, eventualmente, del punto $x = c$) e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a; b[$ (con $x \neq c$); sia inoltre $f(c) = g(c) = 0$. Allora, se esiste finito il: $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche il: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è: $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Proposizione 3.11. Secondo teorema di de L'Hospital. Siano $x \to f(x)$ e $x \to g(x)$ due funzioni definite e continue nell'intervallo chiuso e limitato $[a; b] \subset \mathbf{R}$, con $c \in]a; b[$ (ad eccezione, eventualmente, del punto $x = c$), derivabili nell'intervallo aperto $]a; b[$ (con $x \neq c$) e sia $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a; b[$ (con $x \neq c$); sia inoltre $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = \infty$. Allora, se esiste finito il: $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ allora esiste anche il: $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ ed è: $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

Osserviamo che i due teoremi di de L'Hospital valgono anche (con le opportune modifiche alle ipotesi):

- quando il quoziente delle derivate prime ammette limite infinito;
- quando si esaminino limiti per $x \to \infty$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$;
- quando si considerino intorni e limiti destri o sinistri.

I teoremi di de L'Hospital consentono di calcolare molti limiti che si presentano in forme indeterminate dei tipi $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. È tuttavia opportuno precisare le modalità di applicazione di tali proposizioni.

Innanzitutto si noti che i due teoremi di de L'Hospital non proclamano l'uguaglianza dei limiti del rapporto di due funzioni e del rapporto delle loro derivate: essi affermano soltanto che, in determinate situazioni (fissate dalle ipotesi), se esiste il limite del rapporto delle derivate, allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni e tali limiti coincidono.

Esempio 3.19. Il $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ si presenta in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Valutiamo i limiti del rapporto delle derivate prime:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x}$$

(*ancora* in forma indeterminata) e del rapporto delle derivate seconde:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Per il II teorema di de L'Hospital: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = +\infty$ e infine: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$

I teoremi di de L'Hospital possono essere utilizzati anche per determinare limiti che si presentano in forme indeterminate *diverse* dai tipi $\left[\frac{0}{0}\right]$ o $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$: sarà necessario ricondurre le altre forme indeterminate a quelle previste attraverso opportuni passaggi algebrici.

Esempio 3.20. Il $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x + \operatorname{sen} x}{3x + \cos x}$ è in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Applichiamo il II teorema di de L'Hospital e consideriamo il limite del rapporto delle derivate: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6 + \cos x}{3 - senx}$

Quest'ultimo limite non esiste (la funzione è periodica: al crescere di x, essa continua a "oscillare" tra un massimo e un minimo, senza mai "stabilizzarsi" verso un limite ben definito). Una (scorretta!) conclusione potrebbe allora essere che anche il limite proposto, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6x + senx}{3x + \cos x}$, non esiste.

Così facendo commetteremmo un grave errore: i teoremi di de L'Hospital possono essere applicati *soltanto per dimostrare l'esistenza di un limite, mai per negarla.* Se il tentativo di calcolare un limite attraverso i teoremi di de

L'Hospital fallisce (come nel caso ora esaminato) *non possiamo concludere alcunché a proposito dell'esistenza del limite dato*.

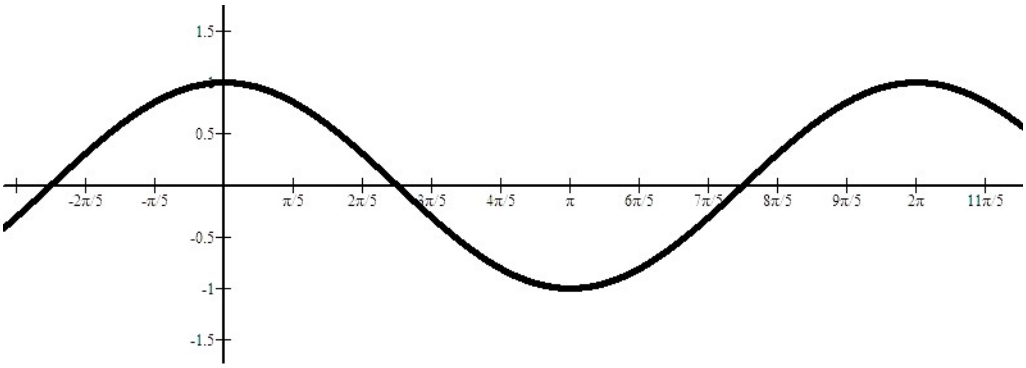
Non è difficile verificare che il limite proposto *esiste*. Infatti, risulta:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x+senx}{3x+\cos x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6+\frac{senx}{x}}{3+\frac{\cos x}{x}}=\frac{6}{3}=2$$

Definizione 3.8. Si consideri una funzione definita in un intorno $I(x_0)\subseteq\mathbf{R}$ del punto $x = x_0$ ed espressa da $y = f(x)$. Se per ogni $x\in I(x_0)$ risulta: $f(x_0) \geq f(x)$ il punto $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ si dice *punto di massimo relativo* del grafico della f; il reale $x = x_0$ si dice *massimante relativo* e il reale $f(x_0)$ si dice *massimo relativo*.

Si consideri una funzione definita in un intorno $I(x_0)\subseteq\mathbf{R}$ del punto $x = x_0$ ed espressa da $y = f(x)$. Se per ogni $x\in I(x_0)$ risulta: $f(x_0) \leq f(x)$ il punto $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ si dice *punto di minimo relativo* del grafico della f; il reale $x = x_0$ si dice *minimante relativo* e il reale $f(x_0)$ si dice *minimo relativo*.

Esempio 3.21. La funzione $x\to f(x)$ espressa da: $y = \cos x$ ha il grafico seguente.



Al grafico di tale funzione appartengono:

- punti di massimo relativo in ogni $(2k\pi; 1)$, con $k\in\mathbf{Z}$; i massimanti relativi sono $x = 2k\pi$, con $k\in\mathbf{Z}$; per ciascuno di essi il massimo relativo è 1;
- punti di minimo relativo in ogni $(\pi+2k\pi; -1)$, con $k\in\mathbf{Z}$; i minimanti relativi sono $x = \pi+2k\pi$, con $k\in\mathbf{Z}$; per ciascuno di essi il minimo relativo è -1.

La determinazione dei punti di massimo e di minimo (relativi e assoluti) del grafico di una funzione assegnata è frequentemente richiesta in esercizi e in applicazioni. Dimostriamo l'importante teorema seguente.

Proposizione 3.12. Sia data una funzione derivabile in un intorno $I(x_0)\subseteq\mathbf{R}$ del punto $x = x_0$ ed espressa dall'equazione cartesiana $y = f(x)$. Se $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ è un punto di massimo relativo o di minimo relativo per il grafico della funzione data, allora: $f'(x_0) = 0$

Dimostrazione. Sia $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ punto di minimo relativo per il grafico di $y = f(x)$ (il caso del massimo relativo si dimostra in modo del tutto analogo).

Consideriamo un reale positivo h in modo tale che x_0+h e x_0-h appartengano a $I(x_0)$. Consideriamo ora i valori $f(x_0+h)$ e $f(x_0-h)$: essendo x_0 l'ascissa in corrispondenza della quale f assume *minimo* valore, è:

$$f(x_0) \le f(x_0+h) \qquad f(x_0) \le f(x_0-h)$$
$$f(x_0+h)-f(x_0) \ge 0 \qquad f(x_0-h)-f(x_0) \ge 0$$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0 \qquad \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} \le 0$$

dove la prima disuguaglianza è stata divisa per il reale *positivo h* e la seconda per il reale *negativo* $-h$.

Passiamo ai limiti per $h \to 0^+$; per il primo rapporto incrementale si ha:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Per il secondo otteniamo, dopo il cambio di variabile $-h = \xi$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = \lim_{\xi \to 0^-} \frac{f(x_0+\xi)-f(x_0)}{\xi}$$

Questi limiti, essendo f derivabile per ipotesi in $x = x_0$, esistono e valgono entrambi $f'(x_0)$. Per quanto riguarda i loro segni, risulta:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) \ge 0$$

poiché se una funzione è non negativa in un intorno di $h = 0$ (escluso $h = 0$ stesso) allora anche il suo limite per $h \to 0$ è non negativo; analogamente:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = f'(x_0) \le 0$$

e dunque $f'(x_0) = 0$. ■

Definizione 3.9. Si consideri una funzione derivabile in un intorno $I(x_0) \subseteq \mathbf{R}$ del punto $x = x_0$ ed espressa dall'equazione cartesiana $y = f(x)$. Se risulta: $f'(x_0) = 0$ il punto $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ si dice *punto di stazionarietà* del grafico della f.

Esempio 3.22. Consideriamo la funzione $x \to f(x)$ espressa da: $y = \cos x$. La derivata prima della funzione data è espressa da: $y' = \operatorname{sen} x$ e possiamo constatare che essa si annulla per $x = k\pi$, con $k\in\mathbf{Z}$. Pertanto tutti i punti $(2k\pi; 1)$, con $k\in\mathbf{Z}$ e $(\pi+2k\pi; -1)$, con $k\in\mathbf{Z}$ sono punti di stazionarietà del grafico della funzione.

La proposizione 3.12 esprime una condizione *necessaria ma non sufficiente* per l'esistenza di punti di massimo o di minimo relativi, *nell'ipotesi (essenziale) che la funzione in esame sia derivabile* nei punti considerati:

- anche mantenendo l'ipotesi della derivabilità, *non è sufficiente* che $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ sia un punto di stazionarietà, cioè che sia $f'(x_0) = 0$, per affermare che $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ è un punto di massimo o di minimo relativo; in altri termini, esistono funzioni i cui grafici hanno uno o più punti di stazionarietà (le cui derivate si annullano per uno o più valori di x), ma non hanno alcun punto di massimo né di minimo relativo;
- *se poi viene a mancare il requisito della derivabilità* di f in $x = x_0$, allora la $f'(x_0) = 0$ *non risulta neppure necessaria* affinché $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ sia un punto di massimo o di minimo relativo; in altri termini, esistono funzioni non derivabili in $x = x_0$ (quindi *non* tali che sia $f'(x_0) = 0$) i cui grafici hanno in $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ un punto di massimo o di minimo relativo.

Esempio 3.23. La funzione $x\to f(x)$ espressa da: $y = x^3$ è continua e derivabile per ogni $x\in\mathbf{R}$. Al grafico di tale funzione (esempio 3.5) *non* appartiene alcun punto di massimo relativo né alcun punto di minimo relativo. Eppure la derivata prima della funzione data è espressa da: $y' = 3x^2$ e si annulla per $x = 0$; quindi l'origine degli assi *è* un punto di stazionarietà del grafico della funzione assegnata: anticipiamo che tale punto sarà denominato *punto di flesso*, o, più precisamente, *punto di flesso (a tangente orizzontale) crescente*, in considerazione del fatto che la funzione, in un intorno di $x = 0$, è crescente.

Esempio 3.24. Al grafico della funzione $x\to f(x)$ espressa da: $y = |x|$ (esempio 3.6) appartiene il punto (0; 0) di minimo relativo (e assoluto); si noti che la funzione data *non* è derivabile per $x = 0$ (ha nell'origine un punto angoloso).

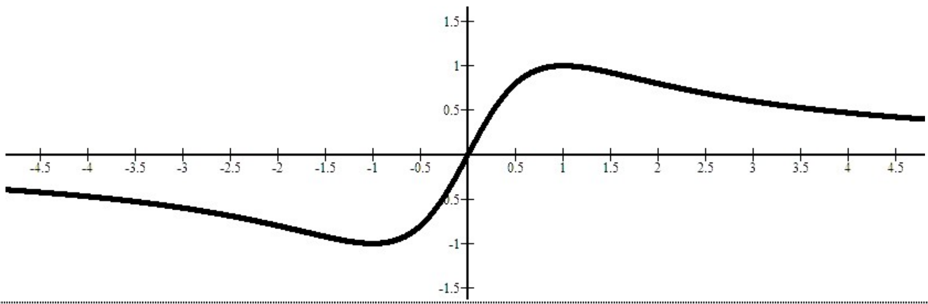
Esempio 3.25. Cerchiamo i punti di massimo relativo e di minimo relativo del grafico della funzione $x\to f(x)$ espressa da: $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ definita, continua e derivabile in tutto **R**. Studiamo il segno della derivata prima di tale funzione:

$$\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad -1 \leq x \leq 1$$

$x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f'(x) < 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) > 0$	$f'(x) = 0$	$f'(x) < 0$

	(punto di stazionarietà)		(punto di stazionarietà)	
decrescente	punto di MINIMO relativo $f(-1) = -1$	crescente	punto di MASSIMO relativo $f(1) = 1$	decrescente

Concludiamo: punto di minimo relativo: $(-1; -1)$
punto di massimo relativo: $(1; 1)$



Un metodo alternativo per stabilire se un punto di stazionarietà è un punto di massimo relativo, di minimo relativo, di flesso crescente o di flesso decrescente è basato sulla proposizione che andiamo a enunciare.

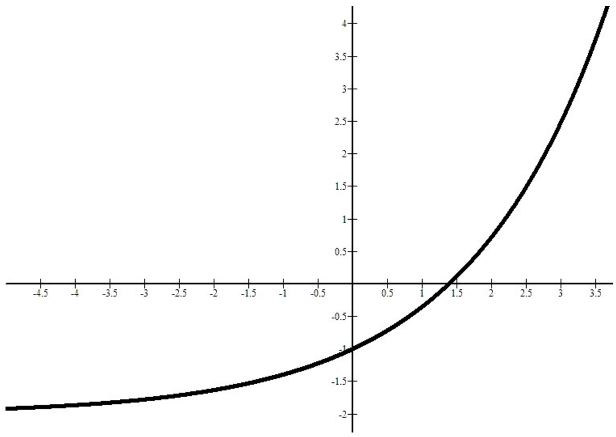
Proposizione 3.13. Si consideri una funzione definita in un intorno $I(x_0) \subseteq \mathbf{R}$ del punto $x = x_0$, espressa da $y = f(x)$ e derivabile in $I(x_0)$ $n-1$ volte e derivabile in $x = x_0$ n volte. Sia: $f'(x_0) = f''(x_0) = ... = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ e $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Allora:
se n è pari, il grafico della funzione data ammette in $(x_0; f(x_0))$:
- un punto di massimo relativo, se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- un punto di minimo relativo, se $f^{(n)}(x_0) > 0$;

se n è dispari, il grafico della funzione data ammette in $(x_0; f(x_0))$:
- un punto di flesso (a tangente orizzontale) decrescente, se $f^{(n)}(x_0) < 0$;
- un punto di flesso (a tangente orizzontale) crescente, se $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Il procedimento basato sulla proposizione precedente comporta la necessità di determinare alcune derivate successive della funzione in esame, operazione che può rivelarsi praticamente difficoltosa. D'altro canto, non richiede lo studio del segno della derivata prima (e la risoluzione della corrispondente disequazione).

Definizione 3.10. La funzione $x \to f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ si dice *convessa* nell'intervallo $[a; b] \subseteq D$ se per ogni $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ con $x_1 < x_2$ e per ogni reale α tale che $0 < \alpha < 1$ risulta: $f[\alpha x_2 + (1-\alpha)x_1] \leq \alpha f(x_2) + (1-\alpha) f(x_1)$

La condizione $x_1 < x_2$ *non* è indispensabile per la validità della definizione, ma non ne muta il senso e semplifica la sua interpretazione geometrica.



Lasciamo al lettore il compito di interpretare la definizione notando che la funzione $x \to f(x)$ si dice *convessa* nell'intervallo $[a; b] \subseteq D$ quando, per ogni $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$, il grafico della funzione in corrispondenza dell'ascissa $x = \alpha x_2 + (1-\alpha)x_1$ (tra x_1 e x_2) si trova "non al di sopra" (nel senso dell'ordinamento delle ordinate) del segmento di estremi $(x_1; f(x_1))$ e $(x_2; f(x_2))$. Nella figura precedente la funzione espressa da $y = e^{(x/2)} - 2$ convessa in tutto $\mathbf{R}$.

Definizione 3.11. La funzione $x \to f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ si dice *concava* nell'intervallo $[a; b] \subseteq D$ se per ogni $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ con $x_1 < x_2$ e per ogni reale α tale che $0 < \alpha < 1$ risulta: $f[\alpha x_2 + (1-\alpha)x_1] \geq \alpha f(x_2) + (1-\alpha) f(x_1)$

Enunciamo l'utile risultato seguente:

Proposizione 3.14. Sia data la funzione $x \to f(x)$ definita nel dominio $D \subseteq \mathbf{R}$ e sia f continua e due volte derivabile in $[a; b]$ con $[a; b] \subseteq D$. Allora se per ogni $x \in [a; b]$ è $f''(x) \geq 0$, la funzione $x \to f(x)$ è convessa in $[a; b]$; se per ogni $x \in [a; b]$ è $f''(x) \leq 0$, la funzione $x \to f(x)$ è concava in $[a; b]$.

Esempio 3.26. La funzione $x \to f(x)$ espressa da: $y = x^3$ è convessa nell'insieme dei reali non negativi ed è concava nell'insieme dei reali non positivi (si veda il grafico nell'esempio 3.5). La f è continua e due volte derivabile in $\mathbf{R}$ e risulta:

$f''(x) = 6x$ positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$

Alcuni punti di stazionarietà non sono punti di massimo relativo né punti di minimo relativo e sono detti *punti di flesso*. Un *punto di flesso* è caratterizzato dalla proprietà secondo la quale la retta tangente al grafico in tale punto lascia la curva da parti opposte (per x appartenente a un intorno del punto).

Definizione 3.12. Data la funzione espressa da $y = f(x)$, di dominio $D \subseteq \mathbf{R}$, il punto $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ si dice *punto di flesso* del grafico di tale funzione se esistono $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ tali che la funzione data sia convessa in $[x_1; x_0]$ e concava in $[x_0; x_2]$, oppure concava in $[x_1; x_0]$ e convessa in $[x_0; x_2]$. La retta tangente al grafico di $y = f(x)$ in $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ si dice *tangente inflessionale*.

Se la funzione espressa da $y = f(x)$ è derivabile in $x = x_0$, la retta tangente inflessionale ha equazione cartesiana: $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

Esempio 3.27. Consideriamo la funzione $x \to f(x)$ espressa da: $y = x^3$. Come abbiamo cosnstatato in precedenti esempi essa è convessa nell'insieme dei reali non negativi ed è concava nell'insieme dei reali non positivi; pertanto il suo punto di ascissa $x = 0$ (l'origine degli assi) è un punto di flesso. In tale punto, la retta tangente inflessionale ha equazione $y = 0$ cioè è l'asse delle ascisse. Il grafico di $y = x^3$ non ammette altri punti di flesso, oltre a $(0; 0)$.

Proposizione 3.15. Sia data una funzione f due volte derivabile in un intorno $I(x_0) \subseteq \mathbf{R}$ del punto $x = x_0$ ed espressa dall'equazione cartesiana $y = f(x)$. Se $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ è un punto di flesso per il grafico della f, allora: $f''(x_0) = 0$

La proposizione esprime una condizione *necessaria ma non sufficiente* per l'esistenza di punti di flesso del grafico di una funzione, *nell'ipotesi (essenziale) che la funzione in esame sia due volte derivabile* nei punti considerati:

- anche mantenendo l'ipotesi della derivabilità (due volte), *non è sufficiente* che sia $f''(x_0) = 0$, per affermare che $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ è un punto di flesso; in altri termini, esistono funzioni i cui grafici hanno uno o più punti per cui è $f''(x_0) = 0$, ma non hanno alcun punto di flesso;
- *se poi viene a mancare il requisito della derivabilità (due volte)* di f in $x = x_0$, allora la condizione $f''(x_0) = 0$ *non risulta neppure necessaria* affinché $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ sia un punto di flesso; in altri termini, esistono funzioni non derivabili due volte in $x = x_0$ (e quindi... *non* tali che sia $f''(x_0) = 0$) i cui grafici hanno in $\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ un punto di flesso.

Esempio 3.28. Consideriamo la funzione $x \to f(x)$ espressa da: $y = x^4$, due volte derivabile in tutto il proprio dominio $\mathbf{R}$. La derivata seconda di tale funzione:

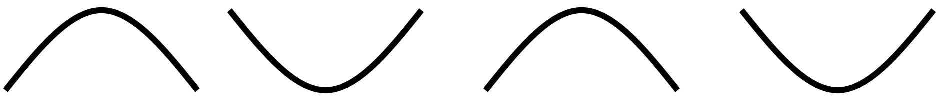
$$f''(x) = 12x^2$$

si annulla per $x = 0$. Ma ciò *non* è sufficiente affinché (0; 0) sia un punto di flesso. Infatti $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$, perciò f è convessa in **R** e non può avere flessi. Si verifica che (0; 0) è un punto di minimo relativo per il grafico di $y = x^4$.

Esempio 3.29. Consideriamo la funzione $x \to f(x)$ espressa da $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ (si veda l'esempio 3.25) due volte derivabile in tutto il proprio dominio **R**. Per determinare i punti di flesso studiamo il segno della sua derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{4x\left(x^2-3\right)}{\left(x^2+1\right)^3} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad -\sqrt{3} \leq x \leq 0 \quad \vee \quad x \geq \sqrt{3}$$

$x < -\sqrt{3}$	$x = -\sqrt{3}$	$-\sqrt{3} < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < \sqrt{3}$	$x = \sqrt{3}$	$x > \sqrt{3}$
$f''(x) < 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) > 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) > 0$



concava	punto di FLESSO	convessa	punto di FLESSO	concava	punto di FLESSO	convessa
	$f\left(-\sqrt{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$		$f(0) = 0$		$f\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$	

I punti di flesso per il grafico di $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sono:

$$\left(-\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad (0;\, 0) \qquad \left(\sqrt{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

con rispettive tangenti inflessionali di equazione:

$$y = \frac{1}{4}x - \frac{3\sqrt{3}}{4} \qquad y = 2x \qquad y = -\frac{1}{4}x + \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Un'importante fase dello studio di una funzione è la ricerca di eventuali asintoti. Suddivideremo tale ricerca in tre fasi, che riguarderanno rispettivamente:

- gli asintoti paralleli all'asse delle ordinate, di equazione $x = a$ (con $a \in$ **R**), denominati *asintoti verticali*;
- gli asintoti paralleli all'asse delle ascisse, di equazione $y = b$ (con $b \in$ **R**), denominati *asintoti orizzontali*;
- gli asintoti non paralleli ad alcun asse cartesiano, detti *asintoti obliqui*.

Definizione 3.13. Data la funzione espressa da $y = f(x)$, definita in un intorno destro, o in un intorno sinistro di $x = a$, o in entrambi (ad eccezione di $x = a$

stesso), con a costante reale. Allora la retta di equazione $x = a$ si dice *asintoto verticale* del grafico di $y = f(x)$ se è verificato almeno uno dei limiti seguenti:

Errore. Il segnalibro non è definito. **Errore. Il segnalibro non è definito.** **Errore. Il segnalibro non è definito.** $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

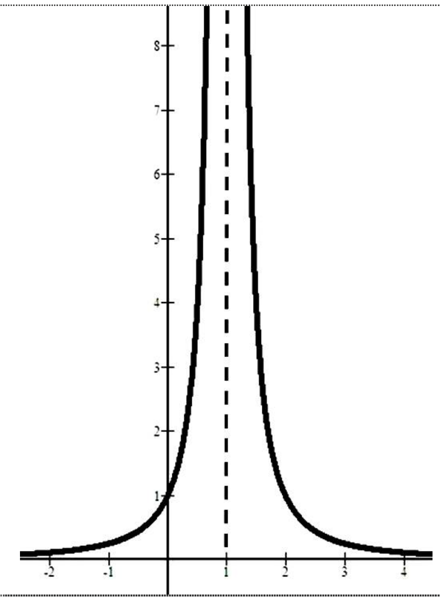
Esempio 3.30. Consideriamo la funzione $x \to f(x)$ espressa dall'equazione:

$$y = \frac{1}{(x-1)^2}$$

Definita in D = $\{x \in \mathbf{R}: x \neq 1\}$. Risulta:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$$

Dunque la retta di equazione $x = 1$ è un asintoto verticale (vedi figura) del grafico di $y = \frac{1}{(x-1)^2}$.



La ricerca degli asintoti verticali del grafico di $y = f(x)$ è in generale ricondotta al calcolo dei limiti destro e sinistro in corrispondenza di punti in cui la funzione $x \to f(x)$ *non* è definita. Si noti però che la non appartenenza di $x = a$ al dominio di $x \to f(x)$ *non* è una condizione necessaria (né sufficiente!) affinché la retta di equazione $x = a$ sia asintoto per il grafico di $y = f(x)$.

Definizione 3.14. Consideriamo la funzione espressa da $y = f(x)$, definita in un intorno di $+\infty$, o in un intorno di $-\infty$, o in entrambi. Allora la retta di equazione $y = b$, con b costante reale, si dice *asintoto orizzontale* del grafico di $y = f(x)$ se è verificato almeno uno dei limiti:**Errore. Il segnalibro non è definito.**; **Errore. Il segnalibro non è definito.**

Esempio 3.31. Consideriamo ancora la funzione espressa da: $y = \frac{1}{(x-1)^2}$. Risulta **Errore. Il segnalibro non è definito.** e **Errore. Il segnalibro non è definito.**, dunque la retta di equazione $y = 0$ (l'asse delle ascisse) è asintoto orizzontale (figura nell'esempio precedente).

Nell'esempio $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Non è necessario che tali limiti coincidano: una funzione può ammettere fino a due asintoti orizzontali, per $x\to-\infty$ e per $x\to+\infty$ (non ci sono limitazioni di numero per gli asintoti verticali).

Definizione 3.15. Consideriamo la funzione espressa da $y = f(x)$, definita in un intorno di $+\infty$, o in un intorno di $-\infty$, o in entrambi. Allora la retta di equazione $y = mx+q$, con m e q costanti reali, m non nulla, si dice *asintoto obliquo* del grafico di $y = f(x)$ se è verificato almeno uno dei limiti seguenti:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]=0 \qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+q)\right]=0$$

Per la ricerca pratica di asintoti obliqui, si utilizza il risultato che enunciamo:

Proposizione 3.16. Consideriamo la funzione espressa da $y = f(x)$, definita in un intorno di $+\infty$, o in un intorno di $-\infty$, o in entrambi. Allora la retta di equazione $y = mx+q$, con m e q costanti reali, m non nulla, è asintoto obliquo del grafico di $y = f(x)$ se è verificata almeno una delle seguenti coppie di limiti:

$$\begin{cases} m = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ q = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} m = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} \\ q = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] \end{cases}$$

L'asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ esclude la presenza dell'asintoto obliquo per $x\to+\infty$ (e viceversa) poiché per l'asintoto obliquo occorre $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\pm\infty$. Analogamente accade nel caso di $x\to-\infty$. Naturalmente, una funzione può ammettere asintoto orizzontale per $x\to+\infty$ e asintoto obliquo per $x\to-\infty$ (oppure: asintoto orizzontale per $x\to-\infty$ e asintoto obliquo per $x\to+\infty$).

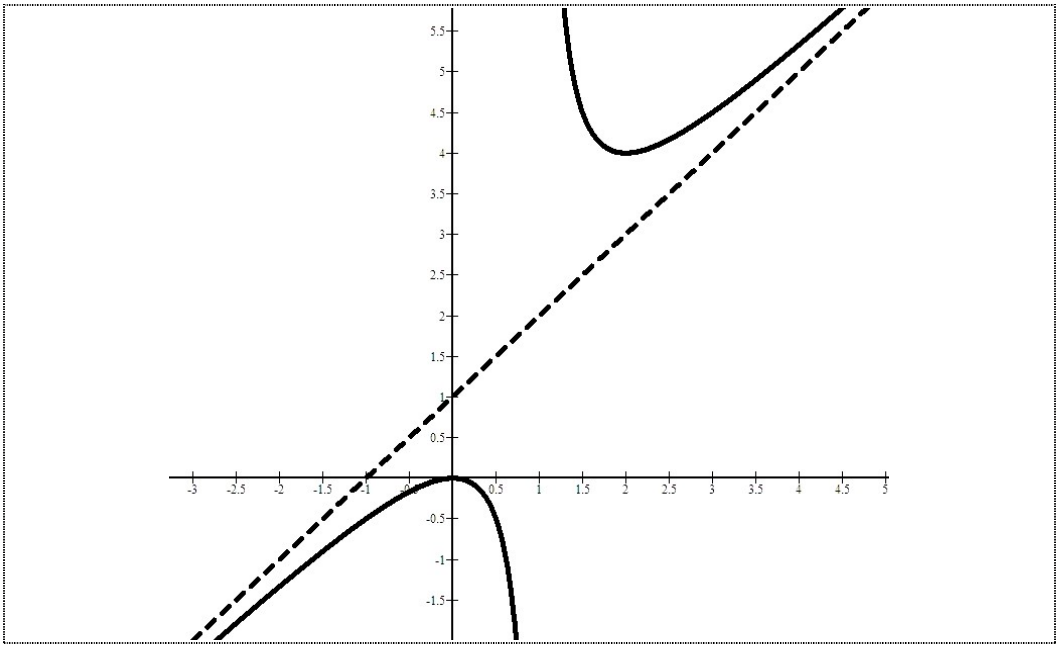
Esempio 3.32. Consideriamo la funzione $x\to f(x)$ espressa da: $y = \dfrac{x^2}{x-1}$ definita in $\{x\in\mathbf{R}\colon x \neq 1\}$. Il suo grafico non è dotato di asintoto orizzontale in quanto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}=+\infty \qquad \text{e:} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x-1}=-\infty$$

Esso è dotato di asintoto obliquo di equazione $y = x+1$, essendo:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=1$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^2}{x-1}-x\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x-1}=1$$



Sarebbe errato affermare che il grafico di $y = f(x)$ è dotato di asintoto obliquo "quando $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ esiste finito". Può accadere che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ esista finito, ma il grafico *non* sia dotato di asintoto obliquo (il lettore esamini $y = \log_e x$).

Schema riassuntivo per lo studio di funzione f: $D\to\mathbf{R}$ espressa da $y = f(x)$

①**Errore. Il segnalibro non è definito.** Determinare il *dominio* $D\subseteq\mathbf{R}$ (nel caso in cui non sia dato).
②**Errore. Il segnalibro non è definito.** Esame di particolari caratteristiche della funzione data: dire se è *pari* (con grafico simmetrico rispetto all'asse delle y), se è *dispari* (con grafico simmetrico rispetto all'origine), se è *periodica* (e in tal caso determinare il *periodo*).
③**Errore. Il segnalibro non è definito.** Trovare le *intersezioni* del grafico di $y = f(x)$ con gli assi delle x e delle y.
④**Errore. Il segnalibro non è definito.** Determinare i due sottoinsiemi di $D\subseteq\mathbf{R}$ in cui $f(x) > 0$ e $f(x) < 0$ (detti di *positività* e di *negatività* per la funzione data).
⑤**Errore. Il segnalibro non è definito.** Calcolare i *limiti* a cui tende $f(x)$ al tendere di x ai punti di frontiera del dominio e a $+\infty$ (se D non è superiormente limitato) e a $-\infty$ (se D non è inferiormente limitato); trovare gli *asintoti* del grafico di $y = f(x)$.
⑥**Errore. Il segnalibro non è definito.** Determinare la *derivata prima* (notando eventuali punti in cui essa non esiste), studiare il segno di $f'(x)$, determi-

nare i sottoinsiemi di D$\subseteq$**R** in cui la funzione è crescente e decrescente e i punti estremi relativi del grafico di $y = f(x)$.

⑦ Determinare la *derivata seconda* (evidenziando eventuali punti in cui essa non esiste), studiare il segno di $f''(x)$, determinare i sottoinsiemi di D$\subseteq$**R** in cui la funzione è convessa e concava e determinare i punti di flesso del grafico di $y = f(x)$, con le rispettive tangenti inflessionali.

⑧ In base alle precedenti informazioni, tracciare un *grafico* approssimato.

Esempio 3.33. Studiamo la funzione $x \to f(x)$ espressa da: $y = \sqrt[3]{1-x^3}$

❶ D = **R**.

❷ La funzione non è pari né dispari (si può verificare che il grafico di $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ è simmetrico rispetto alla retta di equazione $y = x$) e non è periodica.

❸ $$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{1-x^3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{1-x^3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

❹ $f(x) > 0 \;\Rightarrow\; \sqrt[3]{1-x^3} > 0 \;\Rightarrow\; x < 1;\quad f(x) < 0 \;\Rightarrow\; x > 1$

❺ $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{1-x^3} = +\infty$ e: $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1-x^3} = -\infty$

Il grafico di $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ non è dotato di asintoti verticali né orizzontali.

Risulta: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt[3]{1-x^3}}{x} = -1$ e: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-x^3} - x\right) = 0$ (lasciamo al lettore il compito di verificare i limiti), dunque il grafico di $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ ammette l'asintoto obliquo di equazione $y = -x$. La funzione data è continua in tutto il dominio.

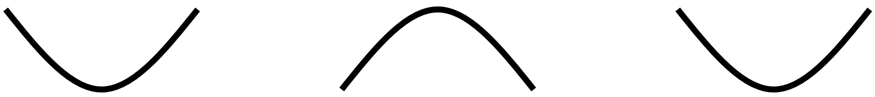
❻ $f'(x) = -\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}} \geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0$

$x<0$	$x=0$	$0<x<1$	$x=1$	$x>1$
$f'(x)<0$	$f'(x)=0$	$f'(x)<0$	$f'(x)$ non esiste	$f'(x)<0$
$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$
decrescente	punto di FLESSO a tangente orizzontale	decrescente		decrescente

Il grafico di $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ non ammette alcun punto estremo relativo.

❼ $f''(x) = \dfrac{2x}{\left(x^3-1\right)\sqrt[3]{\left(1-x^3\right)^2}} \geq 0 \Rightarrow \quad x \leq 0 \quad \vee \quad x > 1$

$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
$f''(x) > 0$	$f''(x) = 0$	$f''(x) < 0$	$f''(x)$ non esiste	$f''(x) > 0$



convessa	punto di FLESSO $f(0)=1$	concava	punto di FLESSO $f(1)=0$	convessa

I punti di flesso per il grafico di $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ sono: (0; 1) e (1; 0) con rispettive tangenti inflessionali di equazione: $y = 1$ e $x = 1$.

❽ Il grafico di $y = \sqrt[3]{1-x^3}$ è: