Capitolo 2

Limiti di funzioni

2.1. LIMITI

Il concetto fondamentale della topologia è quello di *intorno*. Con esso avremo la possibilità di formalizzare la nozione intuitiva di vicinanza di due punti. Presentiamo il concetto di intorno di un punto della retta, ricordando che la definizione di intorno potrebbe essere introdotta da un'impostazione assiomatica: ciò però esula dagli scopi del presente manuale.

Un sottoinsieme di **R** costituito dai numeri reali compresi tra due reali dati si dice *intervallo*. Specifichiamo ulteriormente questo concetto con riferimento agli estremi dell'intervallo (i quali in alcuni casi sono considerati appartenenti all'intervallo stesso, mentre in altri casi no).

Definizione 2.1. Si dice *intervallo aperto* di **R** l'insieme dei reali compresi tra due reali a, b, tali che $a<b$, estremi esclusi: $\{x\in\mathbf{R}\colon a<x<b\}$. Si dice *intervallo chiuso* di **R** l'insieme dei reali compresi tra due reali a, b, tali che $a<b$, estremi inclusi: $\{x\in\mathbf{R}\colon a\le x\le b\}$

Spesso gli intervalli aperti e chiusi sono indicati con i simboli seguenti:

$$]a; b[= \{x\in\mathbf{R}\colon a<x<b\} \qquad [a; b] = \{x\in\mathbf{R}\colon a\le x\le b\}$$

Definizione 2.2. Si dice *intorno* del punto P di ascissa $x = c$ l'insieme dei punti appartenenti a un (qualsiasi) intervallo aperto di **R** al quale appartenga il punto P stesso.

Un intorno di un punto P di ascissa $x = c$, dunque, è costituito da una "zona" circostante P. Si noti che la precedente definizione di intorno non impone (ma neppure esclude) che l'intorno di un punto P sia simmetrico rispetto a P stesso. Nella pratica frequentemente si assume che un intorno di un punto P sia rappresentato da un intervallo aperto (graficamente: da un segmento, estremi esclusi) con P equidistante dagli estremi.

Esempio 2.1. Ogni insieme di punti della retta aventi per ascisse i reali appartenenti a un insieme del tipo: $\{x\in\mathbf{R}\colon 2-\varepsilon<x<2+\varepsilon \wedge \varepsilon\in\mathbf{R}^+\}$ è un intorno del punto di ascissa $x = 2$ ($\varepsilon\in\mathbf{R}^+$ si riferisce a un reale positivo ε).

Naturalmente un intorno di $x = 2$ può essere rappresentato anche da insiemi scritti in altre forme (non simmetriche) come: $\{x \in \mathbf{R}: 2-4\varepsilon<x<2+7\varepsilon \wedge \varepsilon \in \mathbf{R}^+\}$

Si noti che che alla definizione di intorno è estranea ogni specificazione metrica, collegata alla distanza dei punti. Pertanto, parlando dell'intorno di un punto non si dovrà mai fare riferimento alla sua "ampiezza", ma si intenderà un *qualsiasi* intervallo aperto al quale appartenga il punto in questione.

Definizione 2.3. Il punto P di ascissa $x = c$ si dice *punto di aderenza* per l'insieme T se a ogni intorno di P appartiene (almeno) un punto di T. L'insieme dei punti di aderenza per T si dice *aderenza* (o *chiusura*) di T.

Il lettore verificherà che T è sottoinsieme proprio o improprio dell'aderenza di T (se P è un punto di T, a ogni intorno di P appartiene almeno un punto di T: P stesso; allora se P è un punto di T, esso è anche un punto dell'aderenza per T). Dunque all'aderenza di T appartengono tutti i punti di T. Tuttavia, in generale, possono esistere punti di aderenza per l'insieme T che *non* appartengono a T stesso.

Alcuni punti di aderenza per un insieme T vengono detti punti di accumulazione. Tali punti, la cui nozione si rivelerà della massima importanza in analisi matematica, sono così introdotti:

Definizione 2.4. Il punto P di ascissa $x = c$ si dice *punto di accumulazione* per l'insieme T se a ogni intorno di P appartiene (almeno) un punto di T diverso da P. L'insieme dei punti di accumulazione per T si dice *insieme derivato* di T.

È possibile dare una definizione di punto di accumulazione diversa da quella precedente; questa definizione alternativa sfrutta una proprietà caratteristica della topologia della retta, espressa dal seguente

Assioma di separazione. Per due punti distinti P e Q della retta esiste (almeno) un intorno di P che non contiene Q e viceversa.

Ci limitiamo ad affermare che la retta, in cui sia fissata la definizione di intorno sopra vista, rispetta quanto espresso nell'assioma di separazione. In spazi con tale assioma, la definizione di punto di accumulazione può essere data anche nel modo seguente.

Definizione 2.5. Il punto P di ascissa $x = c$ si dice *punto di accumulazione* per l'insieme T se a ogni intorno di P appartengono infiniti punti di T.

È noto che alcuni punti di aderenza per T possono non essere di accumulazione per T: questi punti di aderenza per T vengono detti punti isolati di T:

Definizione 2.6. Il punto P di ascissa $x = c$ si dice *punto isolato* dell'insieme T se appartiene a T, ma esiste almeno un intorno di P al quale non appartengono punti di T ad eccezione di P stesso.

Esempio 2.2. Consideriamo l'insieme di punti della retta aventi per ascisse i reali appartenenti a: $T = \{x \in \mathbf{R}: 0 \leq x < 1 \vee x = 2 \vee 3 < x \leq 4\}$

L'aderenza di T è espressa da $\{x \in \mathbf{R}: 0 \leq x \leq 1 \vee x = 2 \vee 3 \leq x \leq 4\}$

L'insieme derivato di T è espresso da $\{x \in \mathbf{R}: 0 \leq x \leq 1 \vee 3 \leq x \leq 4\}$

L'unico punto isolato di T è il punto di ascissa $x = 2$. Infatti a ogni intorno di tale punto del tipo: $\{x \in \mathbf{R}: 2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon \wedge \varepsilon \in \mathbf{R}^+\}$ con $0 < \varepsilon < 1$ non appartengono punti di T diversi da P stesso.

Definizione 2.7. Il punto P di ascissa $x = c$ si dice *punto di frontiera* per T se a ogni intorno di P appartengono sia punti appartenenti a T, sia punti non appartenenti a T. L'insieme dei punti di frontiera per T si dice *frontiera* di T.

Si noti che, in base alla definizione, i punti di frontiera per un insieme T possono appartenere o non appartenere a T.

All'inizio di questo capitolo abbiamo introdotto gli intervalli aperti e intervalli chiusi. Generalizzeremo ora quelle definizioni introducendo la nozione di insieme aperto e insieme chiuso.

Definizione 2.8. L'insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ si dice *aperto* se è disgiunto dalla propria frontiera. L'insieme $C \subseteq \mathbf{R}$ si dice *chiuso* se include come sottoinsieme la propria frontiera.

Gli insiemi $\mathbf{R}$ e $\varnothing$ sono insiemi contemporaneamente aperti e chiusi (lo si verifichi, notando che per entrambi la frontiera è l'insieme vuoto).

Diamo alcune definizioni riguardanti il massimo e il minimo di un insieme.

Definizione 2.9. Si dice *massimo* di $T \subseteq \mathbf{R}$ l'elemento $M \in T$ (se tale elemento esiste) tale che per ogni $x \in T$, è $M \geq x$. Si dice *minimo* di $T \subseteq \mathbf{R}$ l'elemento $m \in T$ (se tale elemento esiste) tale che per ogni $x \in T$, è $m \leq x$.

Il massimo e il minimo dell'insieme T (quando esistono) si indicano rispettivamente con: maxT, minT. Talvolta in analisi matematica si fa riferimento al massimo e al minimo di una funzione f: $D \rightarrow \mathbf{R}$. Con tale espressione è convenzione indicare il massimo e il minimo del codominio $C \subseteq \mathbf{R}$ della f.

Definizione 2.10. L'elemento $x = \lambda$ si dice *maggiorante* per l'insieme $T \subseteq \mathbf{R}$ se, per ogni $x \in T$, è $\lambda \geq x$. L'elemento $x = \mu$ si dice *minorante* per l'insieme $T \subseteq \mathbf{R}$ se, per ogni $x \in T$, è $\mu \leq x$.

Si noti che le precedenti definizioni *non* richiedono che λ e μ appartengano a T (se così fosse, coinciderebbero con le definizioni di massimo e di minimo).

Definizione 2.11. L'insieme $T \subseteq \mathbf{R}$ si dice *superiormente limitato* se esiste (almeno) un maggiorante per T. Un insieme non superiormente limitato (cioè per il quale non esistano maggioranti) si dice *superiormente illimitato*.

L'insieme $T \subseteq \mathbf{R}$ si dice *inferiormente limitato* se esiste (almeno) un minorante per T. Un insieme non inferiormente limitato (cioè per il quale non esistano minoranti) si dice *inferiormente illimitato*.

Ci limitiamo a enunciare il classico risultato seguente.

Proposizione 2.1. Teorema di Bolzano-Weierstrass. Un insieme $T \subseteq \mathbf{R}$ limitato (cioè superiormente e inferiormente limitato) e infinito ha almeno un punto di accumulazione.

Esempio 2.3. L'insieme:

$$F = \left\{ x \in \mathbf{R}: x = \cdot \frac{(-1)^n}{n+1} \wedge n \in \mathbf{N} \right\} = \left\{ 1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots \right\}$$

è limitato (superiormente e inferiormente): infatti l'insieme dei maggioranti per F è $\{x \in \mathbf{R}: x \geq 1\} \neq \varnothing$ e l'insieme dei minoranti per F è $\left\{ x \in \mathbf{R}: x \leq -\frac{1}{2} \right\} \neq \varnothing$

L'insieme F è infinito (ha la potenza del numerabile). Il punto di ascissa $x = 0$ è per F un punto di accumulazione (lasciamo al lettore la verifica di ciò).

Il teorema di Bolzano-Weierstrass esprime una condizione *sufficiente* affinché un insieme ammetta (almeno) un punto di accumulazione; ma tale condizione *non è necessaria*. Dunque possono esistere insiemi che ammettono uno o più punti di accumulazione pur non rispettando le ipotesi del teorema di Bolzano-Weierstrass (lo stesso insieme **R** *non* rispetta le ipotesi del teorema di Bolzano-Weierstrass: *non* è superiormente né inferiormente limitato; eppure ammette infiniti punti di accumulazione: ogni $x \in \mathbf{R}$ è per **R** un punto di accumulazione).

Definizione 2.12. Se l'insieme non vuoto $T \subseteq \mathbf{R}$ è superiormente limitato, si dice *estremo superiore* di T il minimo dei maggioranti per T. Se $T \subseteq \mathbf{R}$ è superiormente illimitato, si dice che il suo estremo superiore è $+\infty$.

Se l'insieme non vuoto $T \subseteq \mathbf{R}$ è inferiormente limitato, si dice *estremo inferiore* di T il massimo dei minoranti per T. Se $T \subseteq \mathbf{R}$ è inferiormente illimitato, si dice che il suo estremo inferiore è $-\infty$.

Gli estremi superiore e inferiore per T si indicano rispettivamente con infT e supT. A differenza di quanto accade per il massimo e per il minimo, ogni insieme non vuoto $T \subseteq \mathbf{R}$ è dotato di estremi superiore e inferiore (e si dimostra che supT, maxT sono *unici*). Se $T \subseteq \mathbf{R}$ è dotato di massimo maxT, allora risulta: supT = maxT; se $T \subseteq \mathbf{R}$ è dotato di minimo minT, allora: infT = minT.

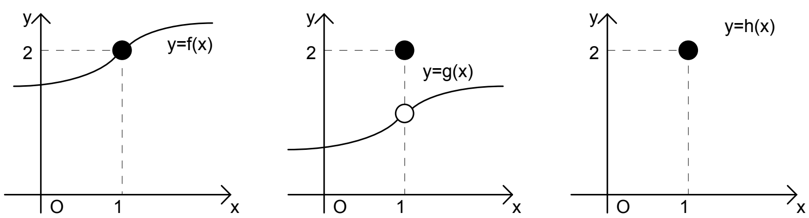
Esempio 2.4. Esaminiamo $H = \{x \in \mathbf{R}: 0<x\leq 1 \vee x\geq 2\}$. Si verifichi che:
Insieme dei minoranti per $H = \{x \in \mathbf{R}: x\leq 0\}$
Insieme dei maggioranti per $H = \varnothing$
Non esistono maxH e minH; risulta: $\sup H = +\infty$; $\inf H = 0$

Passiamo ora a considerare una funzione reale f di variabile reale x espressa da $y = f(x)$ e il punto di ascissa $x = c$ appartenente al dominio di essa. La valutazione diretta della f in corrispondenza all'ascissa $x = c$ descrive il comportamento della funzione data nel punto di ascissa $x = c$.

Il tradizionale metodo per valutare la funzione nel punto $x = c$ si condensa quindi nella frase: *"nella formula $y = f(x)$, sostituendo alla variabile x il valore $x = c$, otteniamo per la y il valore $f(c)$"* e ciò equivale ad affermare che: *"nel punto di ascissa $x = c$ la funzione f assume il valore $f(c)$"*.

Con un procedimento del genere otteniamo un'informazione riguardante *esclusivamente* il comportamento della funzione f nel singolo punto di ascissa $x = c$: e non sempre questa informazione è in grado di esaurire la conoscenza della funzione in una più ampia "zona" individuata dall'ascissa $x = c$.

Esempio 2.5. Consideriamo le tre funzioni di variabile reale i cui grafici cartesiani sono rappresentati nei diagrammi seguenti:



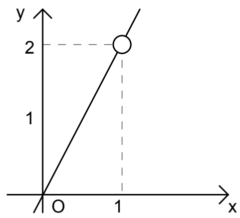
Di ciascuna funzione indichiamo il dominio: $D_f = \mathbf{R}$; $D_g = \mathbf{R}$; $D_h = \{1\}$. Esse, valutate (tradizionalmente) *nel punto* di ascissa $x = 1$, assumono lo stesso valore $y = 2$. Cioè: $f(1) = g(1) = h(1) = 2$

Si noti, tuttavia, che ben diverso è il comportamento di queste tre funzioni nelle "immediate vicinanze" del punto considerato. Infatti:
– la funzione f è definita, per $x \neq 1$, in modo che per disegnare il grafico nel punto di ascissa $x = 1$ non è necessario staccare la matita dal foglio;
– la funzione g è definita, per $x \neq 1$, in modo che per disegnare il grafico nel punto di ascissa $x = 1$ *è* necessario staccare la matita dal foglio;
– al dominio della funzione h appartiene *solo* il punto $x = 1$: la funzione h *non* è quindi definita per $x \neq 1$.

Il metodo tradizionale di valutazione di una funzione può non risolvere qualche problema particolare. Vediamo un caso di questo genere nel seguente esempio.

Esempio 2.6. Consideriamo la funzione di variabile reale espressa da:

$$y = \frac{2x^2 - 2x}{x-1} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = 2x \\ x \neq 1 \end{cases}$$



con dominio: D = $\mathbf{R}\backslash\{1\}$.

Non è semplice descrivere il comportamento di tale funzione nelle "immediate vicinanze" del punto di ascissa $x = 1$ utilizzando il tradizionale metodo di valutazione di una funzione (per sostituzione diretta di $x = 1$ nell'equazione): in questo caso, infatti, non è possibile assegnare direttamente alla variabile x il valore 1, in quanto tale valore è esplicitamente escluso dal dominio.

A parte tale situazione, però, la funzione data presenta un'evidente regolarità nelle "immediate vicinanze" del punto $x = 1$: quando x si trova nelle "immediate vicinanze" di $x = 1$ (*e ci disinteressiamo di quanto accade nel punto* $x = 1$), allora $y = f(x)$ si trova nelle "immediate vicinanze" di $y = 2$.

Situazioni come quella illustrata nell'esempio precedente indicano che è opportuno introdurre un nuovo metodo per descrivere il comportamento di una funzione nelle "immediate vicinanze" di un punto di ascissa $x = c$: il *limite*.

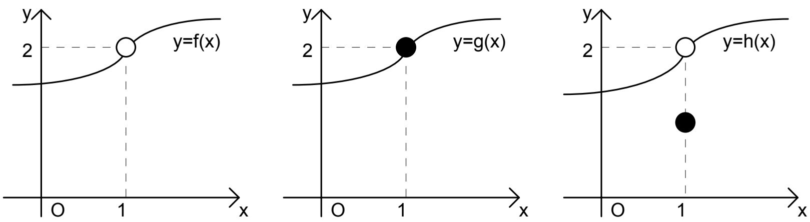
In termini intuitivi, potremmo dire che la funzione f ammette limite l per x tendente a c se tutte le x situate nelle "immediate vicinanze" di $x = c$ (a parte $x = c$ stesso, di cui ci disinteressiamo) hanno per corrispondenti delle y che si trovano nelle "immediate vicinanze" di $y = l$. Scriveremo allora:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l$$

Il precedente accenno non è una *definizione* del concetto di limite:lo stesso riferimento alle "immediate vicinanze" di un punto dovrà essere riformulato (con l'aiuto decisivo del concetto topologico di intorno). Ma già un'introduzione informale come questa ci consente di proporre alcune osservazioni.

Come abbiamo sopra notato, la valutazione di una funzione f nel punto di ascissa $x = c$ prescinde dal comportamento della funzione stessa nelle "immediate vicinanze" di tale punto; ebbene, analogamente, il limite della funzione f per x tendente a c (la valutazione della funzione data nelle "immediate vicinanze" del punto di ascissa $x = c$) prescinderà dal valore eventualmente assunto dalla funzione f nel punto considerato. Anzi, l'esistenza del limite della funzione f per x tendente a c non richiederà neppure l'esistenza di $f(c)$, cioè della funzione f nel punto $x = c$.

Esempio 2.7. Consideriamo le tre funzioni di variabile reale i cui grafici cartesiani sono rappresentati nei diagrammi seguenti:



con domini: $D_f = \mathbf{R}\backslash\{1\}$ $\quad D_g = \mathbf{R}$ $\quad D_h = \mathbf{R}$

È facile intuire che esse ammettono lo stesso limite per x tendente a 1:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} h(x) = 2$$

Infatti, il comportamento delle tre funzioni date nelle "immediate vicinanze" del punto di ascissa $x = 1$ (ad eccezione, eventualmente, del punto stesso, di cui però ci disinteressiamo) è identico. Eppure ben diversa è la situazione considerata *esattamente nel punto* di ascissa $x = 1$:

– la funzione f *non è definita* per $x = 1$;
– la funzione g è definita, per $x \neq 1$, in modo che per disegnare il grafico nel punto di ascissa $x = 1$ non è necessario staccare la matita dal foglio;
– la funzione h è definita, per $x \neq 1$, in modo che per disegnare il grafico nel punto di ascissa $x = 1$ *è* necessario staccare la matita dal foglio.

Ritorniamo a quanto sopra detto per presentare intuitivamente il limite: la funzione f ammette limite l per x tendente a c se tutte le x situate nelle "immediate vicinanze" di $x = c$ (a parte $x = c$ stesso, di cui ci disinteressiamo) hanno per corrispondenti delle ordinate y nelle "immediate vicinanze" di $y = l$.

Per precisare formalmente tale nozione ricorreremo al concetto topologico di intorno. Dobbiamo innanzitutto fissare arbitrariamente un intorno $J(l)$ del punto di ordinata $y = l$ (che esprima, cioè, le "immediate vicinanze" di $y = l$, sull'asse delle y). A questo punto, *qualsiasi* sia l'intorno $J(l)$, dobbiamo cercare un intorno $I(c)$ del punto di ascissa $x = c$ (che esprima, cioè, le "immediate vicinanze" di $x = c$, sull'asse delle x) tale che tutti i punti di $I(c)$ ad eccezione di $x = c$ (di cui ci disinteressiamo) abbiano corrispondenti ordinate in $J(l)$.

Accostiamo quindi la definizione intuitiva del limite di una funzione a una che formalizzi le "immediate vicinanze" di un punto attraverso l'intorno:

La funzione f espressa da $y = f(x)$ ammette
limite l per x tendente a c se:

[in linguaggio intuitivo]	**[in linguaggio matematico]**
	[fissato a piacere un intorno J(l) di $y = l$ si può determinare un intorno I(c) tale che]
tutte le x nelle "immediate vicinanze" di $x = c$	per ogni $x \in$ I(c),
(a parte $x = c$ stesso, di cui ci disinteressiamo)	tale che $x \neq c$,
hanno per corrispondenti delle y che si trovano nelle "immediate vicinanze" di $y = l$.	risulta: $f(x) \in$ J(l).

Riassumiamo ciò nella definizione di limite di una funzione:

Definizione 2.13. Sia f: $x \to f(x)$ una funzione definita in un intorno di $x = c$, ad eccezione eventualmente di $x = c$ stesso. Si dice che il limite di $f(x)$ per x tendente a c è $l \in \mathbf{R}$ e si scrive: $\lim_{x \to c} f(x) = l$ se, per ogni intorno di $y = l$, J(l), esiste un intorno di $x = c$, I(c), tale che per ogni x appartenente a I(c), con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a J(l).

La definizione fa riferimento a una funzione $x \to f(x)$ definita in un intorno di $x = c$, ad eccezione, eventualmente, di $x = c$ stesso. Prima di procedere, notiamo che è possibile estendere il concetto di limite anche a funzioni definite *non in tutti i punti* di un intorno di $x = c$ (ad eccezione di $x = c$ stesso). Il punto di ascissa $x = c$ *deve* essere un *punto di accumulazione* per il dominio D della funzione considerata e la definizione deve essere modificata nel modo seguente: si dice che il limite di $x \to f(x)$ per x tendente a c è $l \in \mathbf{R}$ e si scrive $\lim_{x \to c} f(x) = l$ se, per ogni intorno di $y = l$, J(l), esiste un intorno di $x = c$, I(c), tale che per ogni x appartenente a I(c)$\cap$D, con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a J(l).

In base alla fondamentale definizione di limite, sopra presentata, è possibile stabilire la verità o la falsità di una scrittura del tipo: $\lim_{x \to c} f(x) = l$

Lo schema di una tale verifica è il seguente:

- Indichiamo un intorno qualsiasi J(l) del punto di ordinata $y = l$; ad esempio: J(l) = $\{y \in \mathbf{R}: l-\varepsilon<y<l+\varepsilon\}$ con ε reale positivo *a piacere*.
- Ricaviamo per quali valori dell'incognita x le corrispondenti $y = f(x)$ appartengono a tale intorno: per fare ciò, sostituiamo l'espressione $f(x)$ alla y nella scrittura $l-\varepsilon<y<l+\varepsilon$ e risolviamo questo sistema di disequazioni nell'incognita x.

- Tra i risultati del sistema di disequazioni dobbiamo trovare un intorno di $x = c$ (al più con $x \neq c$); e ciò deve accadere per ogni intorno J(l) precedentemente fissato, cioè *per ogni* ε *positivo* (ε individua l'intorno J(l) scelto): solo allora possiamo affermare che il limite proposto è *verificato*. Se invece il sistema di disequazioni non individua, tra i propri risultati, un intorno di $x = c$ (al più con $x \neq c$), o lo individua soltanto per alcuni valori di ε, allora il limite proposto deve essere considerato *falso*.

Esempio 2.8. Stabiliamo la verità o la falsità di: $\lim_{x \to 1} (5x-3) = 2$

Considerato il reale positivo (a piacere) ε, un intorno di $y = 2$, sull'asse y, è costituito dai punti aventi ordinate tali che:

$$2-\varepsilon < y < 2+\varepsilon$$

Sostituendo in tale formula l'espressione della funzione $y = 5x-3$ abbiamo:

$$2-\varepsilon < 5x-3 < 2+\varepsilon$$

da cui, risolvendo il sistema di disequazioni in x: $1-\frac{\varepsilon}{5} < x < 1+\frac{\varepsilon}{5}$

Tali disequazioni individuano, come richiesto dalla definizione, un intorno di $x = 1$, e ciò accade per ogni $\varepsilon>0$: $1-\frac{\varepsilon}{5}$ *è minore di 1* (per $\varepsilon>0$) e $1+\frac{\varepsilon}{5}$ *è maggiore di 1* (per $\varepsilon>0$). Il limite proposto, pertanto, è verificato.

Sarebbe *errato* affermare la verità del limite proposto in base a una semplice sostituzione ($5\cdot1-3$ dà 2): ricordiamo ancora che la sostituzione diretta si occupa esclusivamente del valore assunto dalla funzione *nel* punto di ascissa $x = 1$, mentre con il limite indaghiamo sul comportamento della funzione *in un intorno di tale punto* (disinteressandoci di quanto accade nel punto stesso). Nonostante la coincidenza dei risultati numerici, il concetto espresso è diverso!

Esempio 2.9. Stabiliamo, in base alla definizione di limite, la verità o la falsità di: $\lim_{x \to 5} (2x+1) = 9$

Procediamo come sopra: considerato il reale positivo (a piacere) ε, un (qualsiasi) intorno di $y = 9$, sull'asse y, è costituito dai punti aventi ordinate tali che:

$$9-\varepsilon < y < 9+\varepsilon$$

Sostituendo in tale formula l'espressione $y = 2x+1$, abbiamo:

$$9-\varepsilon < 2x+1 < 9+\varepsilon$$

da cui: $4-\frac{\varepsilon}{2}<x<4+\frac{\varepsilon}{2}$. Dobbiamo ora domandarci: questo sistema di disequazioni individua un intorno del punto $x = 5$ *per ogni* ε *positivo*? La risposta è: *no*. Infatti, troviamo un tale intorno soltanto se ε>2 (e *non* se è: 0<ε<2).

Il problema, in generale, è dunque il seguente: nel corso della verifica di un limite, in effetti, è necessario far riferimento a un valore di ε. Giunti al termine, possiamo anche pervenire a un intorno di $x = c$ (eventualmente con $x \neq c$) *ma ciò può non bastare*: dobbiamo controllare che tutto ciò sia possibile *per ogni valore di* ε, senza alcuna condizione. E nel nostro caso, come abbiamo notato, le cose non stanno così. Pertanto, il limite proposto *non* è verificato.

Possiamo correggere il limite sopra proposto; infatti, in base alla definizione di limite, la verifica sopra effettuata prova la validità di:

$$\lim_{x\to 4}(2x+1)=9$$

essendo $4-\frac{\varepsilon}{2}<x<4+\frac{\varepsilon}{2}$ un intorno di $x = 4$ per *ogni* ε positivo.

Spesso, nella descrizione di una funzione, accade di utilizzare (intuitivamente) il concetto di infinito. Ad esempio, se esaminiamo la funzione espressa da:

$$f\colon y=\frac{1}{(x-1)^2}$$

il cui dominio è $D = \{x\in\mathbf{R}: x \neq 1\}$, notiamo che:

- se alla variabile x assegniamo valori assai "vicini" a $x = 1$, le corrispondenti ordinate risultano molto "grandi" in valore assoluto (e con segno positivo); ad esempio:

  $f(0.98) = 2500$ $\qquad$ $f(1.01) = 10000$

- se alla variabile x assegniamo valori molto "grandi" in valore assoluto (sia con segno positivo che negativo), le corrispondenti ordinate risultano molto "prossime" al valore $y = 0$; ad esempio:

  $f(150) = 0.000045...$ $\qquad$ $f(-95) = 0.000108...$

Come potremmo esprimere, con una terminologia matematica corretta, questi comportamenti della funzione assegnata?

Talvolta diciamo, sempre ricorrendo a un uso intuitivo dei termini, che: *"se x tende a 1, allora la funzione tende all'infinito (con valori positivi)"*. Inoltre: *"se x tende all'infinito (con valori sia positivi che negativi), allora la funzione tende a zero"*.

Ovviamente non è accettabile proporre simili affermazioni senza una loro precisazione. Immaginiamo ora di "aggiungere" alla retta reale due nuovi elementi, due nuovi "punti" con caratteristiche del tutto particolari:

$+\infty$ (*più infinito*) e $-\infty$ (*meno infinito*)

Si noti che $+\infty$ e $-\infty$ *non* appartengono a **R**: se volessimo indicare l'insieme ottenuto dall'unione di **R** e di $\{+\infty, -\infty\}$, dunque la retta reale così ampliata, dovremmo utilizzare un simbolo *diverso* da **R** (si usa spesso: $\widetilde{\mathrm{R}}$).

La posizione di $+\infty$ e di $-\infty$, rispetto agli altri punti della retta reale, è definita dalle considerazioni seguenti:

- $-\infty$ *precede* tutti i punti della retta reale;
- $+\infty$ *segue* tutti i punti della retta reale.

Dopo aver indicato ordinalmente la loro posizione rispetto agli altri punti della retta reale, definiremo i loro intorni. Con $\mathrm{I}(+\infty)$ e $\mathrm{I}(-\infty)$ indicheremo rispettivamente gli intorni di $+\infty$ e di $-\infty$; con M indicheremo un reale scelto a piacere; definiamo:

$$\mathrm{I}(+\infty) = \{x\in\mathbf{R}: x>\mathrm{M} \wedge \mathrm{M}\in\mathbf{R}\}$$
$$\mathrm{I}(-\infty) = \{x\in\mathbf{R}: x<\mathrm{M} \wedge \mathrm{M}\in\mathbf{R}\}$$

Ciò ci consente di estendere la definizione di limite anche ai nuovi "punti" $+\infty$ e $-\infty$. Negli esempi seguenti sono illustrate alcune verifiche di limite che coinvolgono $+\infty$ e $-\infty$.

Esempio 2.10. Stabiliamo la verità o la falsità di: $\lim\limits_{x\to-\infty}(2^x+1)=1$

Consideriamo il reale positivo ε e l'intorno, sull'asse delle y, costituito dai punti aventi ordinate tali che:

$$1-\varepsilon < y < 1+\varepsilon$$

Sostituendo l'espressione della funzione, otteniamo:

$$1-\varepsilon < 2^x+1 < 1+\varepsilon$$

e risolvendo il sistema di disequazioni perveniamo a:

$$x < \log_2\varepsilon$$

I punti aventi ascissa minore di $\log_2\varepsilon$ (essendo $\varepsilon>0$) costituiscono un intorno di $-\infty$: il limite proposto è verificato.

Talvolta, quando risulta: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$ si scrive: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ o addirittura: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = l$. Il simbolo ∞, senza segno, viene inoltre talvolta utilizzato quando si vuole far riferimento a uno dei due punti $+\infty$ o $-\infty$, senza specificare il segno + o − da attribuire a ∞ (magari riservandosi di precisare tale segno nella prosecuzione dell'esercizio). Queste semplificazioni di scrittura *non* potrebbero essere considerate del tutto rigorose: *non abbiamo definito* un "punto" ∞ senza segno. Pertanto è opportuno precisare, di volta in volta, il segno + o − da attribuire al simbolo ∞.

Proposizione 2.2. Teorema dell'unicità del limite. Sia data la funzione f definita in un intorno del punto $x = c$ (ad eccezione, eventualmente, di $x = c$ stesso) ed esista $\lim_{x\to c} f(x)$; allora tale limite è *unico*.

Dimostrazione. Proviamo quanto affermato per assurdo, riferendoci a un limite finito per x tendente a un punto finito (ma il teorema vale anche nel caso di limiti infiniti per x tendente all'infinito). Neghiamo cioè la tesi e supponiamo che esistano contemporaneamente $\lim_{x\to c} f(x) = a$ e $\lim_{x\to c} f(x) = b$, essendo $a \neq b$.

Riprendiamo la definizione di limite riferita al $\lim_{x\to c} f(x) = a$: per ogni intorno di $y = a$, $\mathrm{J}(a)$, deve esistere un intorno di $x = c$, $\mathrm{I}(c)$, tale che per ogni x appartenente a $\mathrm{I}(c)$, con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a $\mathrm{J}(a)$.

Contemporaneamente, la definizione riferita al $\lim_{x\to c} f(x) = b$ afferma che per ogni intorno di $y = b$, $\mathrm{J}'(b)$, deve esistere un intorno di $x = c$, $\mathrm{I}'(c)$, tale che per ogni x appartenente a $\mathrm{I}'(c)$, con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a $\mathrm{J}'(b)$.

Gli intorni $\mathrm{J}(a)$ e $\mathrm{J}'(b)$ sono qualsiasi: dovendo essere, per ipotesi, $a \neq b$, possiamo scegliere tali intorni in modo che essi risultino disgiunti, dunque che sia: $\mathrm{J}(a)\cap\mathrm{J}'(b) = \varnothing$.

Consideriamo ora l'intorno di $x = c$ dato da $\mathrm{I}(c)\cap\mathrm{I}'(c)$: per ogni x appartenente a $\mathrm{I}(c)\cap\mathrm{I}'(c)$, con x diverso da c stesso, $f(x)$ dovrebbe appartenere sia a $\mathrm{J}(a)$ che a $\mathrm{J}'(b)$: ma ciò è impossibile, in quanto abbiamo stabilito che $\mathrm{J}(a)\cap \mathrm{J}'(b) = \varnothing$. Quindi è assurdo che $a \neq b$ e resta così provato che *non possono esistere due diversi valori dello stesso limite*. ■

Proposizione 2.3. Teorema della permanenza del segno. Sia $\lim_{x\to c} f(x) = l \neq 0$. Esiste allora un intorno $\mathrm{I}(c)$ tale che, per ogni x appartenente a $\mathrm{I}(c)$, con x diverso da c stesso, $f(x)$ abbia lo stesso segno di l.

Dimostrazione. Ricordiamo la definizione di $\lim_{x\to c} f(x) = l$: scelto un qualsiasi intorno di $y = l$, $\mathrm{J}(l)$, deve esistere un intorno di $x = c$, $\mathrm{I}(c)$, tale che per ogni x appartenente a $\mathrm{I}(c)$, al più con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a $\mathrm{J}(l)$.

Scegliamo l'intorno $\mathrm{J}(l)$ in modo che, per ogni y a esso appartenente, il segno di y sia lo stesso di l; ad esempio, se $l>0$, consideriamo $\mathrm{J}(l) = \{y\in\mathbf{R}: a<y<b \wedge 0<a<l<b\}$. La stessa definizione di limite, allora, assicura la validità del teo-

rema: infatti, l'intorno I(c) previsto da tale definizione risulta essere proprio l'intorno sopra indicato dalla definizione di limite. ■

Proposizione 2.4. Teorema del confronto (dei "due carabinieri"). Siano f, g, h tre funzioni definite in un intorno I(c) del punto di ascissa $x = c$; sia inoltre: $f(x) \le g(x) \le h(x)$ per ogni x appartenente a I(c). Allora, se $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l$ risulta anche: $\lim_{x\to c} g(x) = l$.

Dimostrazione. Anche in questo caso, ricordiamo la definizione applicata ai limiti $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x) = l$: per ogni intorno di $y = l$, $J(l)$, deve esistere un intorno di $x = c$, $I(c)$, tale che per ogni x appartenente a I(c), con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a $J(l)$; inoltre, per ogni intorno di $y = l$ (e possiamo considerare lo stesso intorno $J(l)$ già precedentemente introdotto), deve esistere un intorno di $x = c$, $I'(c)$, tale che per ogni x appartenente a $I'(c)$, con x diverso da c stesso, $h(x)$ appartenga a $J(l)$.

Consideriamo ora l'intorno di $x = c$ costituito da $I(c) \cap I'(c)$; per ogni x appartenente a esso, con x diverso da c, risulta: $f(x) \in J(l) \ \wedge \ h(x) \in J(l)$

Per chiarezza, è utile indicare esplicitamente l'intorno di $y = l$ sopra considerato: $J(l) = \{y\in\mathbf{R}: a<y<b \wedge a<l<b\}$.

In base all'appartenenza di $f(x)$ e $g(x)$ a $J(l)$, quando x appartiene a $I(c) \cap I'(c)$, risulta: $a < f(x) \le h(x) < b$ e per l'ipotesi: $a < f(x) \le g(x) \le h(x) < b$

Possiamo dunque concludere che, fissato un intorno qualsiasi $J(l)$ di $y = l$, quando x appartiene a $I(c) \cap I'(c)$, intorno di $x = c$, con x diverso da c, risulta $g(x) \in J(l)$. Per la definizione, ciò significa che $\lim_{x\to c} g(x) = l$. ■

È facile rendersi conto del motivo della denominazione (inizialmente scherzosa, ma ormai divenuta usuale) di *teorema dei due carabinieri*: se visualizziamo $f(x)$ e $g(x)$ come due "carabinieri" che, in base alle disequazioni $f(x) \le g(x) \le h(x)$, stanno ai lati del "malfattore" $g(x)$, si nota che se i due "carabinieri" $f(x)$ e $h(x)$ si recano verso la "prigione" (il limite l), allora anche il "malfattore" $g(x)$ sarà costretto a entrare in tale "prigione"!

Numerose proposizioni riguardano i limiti di espressioni contenenti operazioni aritmetiche: enunceremo alcuni dei più importanti risultati lasciando le dimostrazioni al lettore (c può essere un reale, ma anche $+\infty$, $-\infty$, ∞).

Proposizione 2.5. Se le funzioni f e g hanno limiti entrambi finiti l_1 e l_2 per x che tende a c, cioè se:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to c} g(x) = l_2$$

con $l_1 \in \mathbf{R}$, $l_2 \in \mathbf{R}$, allora risulta: $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = l_1+l_2$.

Proposizione 2.6. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$, $l\in\mathbf{R}$, e $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = +\infty$.

Proposizione 2.7. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$, $l\in\mathbf{R}$, e $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = -\infty$.

Proposizione 2.8. Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = +\infty$, allora $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = +\infty$.

Proposizione 2.9. Se $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)] = -\infty$.

Proposizione 2.10. Se le funzioni f e g hanno limiti (entrambi finiti) l_1 e l_2 per x che tende a c, cioè se:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to c} g(x) = l_2$$

con $l_1\in\mathbf{R}$, $l_2\in\mathbf{R}$, allora: $\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = l_1\cdot l_2$.

Proposizione 2.11. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$, con $l\in\mathbf{R}$ e con $l \neq 0$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, allora $\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \infty$.

Proposizione 2.12. Se $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to c} g(x) = \infty$, allora $\lim_{x\to c} [f(x)\cdot g(x)] = \infty$.

Nelle due proposizioni precedenti manca il segno davanti al simbolo ∞. Sottolineiamo che i limiti dei prodotti di funzioni rispettano, anche in presenza di limiti infiniti, la cosiddetta "regola dei segni" (il prodotto di due fattori di segno concorde è positivo; il prodotto di due fattori di segno discorde è negativo): ad esempio, il limite per x tendente a c di due funzioni aventi limiti (sempre per x tendente a c) $+\infty$ e $-\infty$ risulterà $-\infty$. In generale risulta:

Proposizione 2.13. Se le funzioni f e g hanno limiti (entrambi finiti) l_1 e l_2 per x che tende a c, cioè se:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to c} g(x) = l_2$$

con $l_1\in\mathbf{R}$, $l_2\in\mathbf{R}$, e se $\lambda\in\mathbf{R}$, $\mu\in\mathbf{R}$, allora: $\lim_{x\to c} [\lambda\cdot f(x)+\mu\cdot g(x)] = \lambda\cdot l_1+\mu\cdot l_2$.

Proposizione 2.14. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$, essendo $l\in\mathbf{R}$, $l\neq 0$, allora: $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$.

Proposizione 2.15. Se le funzioni f e g hanno limiti (entrambi finiti) l_1 e l_2 per x che tende a c, e se $l_2 \neq 0$, cioè:

$$\lim_{x\to c} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to c} g(x) = l_2$$

con $l_1\in\mathbf{R}$, $l_2\in\mathbf{R}$, $l_2 \neq 0$, allora: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}$.

Proposizione 2.16. Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ oppure se $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$, allora $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = 0$.

Proposizione 2.17. Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$, allora $\lim_{x\to c}\frac{1}{f(x)} = \infty$.

In quest'ultima proposizione, il segno da anteporre a ∞ dipende dal segno assunto dalla funzione f in un intorno di $x = c$ (ad eccezione di $x = c$ stesso).

Proposizione 2.18. Se $\lim_{x\to c} f(x) = l$, con $l\in\mathbf{R}$, allora $\lim_{x\to c} |f(x)| = |l|$.

Le proposizioni sopra enunciate esprimono condizioni *sufficienti* per l'esistenza di un limite. Quando affermiamo, ad esempio, che se esistono finiti i limiti per $x\to c$ di entrambe le funzioni f e g, allora esiste finito anche il limite per $x\to c$ della funzione $f+g$, *non* intendiamo affermare che l'esistenza del $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)]$ richiede necessariamente che entrambi i $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$ esistano finiti! La condizione di esistenza così espressa, dunque, è *sufficiente ma non necessaria*.

A conferma di ciò, nell'esempio seguente sarà illustrata una situazione nella quale esiste (finito) il $\lim_{x\to c} [f(x)+g(x)]$, *senza* che esistano i $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$.

Esempio 2.11. Consideriamo le funzioni f e g espresse da:

$$f\colon y = x+\frac{|x|}{x} \qquad g\colon y = x-\frac{|x|}{x}$$

definite nei domini: $D_f = \mathbf{R}\setminus\{0\}$ e $D_g = \mathbf{R}\setminus\{0\}$. Si dimostra che *non* esistono:

$$\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{|x|}{x}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0}\left(x-\frac{|x|}{x}\right)$$

Consideriamo infine la funzione somma di f e g: f+g: $\begin{cases} y = 2x \\ x \neq 0 \end{cases}$ definita nel dominio: $D_{f+g} = \mathbf{R} \setminus \{0\}$. Il limite per $x \to 0$ della funzione f+g, somma delle funzioni sopra esaminate, esiste, e risulta: $\lim_{x \to c} (f+g) = 0$ (la semplicissima verifica è lasciata al lettore). Dunque nel caso proposto, esiste il $\lim_{x \to c} [f(x)+g(x)]$ *senza* che esistano i limiti: $\lim_{x \to c} f(x)$, $\lim_{x \to c} g(x)$.

Proposizione 2.19. Se $\lim_{x \to c} f(x) = l$, con $l \in \mathbf{R}$, e se $b \in \mathbf{R}$, $b>0$, allora

$$\lim_{x \to c} b^{f(x)} = b^l$$

Proposizione 2.20. Se $\lim_{x \to c} f(x) = l$, con $l \in \mathbf{R}$, $l>0$, e se $b \in \mathbf{R}$, $b>0$, $b \neq 1$, allora $\lim_{x \to c} \log_b f(x) = \log_b l$

Proposizione 2.21. Se $\lim_{x \to c} f(x) = l_1$, con $l_1 \in \mathbf{R}$, $l_1>0$, e se $\lim_{x \to c} f(x) = l_2$, con $l_2 \in \mathbf{R}$, allora $\lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)} = (l_1)^{l_2}$

Si noti, inoltre, che è possibile ricondursi direttamente ad alcuni casi sopra trattati mediante la formula:

$$\lim_{x \to c} [f(x)]^{g(x)} = \lim_{x \to c} e^{g(x) \log_e f(x)}$$

I precedenti teoremi rendono possibile la determinazione di molti limiti di somme algebriche di funzioni, di prodotti di funzioni, di quozienti di funzioni, di esponenziali di funzioni (partendo, rispettivamente, dai limiti delle funzioni addendi, fattori, dividendo, divisore, base, esponente): ma *non tutti* i limiti che coinvolgono operazioni di funzioni sono trattati in tali teoremi. Per alcuni limiti non esistono "regole fisse". Ad esempio, se:

$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to c} g(x) = -\infty$$

non esiste alcun criterio per stabilire, "a priori" il valore di:

$$\lim_{x \to c} [f(x) + g(x)]$$

Limiti come questo vengono detti *in "forma indeterminata"*.

Un limite si trova in "forma indeterminata", dunque, quando non è stato enunciato alcun teorema per determinarne il valore; ciò, naturalmente, *non significa che tale limite non esiste*, ma soltanto che la sua determinazione non è immediata, che richiede informazioni più dettagliate sulle funzioni coinvolte.

Esempio 2.12. Consideriamo i due limiti: $\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x)$ e $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-x^4)$

Entrambi si trovano in "forma indeterminata". Infatti, per quanto riguarda il primo limite, è immediato intuire che: $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}(-4x) = -\infty$ e l'assenza di regole fornite dai teoremi precedentemente enunciati ci porta ad affermare che $\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x)$ è in "forma indeterminata". Per quanto riguarda il secondo limite: $\lim_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}(-x^4) = -\infty$ e anche $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-x^4)$, per analoga ragione, verrebbe a trovarsi in "forma indeterminata". Ma è:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x) = \lim_{x\to+\infty}[x\cdot(x-4)]$$

Possiamo intuire che $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}(x-4) = +\infty$ e si conclude che:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^2-4x) = +\infty$$

Nel caso del secondo limite: $\lim_{x\to+\infty}(2x^2-x^4) = \lim_{x\to+\infty}[x^2\cdot(2-x^2)] = -\infty$

Dunque affermare che un limite si trova in forma indeterminata non equivale a proclamarne la non esistenza: potremmo dire che un limite in forma indeterminata è scritto in modo "non conveniente". È stato infatti sufficiente riscrivere i limiti consideratiper ottenerne la determinazione.

È evidente l'importanza dei limiti che si trovano in forma indeterminata: il loro calcolo richiede qualche opportuna modifica, come le trasformazioni preliminari illustrate nell'esempio. Non sarà sempre facile individuare la più conveniente modifica da apportare alla scrittura di un limite in forma indeterminata al fine di ottenere la sua determinazione: proprio da ciò derivano le difficoltà di calcolo spesso connesse a questi limiti.

Come si nota esaminando i teoremi sopra enunciati, i sette tipi di forme indeterminate finora incontrati sono (con scritture convenzionali):

$$[+\infty-\infty] \qquad [0\cdot\infty] \qquad \left[\frac{0}{0}\right] \qquad \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \qquad [0^0] \qquad [\infty^0] \qquad [1^\infty]$$

Consideriamo ora un'altra questione che si rivelerà praticamente utile. Per ottenere una descrizione del comportamento di una funzione nelle immediate "vicinanze" di $x = c$, nei casi in cui x viene a trovarsi "immediatamente a destra" oppure "immediatamente a sinistra" rispetto a $x = c$, dobbiamo innanzitutto introdurre una definizione delle "zone" poste "immediatamente a destra" oppure "immediatamente a sinistra" di $x = c$.

Definizione 2.14. Si dice *intorno destro* del punto $x = c$ ogni insieme del tipo:

$$\{x\in\mathbf{R}: c \le x < b\} \qquad \text{o del tipo:} \qquad \{x\in\mathbf{R}: c < x < b\}$$

(a seconda che si voglia comprendere o escludere il punto $x = c$).
Analogamente, si dice *intorno sinistro* del punto $x = c$ ogni insieme del tipo:

$$\{x\in\mathbf{R}: a < x \leq c\} \qquad \text{o del tipo:} \qquad \{x\in\mathbf{R}: a < x < c\}$$

(a seconda che si voglia comprendere o escludere il punto $x = c$).

Definizione 2.15. Sia f: $x\to f(x)$ una funzione definita in un intorno destro di $x = c$, ad eccezione, eventualmente, di $x = c$ stesso. Si dice che il *limite destro* di f per x tendente a c è $l\in\mathbf{R}$ e si scrive:

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = l$$

se, per ogni intorno di $y=l$, J(l), esiste un intorno *destro* di $x = c$, I(c), tale che per ogni x appartenente a I(c), con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a J(l).
Analogamente, sia f: $x\to f(x)$ una funzione definita in un intorno sinistro di $x = c$, ad eccezione, eventualmente, di $x = c$ stesso. Si dice che il *limite sinistro* di f per x tendente a c è $l\in\mathbf{R}$ e si scrive:

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = l$$

se, per ogni intorno di $y = l$, J(l), esiste un intorno sinistro di $x = c$, I(c), tale che per ogni x appartenente a I(c), con x diverso da c stesso, $f(x)$ appartenga a J(l).

I concetti di limite destro e di limite sinistro di una funzione f vanno tenuti ben distinti dal concetto di limite di f; il confronto delle definizioni rende possibile identificare il verificarsi del limite $\lim\limits_{x\to c} f(x) = l$ con il *contemporaneo* verificarsi dei due limiti, destro e sinistro, *uguali* $\lim\limits_{x\to c^+} f(x) = l$ e $\lim\limits_{x\to c^-} f(x) = l$.

Concludiamo la presente sezione enunciando i risultati seguenti:

Proposizione 2.22. Se x è misurato in radianti: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Proposizione 2.23. Risulta: $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$

Dove $e = 2{,}718281\ldots$ è il reale irrazionale denominato *numero di Nepero*.

2.2. FUNZIONI CONTINUE

La *continuità* di una funzione f è una caratteristica della quale la funzione può godere in un punto del proprio dominio, $x = c$. Questa prima annotazione consente già di precisare un'osservazione fondamentale: *affinché una funzione possa dirsi continua nel punto $x = c$ è necessario che tale punto appartenga al dominio della funzione considerata*.

Intuitivamente, una funzione f, definita in un intorno del punto $x = c$, si dice continua se il grafico di f può essere tracciato, in corrispondenza di $x = c$ *senza staccare la matita dal foglio di carta*.

Per attribuire l'indispensabile correttezza formale alla prima idea di continuità sopra espressa, approfondiamo dunque il significato matematico della frase: "senza staccare la matita dal foglio di carta". Se desideriamo tracciare il grafico di una funzione f, definita in un intorno del punto $x = c$ (appartenente al dominio di f), "senza staccare la matita dal foglio di carta", dobbiamo richiedere che siano *coincidenti* il valore a cui tende $f(x)$ "nelle immediate vicinanze" di $x = c$ (a destra e a sinistra di $x = c$) e il valore $f(c)$. Solo così, infatti, è possibile tracciare il grafico cartesiano di f, in corrispondenza di $x = c$, "senza staccare la matita dal foglio di carta",

In altri termini: affinché la funzione f, definita in un intorno del punto $x = c$ (appartenente al dominio di f), possa dirsi continua in $x = c$, bisogna che tutte le x situate nelle immediate "vicinanze" di $x = c$ abbiano per corrispondenti delle ordinate y che si trovano nelle immediate "vicinanze" di $y = f(c)$.

Per precisare matematicamente tale concetto, dobbiamo innanzitutto fissare *arbitrariamente* un intorno $\mathrm{J}[f(c)]$ del punto di ordinata $y = f(c)$ (che esprima, cioè, le immediate "vicinanze" di $y = f(c)$, sull'asse delle y). A questo punto, *qualsiasi* sia l'intorno $\mathrm{J}[f(c)]$, dobbiamo cercare un intorno $\mathrm{I}(c)$ del punto di ascissa $x = c$ (che esprima, cioè, le immediate "vicinanze" di $x = c$, sull'asse delle x) tale che tutti i punti di $\mathrm{I}(c)$ abbiano corrispondenti ordinate in $\mathrm{J}[f(c)]$.

Definizione 2.16. Sia f: $x \to f(x)$ una funzione definita in un intorno di $x = c$, essendo $x = c$ un punto del dominio di f. Si dice che la funzione f è *continua* nel punto $x = c$ se, per ogni intorno di $y = f(c)$, $\mathrm{J}[f(c)]$, esiste un intorno di $x = c$, $\mathrm{I}(c)$, tale che per ogni x appartenente a $\mathrm{I}(c)$, $f(x)$ appartenga a $\mathrm{J}[f(c)]$.

Dal confronto delle definizioni di limite e di funzione continua, deriva immediatamente il risultato seguente.

Proposizione 2.24. Sia f: $x \to f(x)$ una funzione definita in un intorno di $x = c$, essendo $x = c$ un punto del dominio di f. Allora la funzione f è continua nel punto $x = c$ se e solo se: $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Esempio 2.13. Consideriamo le funzioni f_1 e f_2, espresse da:

$$f_1\colon \begin{cases} y = 2 - x \\ x \neq 1 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 3 \\ x = 1 \end{cases} \qquad\qquad f_2\colon y = 2 - x$$

La funzione f_1 non è continua in $x = 1$, in quanto: $\lim_{x\to 1} f_1(x) = 1 \neq 3 = f_1(1)$

La funzione f_2 è continua in $x = 1$, in quanto: $\lim_{x\to 1} f_2(x) = 1 = f_2(1)$

Tutto ciò riguarda la continuità di una funzione definita in un intorno di $x = c$, essendo $x = c$ un punto del dominio di f; esse, pertanto, si occupano della continuità in un *punto di accumulazione* del dominio della funzione f e non affermano alcunché nel caso in cui il punto $x = c$ sia un *punto isolato* del dominio di tale funzione. La definizione seguente estende il concetto di continuità anche a punti isolati del dominio della funzione considerata.

Definizione 2.17. Sia $x = c$ un punto *isolato* del dominio di f: $x\to f(x)$; allora la funzione f si dice *continua* nel punto $x = c$.

Questa definizione è in realtà una dimostrabile conseguenza di una più generale impostazione dei concetti di limite e di continuità che non approfondiamo.

Definizione 2.18. Una funzione f si dice *continua nel proprio dominio* D se essa è continua per ogni $x\in$D.

Enunciamo le proposizioni seguenti sulla continuità di importanti funzioni.

Proposizione 2.25. La funzione *costante* $x\to k$, con $k\in\mathbf{R}$, è continua in **R**.

Proposizione 2.26. La funzione *identità* $x\to x$, è continua in **R**.

Proposizione 2.27. La funzione $x\to a^x$, con a reale positivo, è continua in **R**.

Proposizione 2.28. La funzione $x\to \operatorname{sen}x$ è continua in **R**.

Proposizione 2.29. La funzione $x\to \cos x$ è continua in **R**.

Proposizione 2.30. Se f e g sono due funzioni entrambe continue in $x = c$, allora anche la loro funzione somma $f+g$ è continua in $x = c$.

Proposizione 2.31. Se f e g sono due funzioni entrambe continue in $x = c$, allora anche la loro funzione prodotto $f\cdot g$ è continua in $x = c$.

Proposizione 2.32. Se f e g sono due funzioni entrambe continue in $x = c$ e se è $g(c) \neq 0$, allora anche la loro funzione quoziente f/g è continua in $x = c$.

Esempio 2.14. La funzione: $x\to\dfrac{\operatorname{sen}x + \cos x}{2\operatorname{sen}x + 7}$ è continua in tutto **R**. Infatti, essa è costituita dalla somma delle due funzioni $x\to\operatorname{sen}x$ e $x\to\cos x$, entrambe continue in tutto **R**, divisa per la funzione $x\to 2\operatorname{sen}x+7$, che non si annulla per alcuna x reale (sen$x$ non può valere $-7/2$) ed è data dal prodotto di $x\to 2$ per $x\to$ sen$x$, entrambe continue in tutto **R**, sommato alla funzione costante $x\to 7$, anch'essa continua in tutto **R**.

Proposizione 2.33. Ogni funzione espressa da un *polinomio* in x è continua in **R**. Ogni funzione espressa da una *frazione algebrica* in x è continua per tutte le x reali che non annullano il polinomio al denominatore.

Proposizione 2.34. La funzione $x\to$tg$x$ è continua nel proprio dominio, dunque in $\{x\in\mathbf{R}\colon x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \wedge k\in\mathbf{Z}\}$. La funzione $x\to$cotg$x$ è continua nel proprio dominio, dunque in $\{x\in\mathbf{R}\colon x \neq k\pi \wedge k\in\mathbf{Z}\}$. La funzione $x\to$sec$x$ è continua nel proprio dominio, dunque in $\{x\in\mathbf{R}\colon x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \wedge k\in\mathbf{Z}\}$. La funzione $x\to$cosec$x$ è continua nel proprio dominio, dunque in $\{x\in\mathbf{R}\colon x \neq k\pi \wedge k\in\mathbf{Z}\}$.

Proposizione 2.35. Se f e g sono due funzioni entrambe continue in $x = c$ e se è $f(c)>0$, allora anche la funzione f^g è continua in $x = c$.

Proposizione 2.36. Siano f e g due funzioni definite in un intorno di $x = c$ e siano entrambe continue in $x = c$; la funzione composta $f\bullet g$ sia definita in un intorno di $x = c$. Allora $f\bullet g$ è continua in $x = c$.

Proposizione 2.37. La funzione $x\to\log_a x$, essendo a un reale positivo, $a \neq 1$, è continua in **R**.

Enunciamo alcuni importanti risultati collegati al concetto di continuità.

Proposizione 2.38. Teorema di Weierstrass. Sia f una funzione a valori reali definita in un insieme chiuso e limitato $D\subseteq\mathbf{R}$ e sia f continua in D; allora f assume, in D, massimo e minimo.

Le condizioni indicate da tale teorema sono *sufficienti e non necessarie* affinché la funzione sia dotata di massimo e di minimo. Un altro teorema basato sul concetto di continuità è il seguente, detto *teorema dei valori intermedi*.

Proposizione 2.39. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo chiuso e limitato $D = \{x\in\mathbf{R}\colon a\leq x\leq b\}$ e continua in D; allora f assume, in D, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

Si noti che, mentre l'enunciato del teorema di Weierstrass fa riferimento a un *insieme chiuso e limitato*, l'enunciato del teorema dei valori intermedi fa invece esplicito riferimento a un *intervallo chiuso e limitato*. Una conseguenza della proposizione precedente è denominata *teorema dell'esistenza degli zeri*.

Proposizione 2.40. Sia f una funzione a valori reali definita in un intervallo chiuso e limitato D = $\{x \in \mathbf{R}: a \le x \le b\}$, continua in D; gli estremi di D siano tali che $f(a) \cdot f(b) < 0$; allora esiste (almeno) un $x = c$, $a < c < b$, tale che $f(c) = 0$.

Il teorema fornisce una condizione *sufficiente* (*non necessaria*) per l'esistenza di soluzioni di un'equazione $f(x) = 0$ in $x \in \mathbf{R}$: se $x \to f(x)$ è continua in un intervallo chiuso e limitato $\{x \in \mathbf{R}: a \le x \le b\}$, tale che $f(a)$, $f(b)$ siano di segno opposto (equivale all'ipotesi $f(a) \cdot f(b) < 0$), allora l'equazione ha almeno una soluzione.

Esempio 2.15. Dimostriamo che ha almeno una soluzione l'equazione in $x \in \mathbf{R}$:

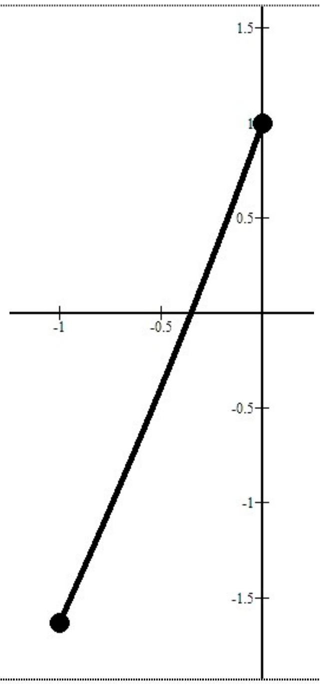
$$2x + e^x = 0$$

La funzione: f: $x \to 2x + e^x$ è continua in tutto il proprio dominio **R**. Inoltre:

$$f(-1) \cdot f(0) = (-2 + e^{-1}) \cdot 1 < 0$$

in quanto: $e > 1/2$. Possiamo concludere, per il teorema dell'esistenza degli zeri, che esiste (almeno) un reale $x = c$ tale che $f(c) = 0$; allora, l'equazione ammette (almeno) la soluzione $x = c$.

Possiamo visualizzare la situazione nella figura a lato: la funzione $x \to 2x + e^x$ è continua in tutto il proprio dominio e assume valori di segno opposto in $x = -1$ e in $x = 0$. Ciò significa che interseca l'asse delle x in un punto $x = c$, con $-1 < c < 0$.



Affermare che una funzione f è continua in $x = c$ (punto di accumulazione del dominio) se e solo se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ rende possibile il calcolo del limite per x tendente a c di una funzione f continua in $x = c$.

Esempio 2.16. Calcoliamo il limite: $\lim_{x \to 0} \dfrac{x \cdot e^x}{x^2 + senx + 1}$

Esaminiamo innanzitutto la funzione proposta: $x \to \dfrac{x \cdot e^x}{x^2 + \operatorname{sen} x + 1}$ quoziente delle funzioni (entrambe continue in **R**, al lettore la verifica):

$x \to x \cdot e^x$ (numeratore) e $x \to x^2 + \operatorname{sen} x + 1$ (denominatore)

Risulta: $\lim_{x \to 0} x \cdot e^x = 0 \cdot 1 = 0$ (numeratore)

$\lim_{x \to 0} (x^2 + \operatorname{sen} x + 1) = 0^2 + 0 + 1 = 1$ (denominatore) e possiamo affermare che: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot e^x}{x^2+\operatorname{sen}x+1}=0$

Il procedimento per il calcolo di limiti ora illustrato si basa sui teoremi enunciati in precedenza. Essi, però, non possono essere applicati a *tutte* le situazioni, in quanto non esauriscono tutte le combinazioni di risultati possibili nelle operazioni con i limiti: quando un limite si presenta in alcune forme particolari, le *forme indeterminate*, i citati teoremi *non* sono sufficienti a indicare se il limite in questione esiste né quanto esso vale. Ci occuperemo ora dei limiti in forma indeterminata fornendo alcuni suggerimenti per il calcolo di essi.

Limiti in forma indeterminata del tipo $[+\infty-\infty]$

Un primo elementare procedimento consiste nel *raccoglimento di x* elevata a un'opportuna potenza. Per quanto riguarda altri metodi, si esaminino attentamente gli esempi seguenti.

Esempio 2.17. Calcoliamo il limite: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)$ che si presenta in forma indeterminata del tipo $[+\infty-\infty]$. Si opera con un procedimento analogo a quello di *razionalizzazione*, ottenendo:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)-(x-1)}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}}=0$$

Esempio 2.18. Calcoliamo il limite: $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{1}{x^2-16}-\dfrac{2}{x^3-64}\right)$ che si presenta in forma indeterminata del tipo $[+\infty-\infty]$. Notiamo che:

$\lim\limits_{x\to 4^+}\left(\dfrac{1}{x^2-16}-\dfrac{2}{x^3-64}\right)$ si presenta nella forma $[+\infty-\infty]$;

$\lim\limits_{x\to 4^-}\left(\dfrac{1}{x^2-16}-\dfrac{2}{x^3-64}\right)$ si presenta nella forma $[-\infty+\infty]$.

Dopo avere scomposto in fattori i denominatori:

$$\lim_{x\to 4}\left[\frac{1}{(x+4)(x-4)}-\frac{2}{(x-4)(x^2+4x+16)}\right]$$

riscriviamo tale limite: $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+4x+16-2(x+4)}{(x+4)(x-4)(x^2+4x+16)}$ da cui:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x+8}{(x+4)(x-4)(x^2+4x+16)}=\infty$$

Il lettore è invitato a osservare che:

$$\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{x^2-16}-\frac{2}{x^3-64}\right)=+\infty \qquad \lim_{x\to 4^-}\left(\frac{1}{x^2-16}-\frac{2}{x^3-64}\right)=-\infty$$

(Per rendersi conto di ciò si noti che in un intorno destro di $x = 4$ la funzione in esame è positiva, mentre in un intorno sinistro di $x = 4$ è negativa).

Limiti in forma indeterminata del tipo $[0\cdot\infty]$

Esempio 2.19. Calcoliamo il limite: $\lim_{x\to\infty}\left(x\cdot sen\frac{1}{x}\right)$ che si presenta in forma indeterminata del tipo $[0\cdot\infty]$. Operando con un limite per *x tendente* a 0 non è restrittivo considerare $x \neq 0$; possiamo dunque riscrivere il limite nella forma:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{sen\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

e procediamo a un *cambiamento di variabile*; poniamo: $\frac{1}{x}=z$. Notiamo ora che se la vecchia variabile x tende a ∞, allora la nuova variabile $z=\frac{1}{x}$ tende a 0. Possiamo dunque concludere:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\operatorname{sen} z}{z}=1$$

in base al limite fondamentale.

Esempio 2.20. Calcoliamo il limite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[(1-\operatorname{sen}x)\cdot\sec x]$ che si presenta in forma indeterminata del tipo $[0\cdot\infty]$. Riscriviamo il limite assegnato:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\operatorname{sen}x}{\cos x}$$

e, moltiplicando il numeratore e il denominatore per $(1+\operatorname{sen}x)$, otteniamo:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\operatorname{sen}x)(1+\operatorname{sen}x)}{\cos x(1+\operatorname{sen}x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\operatorname{sen}x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}x}=\frac{0}{2}=0$$

Limiti in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

Esempio 2.21. Calcoliamo il limite: $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x + 2}$ che si trova in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Scomponiamo numeratore e denominatore:

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x-4)}{(x-1)(x-2)}$$

e dividiamo numeratore e denominatore per (x–1). Questa operazione è pienamente lecita, in quanto presuppone la condizione $x \neq 1$, ma tale condizione *non* influenza il calcolo di un limite per x tendente a 1. Otteniamo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-4}{x-2} = 3$$

Esempio 2.22. Calcoliamo il limite $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{\operatorname{sen}(bx)}$ (a, b reali, $b \neq 0$) in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Dividiamo numeratore e denominatore per x:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{x}}{\frac{\operatorname{sen}(bx)}{x}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} \cdot a}{\frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx} \cdot b}$$

Se $x\to 0$: $\lim_{ax\to 0} \frac{sen(ax)}{ax} = 1$ e $\lim_{bx\to 0} \frac{sen(bx)}{bx} = 1$ (si cambi variabile: nel primo limite, la “nuova” variabile sarà ax, nel secondo, bx). Dunque:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} \cdot a}{\frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx} \cdot b} = \frac{1 \cdot a}{1 \cdot b} = \frac{a}{b}$$

Esempio 2.23. Calcoliamo il limite: $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$ che si presenta in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Moltiplichiamo il numeratore e il denominatore per (1+cos$x$) e, ricordando nuovamente che $\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = 1$, si ha:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{senx}{x} \cdot \frac{senx}{x} \cdot \frac{1}{1+\cos x}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Limiti in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Esempio 2.24. Calcoliamomo il limite della frazione algebrica:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

che si presenta in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Raccogliamo a fattor comune, al numeratore e al denominatore, le massime potenze della x (x^n e x^m):

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n \cdot \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right)}{x^m \cdot \left(b_m + \frac{b_{m-1}}{x} + \ldots + \frac{b_1}{x^{m-1}} + \frac{b_0}{x^m}\right)}$$

Ricordando che $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^a} = 0$ per ogni a positivo rimane: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_m} \cdot x^{n-m}\right)$

A questo punto, si possono presentare tre casi:

- se $n>m$: il limite vale ∞;
- se $n = m$: il limite vale $\frac{a_n}{b_m}$;
- se $n<m$: il limite vale 0.

Limiti in forma indeterminata del tipo $\left[1^\infty\right]$.

Per il calcolo di limiti nelle forme indeterminate del tipo $\left[1^\infty\right]$, si utilizza spesso il limite fondamentale: $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Esempio 2.25. Calcoliamo il limite: $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ che si presenta in forma indeterminata del tipo $\left[1^\infty\right]$. Scritto il limite:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}\cdot a}$$

ed eseguito il cambio di variabile: $\frac{x}{a} = z$, si conclude:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = \left[\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z\right]^a = e^a$$

Esempio 2.26. Calcoliamo il limite: $\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}$ (con a>0, $a \neq 1$) che si presenta in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Possiamo scrivere:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a e$$

In particolare, se $a = e$ risulta: $\lim_{x\to 0}\frac{\log_e(1+x)}{x} = 1$

Esempio 2.27. Calcoliamo il limite: $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ che si presenta in forma indeterminata del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$. Eseguiamo un cambiamento di variabile, ponendo:

$$a^x - 1 = z \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a(1+z)$$

Ricordando l'esempio precedente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\log_a(1+z)} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a$$

In particolare, se $a = e$, risulta: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$