Capitolo 1

La matematica del discreto

1.1. SUCCESSIONI NUMERICHE

Spesso, anche nella pratica quotidiana, abbiamo a che fare con "file" di oggetti o di numeri. Una "fila" è un insieme di elementi, uno dei quali è considerato primo elemento; inoltre, ogni elemento, a partire dal primo, è dotato di uno e un solo successivo. Un insieme dotato di tali caratteristiche è l'insieme **N** dei numeri naturali: possiamo dunque definire una "fila" di elementi di I attraverso una funzione f: $\mathbf{N}\rightarrow\mathrm{I}$, che "trasferisca" le caratteristiche di **N** agli elementi considerati tratti da I. Al posto di "fila", useremo la denominazione di *successione*; gli elementi coinvolti vengono detti *termini*.

Definizione 1.1. Si dice *successione* con termini in I una funzione a valori in I avente per dominio l'insieme **N**.

Esempio 1.1. La successione di naturali: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, … è individuata dalla funzione f: $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$ definita da f: $n\rightarrow 2^n$.

Per assegnare una successione numerica si può ricorrere a scritture come 1, 2, 4, 8, … Tale espressione fornisce solo il valore dei primi termini; abitualmente, siamo indotti ad accettare il protrarsi della "regolarità" che ha caratterizzato il gruppo di termini indicato (qui ogni termine dopo il primo è il doppio del precedente), ma nulla ci assicura che ciò accada. Non è pertanto corretto indicare una successione elencandone i primi termini seguiti dai "puntini". Assai più preciso è esprimere la funzione f: $\mathbf{N}\rightarrow\mathrm{I}$ che definisce la successione:

$$f: n\rightarrow 2^n$$

Frequentemente viene indicato il termine generale della successione nella forma: $a_n = f(n)$. Nel caso ora esaminato: $a_n = 2^n$.

È possibile individuare una successione anche attraverso un altro procedimento. Esso consiste nell'abbinamento di due formule:

- una formula assegna il primo termine (a_0) della successione;
- un'altra seconda formula esprime una legge che, sulla base di un termine qualsiasi (a_n), rende possibile il calcolo del successivo (a_{n+1}).

Dunque il primo termine deve essere assegnato esplicitamente; il secondo termine può essere calcolato grazie al primo; il terzo termine può essere calcolato grazie al secondo (appena calcolato); e ciò porta al calcolo di qualsiasi termine. Il procedimento prende il nome di *assegnazione ricorsiva*.

La successione nell'esempio 1.1 è, ricorsivamente: $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 2a_n \end{cases}$

L'assegnazione ricorsiva di una successione è concettualmente importante, giacché sfrutta le fondamentali caratteristiche di ogni successione: la presenza di un *primo termine* e il fatto che ogni termine è dotato di un *successivo*.

Definizione 1.2. Si dice *progressione aritmetica* con termine iniziale $a \in \mathbf{R}$ e ragione $h \in \mathbf{R}$ la successione a valori reali con termine generale: $a_n = a + nh$

Essa è definita ricorsivamente da: $\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n + h \end{cases}$

Una progressione aritmetica con termine iniziale $a \in \mathbf{R}$ e ragione $h \in \mathbf{R}$ è visualizzata dalla successione: a, $a+h$, $a+2h$, $a+3h$, … Si nota che *la differenza tra ciascun termine (ad eccezione del primo) e il precedente è costante*.

Esempio 1.2. La progressione aritmetica con termine iniziale $a = -4$ e ragione $h = 3$ è visualizzata dalla successione di termini:

$-4,\ -1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17,\ 20,\ \dots$

Definizione 1.3. Si dice *progressione geometrica* con termine iniziale $b \in \mathbf{R}$ e ragione $k \in \mathbf{R}$ la successione a valori reali con termine generale: $b_n = b \cdot k^n$

Essa è definita ricorsivamente da: $\begin{cases} b_0 = b \\ b_{n+1} = b_n \cdot k \end{cases}$

Una progressione geometrica con termine iniziale $b \in \mathbf{R}$ e ragione $k \in \mathbf{R}$ è visualizzata dalla successione b, $b \cdot k$, $b \cdot k^2$, $b \cdot k^3$, $b \cdot k^4$, $b \cdot k^5$, … Si nota che *il rapporto tra ciascun termine (ad eccezione del primo) e il precedente è costante*.

Esempio 1.3. La progressione geometrica con termine iniziale $b = 2$ e ragione $k = 3$ è visualizzata dalla successione di termini:

$2,\ 6,\ 18,\ 54,\ 162,\ 486,\ 1458,\ 4374,\ \dots$

Definizione 1.4. Si dice *successione fattoriale* la successione a valori naturali tale che: $c_0 = c_1 = 1$ e con termine generale, per $n \geq 2$:

$$c_n = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Essa è definita ricorsivamente da: $\begin{cases} c_0 = c_1 = 1 \\ c_{n+1} = c_n \cdot (n+1) \end{cases}$

La successione fattoriale si indica generalmente con: $n \to n!$

Esempio 1.4. I valori della successione fattoriale $n \to n!$ sono così tabulati:

$0! = 1$	$1! = 1$	$2! = 2$	$3! = 6$	$4! = 24$
$5! = 120$	$6! = 720$	$7! = 5040$	$8! = 40320$	...

Il calcolo di $n!$ porta a considerare numeri "grandi": una comune calcolatrice tascabile (con visore a 10 cifre) consente il calcolo di $n!$ soltanto fino a $n = 13$ in notazione decimale: $13! = 6227020800$. Si può giungere al più al valore $n = 69$ utilizzando la notazione esponenziale: $69! = 1.711224524 \cdot 10^{98}$.

Ci occuperemo ora del comportamento di alcune successioni reali, dunque di di funzioni $\mathbf{N} \to \mathbf{R}$. In particolare, esamineremo il comportamento di alcune successioni quando n, variabile indipendente, assume valori "molto grandi".

Proporremo innanzitutto alcuni esempi che ci consentiranno di rilevare analogie e differenze interessanti.

Esempio 1.5. Consideriamo la successione di termine generale: $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

Ricaviamo alcuni termini:

$$n = 0 \quad \to \quad a_0 = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$n = 1 \quad \to \quad a_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$n = 2 \quad \to \quad a_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$$n = 3 \quad \to \quad a_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4} \qquad \ldots$$

Se poi consideriamo valori "molto più grandi" di n, troviamo:

$$n = 100 \quad \to \quad a_{100} = \frac{100}{100+1} = \frac{100}{101}$$

$$n = 1000 \quad \to \quad a_{1000} = \frac{1000}{1000+1} = \frac{1000}{1001}$$

Quanto riportato è sufficiente per giustificare la seguente intuitiva constatazione: *al crescere di n, il valore di a_n si avvicina sempre di più al numero reale 1.*

Esempio 1.6. Consideriamo la successione di termine generale: $b_n = 2 \cdot n + 3$ (una *progressione aritmetica*). Ricaviamo i valori di alcuni suoi termini:

$$n = 0 \quad \to \quad b_0 = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$n = 1 \quad \to \quad b_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

$$n = 2 \quad \to \quad b_2 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$

$n = 3 \quad \rightarrow \quad b_3 = 2 \cdot 3+3 = 9$

$n = 4 \quad \rightarrow \quad b_4 = 2 \cdot 4+3 = 11 \quad ...$

Se poi consideriamo valori "molto più grandi" di n, troviamo:

$n = 100 \quad \rightarrow \quad b_{100} = 2 \cdot 100+3 = 203$

$n = 1000 \quad \rightarrow \quad b_{1000} = 2 \cdot 1000+3 = 2003$

Quanto riportato è sufficiente per giustificare la seguente intuitiva constatazione: *al crescere di n, il valore di b_n cresce indefinitamente, cioè assume valori positivi sempre più grandi.*

Esempio 1.7. Consideriamo la successione di termine generale: $c_n = -2 \cdot n+3$ (una *progressione aritmetica*). Ricaviamo i valori di alcuni suoi termini:

$n = 0 \quad \rightarrow \quad c_0 = -2 \cdot 0+3 = 3$

$n = 1 \quad \rightarrow \quad c_1 = -2 \cdot 1+3 = 1$

$n = 2 \quad \rightarrow \quad c_2 = -2 \cdot 2+3 = -1$

$n = 3 \quad \rightarrow \quad c_3 = -2 \cdot 3+3 = -3$

$n = 4 \quad \rightarrow \quad c_4 = -2 \cdot 4+3 = -5$

$n = 5 \quad \rightarrow \quad c_5 = -2 \cdot 5+3 = -7 \quad ...$

Se poi consideriamo valori "molto più grandi" di n, troviamo:

$n = 100 \quad \rightarrow \quad c_{100} = -2 \cdot 100+3 = -197$

$n = 1000 \quad \rightarrow \quad c_{1000} = -2 \cdot 1000+3 = -1997 \quad ...$

Quanto ora riportato è sufficiente per giustificare la seguente intuitiva constatazione: *al crescere di n, il valore di c_n decresce indefinitamente, cioè assume valori negativi sempre più grandi in valore assoluto.*

Esempio 1.8. Consideriamo la successione di termine generale: $d_n = n+(-1)^n \cdot n$ (una *progressione aritmetica*). Ricaviamo alcuni termini:

$n = 0 \quad \rightarrow \quad d_0 = 0+(-1)^0 \cdot 0 = 0$

$n = 1 \quad \rightarrow \quad d_1 = 1+(-1)^1 \cdot 1 = 0$

$n = 2 \quad \rightarrow \quad d_2 = 2+(-1)^2 \cdot 2 = 4$

$n = 3 \quad \rightarrow \quad d_3 = 3+(-1)^3 \cdot 3 = 0$

$n = 4 \quad \rightarrow \quad d_4 = 4+(-1)^4 \cdot 4 = 8$

$n = 5 \quad \rightarrow \quad d_5 = 5+(-1)^5 \cdot 5 = 0 \quad ...$

Se poi consideriamo valori "molto più grandi" di n, troviamo:

$n = 100 \quad \rightarrow \quad d_{100} = 100+(-1)^{100} \cdot 100 = 200$

$n = 101 \quad \rightarrow \quad d_{101} = 101+(-1)^{101} \cdot 100 = 0$

$n = 1000 \quad \rightarrow \quad d_{1000} = 1000+(-1)^{1000} \cdot 1000 = 2000$

$n = 1001$ $\quad\rightarrow\quad$ $d_{1001} = 1001+(-1)^{1001}\cdot 1001 = 0$

Il comportamento della successione ora esaminata non appare del tutto regolare: per n pari, i valori di d_n sembrano crescere indefinitamente, ma per n dispari essi sono sempre 0. Tutto ciò ci impedisce di affermare sia che la $n \rightarrow d_n$ si comporta come la $n \rightarrow b_n$ sia che si comporta come la $n \rightarrow a_n$.

Quanto ora riportato è sufficiente per giustificare la seguente intuitiva constatazione: *al crescere di n, il valore di d_n ha un comportamento che non può essere assimilato ai comportamenti riscontrati negli esempi precedenti.*

Diamo ora le definizioni seguenti, riferite a successioni che, al crescere dell'indice n, assumono valori sempre più prossimi a un numero reale.

Definizione 1.5. La successione $n \rightarrow a_n$ si dice *convergente* a $l \in \mathbf{R}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ (reale positivo scelto arbitrariamente) esiste un naturale n_ε tale che, per ogni valore dell'indice $n > n_\varepsilon$ risulta: $|a_n - l| < \varepsilon$
Se $n \rightarrow a_n$ è convergente a $l \in \mathbf{R}$, si dice che il *limite* di $n \rightarrow a_n$ è l e si scrive:

$\lim a_n = l$ o: $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = l$

Per affermare che una successione $n \rightarrow a_n$ è convergente procediamo così:

- consideriamo un reale positivo ε a piacere;
- per ogni scelta di ε, dobbiamo determinare un valore n_ε (valore dipendente da ε), tale che *per tutti i valori dell'indice n seguenti n_ε la differenza (in valore assoluto) tra a_n e l sia minore di ε.*
  (Cioè: a_n sia distante da l meno di una quantità scelta a piacere).

Esempio 1.9. La successione di termine generale $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ è convergente e il suo limite è 1. Verifichiamo ciò sulla base della definizione.

Consideriamo arbitrariamente il reale $\varepsilon > 0$. Per la definizione di successione convergente deve risultare: $|a_n - l| < \varepsilon$ cioè:

$$\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

(ricordando che $n \in \mathbf{N}$). Quindi: $n > -1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$. A questo punto:

- se $0 < \varepsilon < 1$: poniamo n_ε uguale al massimo numero naturale non maggiore di $-1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$;
- se $\varepsilon \geq 1$: poniamo $n_\varepsilon = 0$.

Questo ci permette di riscrivere la disequazione precedente nella forma: $n > n_\varepsilon$.

Pertanto, per ogni $\varepsilon>0$, esiste n_ε tale che, per ogni valore dell'indice $n>n_\varepsilon$ risulta: $|a_n-1| < \varepsilon$, come richiesto.Quindi è verificato il limite scritto:

$$\lim \frac{n}{n+1} = 1 \qquad \text{o:} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

Esempio 1.10. La successione di termine generale: $b_n = 2\cdot n+3$ *non* è convergente ad alcun numero reale l.

Consideriamo infatti arbitrariamente il reale $\varepsilon>0$. Per la definizione di successione convergente dovrebbe risultare: $|b_n-l| < \varepsilon$ cioè:

$$|2\cdot n+3-l| < \varepsilon \qquad \Rightarrow \qquad -\varepsilon < 2\cdot n+3-l < \varepsilon$$

e infine: $\frac{l-3-\varepsilon}{2} < n < \frac{l-3+\varepsilon}{2}$

La condizione che abbiamo così determinato, per *ogni* possibile scelta del numero reale l, *non* è del tipo $n > n_\varepsilon$ richiesto dalla definizione. Pertanto la successione assegnata *non* è convergente. Non è verificato ogni limite scritto:

$$\lim\, (2\cdot n+3) = l \qquad \text{o:} \qquad \lim_{n\to+\infty} (2\cdot n+3) = l$$

Definizione 1.6. La successione $n\to b_n$ si dice *positivamente divergente* se per ogni $k>0$ (reale positivo scelto arbitrariamente) esiste un naturale n_k tale che, per ogni valore dell'indice $n>n_k$ risulta: $b_n > k$

Se la successione $n\to b_n$ è positivamente divergente, si dice che il *limite* di $n\to b_n$ è $+\infty$ e si scrive:

$$\lim b_n = +\infty \qquad \text{o:} \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = +\infty$$

Per affermare che una $n\to b_n$ è positivamente divergente procediamo così:

- consideriamo un reale positivo k a piacere;
- per ogni scelta di k dobbiamo determinare un valore n_k (valore dipendente da k), tale che *per tutti i valori dell'indice n seguenti n_k il valore assunto da b_n sia maggiore di k*
  (In altre parole: b_n sia maggiore di una quantità scelta a piacere).

Esempio 1.11. La successione di termine generale: $b_n = 2\cdot n+3$ è positivamente divergente. Verifichiamo ciò sulla base della definizione.

Consideriamo arbitrariamente il reale $k>0$. Per la definizione deve risultare: $b_n > k$ cioè: $2\cdot n+3 > k$ Quindi: $n > \frac{k-3}{2}$. A questo punto, possiamo porre n_k uguale al massimo numero naturale non maggiore di $\frac{k-3}{2}$, posizione che ci permette di riscrivere la disequazione precedente nella forma: $n > n_k$

Pertanto, per ogni k>0, esiste n_k tale che, per ogni valore dell'indice $n>n_k$ risulta: $b_n > k$, come richiesto. Dunque è verificato il limite scritto:

$$\lim (2 \cdot n+3) = +\infty \qquad \text{o:} \qquad \lim_{n\to+\infty} (2 \cdot n+3) = +\infty$$

Esempio 1.12. La successione di termine generale: $c_n = -2 \cdot n+3$ *non* è positivamente divergente. Consideriamo infatti arbitrariamente il reale k>0. Per la definizione di successione positivamente divergente dovrebbe risultare: $c_n > k$ cioè $-2 \cdot n+3 > k$. Quindi: $n < -\frac{k-3}{2}$

La condizione che abbiamo così determinato *non* è del tipo: $n > n_k$ richiesto dalla definizione. Pertanto la successione *non* è positivamente divergente e non è verificato il limite scritto nella forma:

$$\lim (-2 \cdot n+3) = +\infty \qquad \text{o:} \qquad \lim_{n\to+\infty} (-2 \cdot n+3) = +\infty$$

Definizione 1.7. La successione $n \to b_n$ si dice *negativamente divergente* se per ogni k>0 (reale positivo scelto arbitrariamente) esiste un naturale n_k tale che, per ogni valore dell'indice $n>n_k$ risulta: $c_n < -k$.

Se la successione $n \to c_n$ è negativamente divergente, si dice che il *limite* di $n \to c_n$ è $-\infty$ e si scrive:

$$\lim c_n = -\infty \qquad \text{o:} \qquad \lim_{n\to+\infty} c_n = -\infty$$

Per affermare che una successione $n \to c_n$ è negativamente divergente:

- consideriamo un reale positivo k a piacere;
- per ogni scelta di k dobbiamo determinare un valore n_k (valore dipendente da k), tale che *per tutti i valori dell'indice n seguenti n_k il valore assunto da c_n sia minore di $-k$.*
  (In altre parole: c_n sia minore di una quantità scelta a piacere).

Esempio 1.13. La successione di termine generale: $c_n = -2 \cdot n+3$ è negativamente divergente. Verifichiamo quanto ora affermato sulla base della definizione.

Consideriamo arbitrariamente il reale k>0. Per la definizione deve risultare: $c_n < -k$ cioè: $-2 \cdot n+3 < -k$ Quindi: $n > \frac{k+3}{2}$

Possiamo porre n_k uguale al massimo numero naturale non maggiore di $\frac{k+3}{2}$, posizione che ci permette di riscrivere la disequazione precedente nella forma: $n > n_k$

Pertanto, per ogni k>0, esiste n_k tale che, per ogni valore dell'indice $n>n_k$ risulta: $c_n < -k$, come richiesto. È dunque verificato il limite scritto:

$$\lim (-2\cdot n+3) = -\infty \qquad \text{o:} \qquad \lim_{n\to+\infty} (-2\cdot n+3) = -\infty$$

Definizione 1.8. La successione $n \to d_n$ si dice *indeterminata* se non è convergente, né positivamente divergente, né negativamente divergente. Una successione indeterminata non ammette limite. Se la successione $n \to d_n$ è indeterminata, si dice che il limite di $n \to d_n$ non esiste.

Esempio 1.14. Lasciamo al lettore il compito di verificare che la successione di termine generale: $d_n = n+(-1)^n\cdot n$ è indeterminata. Essa non è infatti convergente, né positivamente divergente, né negativamente divergente. Si conclude:

$$\lim\,[n+(-1)^n\cdot n]\ \textit{non esiste} \qquad \text{o:} \qquad \lim_{n\to+\infty}[n+(-1)^n\cdot n]\ \textit{non esiste}$$

Esempio 1.15. Una successione è molto importante in tutta l'analisi matematica; si tratta della: $n \to \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Si dimostra che essa è convergente e risulta:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad\qquad \text{dove è: } 2 < e < 3$$

Il numero $e = 2{,}718281...$ è un reale irrazionale denominato *numero di Nepero* (il matematico scozzese John Napier, detto Nepero, sviluppò la teoria dei logaritmi nei primi decenni del XVII secolo). Il numero e è la base dei logaritmi naturali o neperiani quella precedente può essere considerata la sua definizione.

1.2. CALCOLO COMBINATORIO

Consideriamo un insieme costituito da n elementi; dato un naturale $k \le n$, si vogliano studiare i possibili raggruppamenti ottenuti scegliendo k degli n elementi a disposizione e allineandoli secondo un qualche ordine. In questo primo caso, considereremo distinti due raggruppamenti quando essi differiscano per almeno uno dei componenti, oppure, pur essendo costituiti dagli stessi elementi, differiscano per l'ordine secondo il quale tali elementi sono allineati.

I raggruppamenti così introdotti saranno denominati disposizioni semplici (di n elementi di classe k). Sottolineiamo che il termine "semplici" si riferisce al fatto che in tali raggruppamenti, per definizione, *tutti gli elementi devono essere uno diverso dall'altro*: in altre parole, nelle disposizioni semplici (e, più in generale, in tutti i tipi di raggruppamenti che verranno contraddistinti dal termine "semplici") *è esclusa la ripetizione di uno stesso elemento*.

Definizione 1.9. Dati n elementi e il naturale $k \leq n$, si dicono *disposizioni semplici* di n elementi di classe k (presi k a k) tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo k elementi tra gli n disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti quando differiscono per almeno uno dei componenti oppure per l'ordine secondo il quale essi sono allineati.

Proposizione 1.1. Il numero $D_{n,\,k}$ delle disposizioni semplici di n elementi di classe k (presi k a k), con $k \leq n$, è:

$$D_{n,\,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Dimostrazione. Siano $x_1, x_2, ..., x_n$ gli n elementi in riferimento ai quali calcolare $D_{n,\,k}$. Calcoliamo innanzitutto $D_{n,\,1}$: si tratta di scegliere un (unico) oggetto tra gli n considerati. Le possibili disposizioni di n elementi di classe 1 sono:

$$\{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\},\ ...,\ \{x_n\}$$

Pertanto: $D_{n,\,1} = n$. Sulla base di $D_{n,\,1}$, calcoliamo quindi $D_{n,\,2}$. A ciascuno dei raggruppamenti individuati calcolando $D_{n,\,1}$ dobbiamo "aggiungere" un elemento, evitando le ripetizioni. Pertanto, a ciascun raggruppamento (costituito da un elemento) è possibile aggiungere uno dei restanti $(n-1)$ elementi:

$$\begin{array}{lllll}
\{x_1; x_2\}, & \{x_1; x_3\}, & ..., & \{x_1; x_n\} & \text{(escluso: } \{x_1; x_1\}) \\
\{x_2; x_1\}, & \{x_2; x_3\}, & ..., & \{x_2; x_n\} & \text{(escluso: } \{x_2; x_2\}) \\
\{x_3; x_1\}, & \{x_3; x_2\}, & ..., & \{x_3; x_n\} & \text{(escluso: } \{x_3; x_3\}) \\
... & ... & ..., & ... & ... \\
\{x_n; x_1\}, & \{x_n; x_2\}, & ..., & \{x_n; x_{n-1}\} & \text{(escluso: } \{x_n; x_n\})
\end{array}$$

Otteniamo, considerando tutte le possibilità: $D_{n,\,2} = n \cdot (n-1)$.

Analogamente si procede per il calcolo di $D_{n,\,3}$: a ciascuno dei raggruppamenti individuati calcolando $D_{n,\,2}$ "aggiungiamo" un elemento, che per evitare le ripetizioni deve essere scelto tra i restanti $(n-2)$. Considerando tutte le possibilità, otteniamo: $D_{n,\,3} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$.

Procediamo nello stesso modo sino a giungere al calcolo di $D_{n,\,k}$; risulterà:

$$D_{n,\,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) \ \blacksquare$$

Notiamo che il calcolo di $D_{n,\,k}$ si riassume nel *prodotto di k numeri naturali consecutivi decrescenti a partire da n*.

Esempio 1.16. Il campionato italiano di calcio di serie A, al quale partecipano 18 squadre, prevede la disputa di tutti gli incontri possibili tra le squadre concorrenti: ma ogni incontro viene disputato due volte, una prima volta nello stadio indicato da una squadra e una seconda volta in quello indicato dall'altra. Fissate tali regole, quanti incontri sono previsti nell'intero campionato?

È necessario calcolare il numero dei raggruppamenti ordinati (i due incontri A-B e B-A sono distinti) di due elementi comunque scelti tra i disponibili, cioè il numero delle disposizioni semplici di 18 elementi (tante, infatti, sono le squadre) di classe 2 (a ogni incontro partecipano due squadre):

$$D_{18,\,2} = 18 \cdot 17 = 306$$

Consideriamo un insieme costituito da n elementi; si vogliano studiare i possibili raggruppamenti ottenuti scegliendo *tutti* gli n elementi disponibili e allineandoli secondo ordini diversi. Questo secondo caso, quindi, prevede che due raggruppamenti possano essere diversi solo per il diverso ordine degli elementi componenti (i quali non possono variare, essendo sempre gli stessi n elementi inizialmente considerati).

Definizione 1.10. Dati n elementi, si dicono *permutazioni semplici* tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo tutti gli n elementi disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti quando differiscono per l'ordine secondo il quale essi sono allineati.

Proposizione 1.2. Il numero P_n delle permutazioni semplici di n elementi è:

$$P_n = n!$$

Dimostrazione. In base alle definizioni precedenti, il numero P_k delle permutazioni semplici di n elementi coincide con il numero $D_{n,\,n}$ delle disposizioni semplici di n elementi di classe n. Pertanto:

$$P_n = D_{n,\,n} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n! \quad \blacksquare$$

Esempio 1.17. Cinque amici hanno prenotato cinque poltrone per assistere a una rappresentazione teatrale: in quanti modi diversi essi possono occuparle?

Va stabilito in quanti modi diversi i cinque amici possono disporsi in cinque posti (variando, cioè, soltanto l'ordine): pertanto, bisogna calcolare il numero delle permutazioni semplici di 5 elementi. In base alla proposizione precedente, esso è: $P_5 = 5! = 120$.

Infine, consideriamo un insieme costituito da n elementi; dato un numero naturale $k \le n$, si vogliano studiare i possibili raggruppamenti ottenuti scegliendo k degli n elementi a disposizione; ma in questo caso considereremo distinti due raggruppamenti soltanto quando essi differiscano per almeno uno dei componenti (*senza* alcun riferimento all'ordine). I raggruppamenti così introdotti saranno denominati combinazioni semplici (di n elementi di classe k).

Definizione 1.11. Dati n elementi e il naturale $k \le n$, si dicono *combinazioni semplici* di n elementi di classe k (presi k a k) tutti i raggruppamenti ottenuti scegliendo k elementi tra gli n disponibili, in modo che due raggruppamenti siano considerati distinti soltanto quando differiscono per almeno uno dei componenti.

Proposizione 1.3. Il numero $C_{n,\,k}$ delle combinazioni semplici di n elementi di classe k (presi k a k), con $k<n$, è:

$$C_{n,\,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n!}$$

Dimostrazione. Il calcolo di $C_{n,\,k}$ può essere fatto seguire da quello di $D_{n,\,k}$. Sappiamo che le combinazioni semplici di n oggetti di classe k differiscono dalle disposizioni semplici in quanto nel caso delle combinazioni vengono identificati tutti i raggruppamenti costituiti dagli stessi elementi (anche se elencati in ordine diverso).

Quanti sono, quindi, i raggruppamenti che non dovranno più essere considerati distinti nel passaggio da $D_{n,\,k}$ a $C_{n,\,k}$? Sono tutti quelli formati dagli stessi k elementi, comunque elencati; il loro numero può essere determinato calcolando le permutazioni semplici di k elementi: $P_k = k!$ Sappiamo che:

$$D_{n,\,k} = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$$

Per calcolare $C_{n,\,k}$, dobbiamo dunque dividere $D_{n,\,k}$ per P_k. Otteniamo:

$$C_{n,\,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n!} \quad \blacksquare$$

$C_{n,\,k}$ si indica con $\binom{n}{k}$ ("n su k"); prende il nome di *coefficiente binomiale*.

Esempio 1.18. Nove persone devono percorrere un tratto di strada: viene chiamato un taxi che può trasportare quattro passeggeri (e per una sola volta); gli altri cinque dovranno coprire il percorso a piedi. Quante possibilità diverse potranno essere considerate, per la scelta dei quattro passeggeri del taxi?

L'ordine con il quale i quattro passeggeri del taxi vengono elencati è ininfluente: ciò che conta è solo la possibilità di percorrere il tratto di strada in auto (per i quattro prescelti) o a piedi (per i rimanenti cinque). Pertanto si calcola il numero delle combinazioni semplici di nove elementi di classe quattro:

$$C_{9,\,4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126$$

Proposizione 1.4. Per ogni $k\in\mathbf{N}$, è: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

La formula ora proposta è detta *"formula del binomio di Newton"*.

Esempio 1.19. Ricaviamo, con la formula di Newton, lo sviluppo di: $(a+b)^5$:

$$(a+b)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}a^{5-k}b^k =$$
$$= \binom{5}{0}\cdot a^5 + \binom{5}{1}\cdot a^4b + \binom{5}{2}\cdot a^3b^2 + \binom{5}{3}\cdot a^2b^3 + \binom{5}{4}\cdot ab^4 + \binom{5}{5}\cdot b^5 =$$
$$= 1\cdot a^5 + \frac{5}{1}\cdot a^4b + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot a^3b^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot a^2b^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot ab^4 +$$
$$+ \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cdot b^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Concludiamo la sezione con alcune proprietà dei coefficienti binomiali.

Proposizione 1.5. Siano k, n naturali, con $k\leq n$. Risulta: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Dimostrazione. In base alla definizione di coefficiente binomiale, è:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n!}$$

Si moltiplichino numeratore e denominatore della frazione al secondo membro per $(n-k)!$; ricordando che: $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)...(n-k+1)\cdot(n-k)! = n!$

si conclude: $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{n!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ ■

Esempio 1.20. Risulta: $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{120}{6\cdot 2} = 10$

Proposizione 1.6. Siano k, n naturali, con $k \leq n$. Risulta: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dimostrazione. Per la proprietà provata nella proposizione precedente:

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

e la tesi segue immediatamente, essendo $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ ■

Esempio 1.21. Risulta: $\binom{5}{3} = 10 = \binom{5}{5-3}$

Proposizione 1.7. Siano k, n naturali, con $1 \le k \le n-1$. Risulta:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Dimostrazione. Applichiamo la proprietà provata poco fa:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}$$

Ricordando cheper la definizione di successione fattoriale, è:

$(k-1)! \cdot k = k!$ $\quad$ $(n-k-1)! \cdot (n-k) = (n-k)!$

possiamo scrivere: $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} =$

$= \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ e la tesi è provata. ■

Esempio 1.22. Risulta: $\binom{5-1}{3-1} + \binom{5-1}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10 = \binom{5}{3}$

Esempio 1.23. Risolviamo l'equazione: $\binom{x}{3} - \binom{x}{4} = 0$

Le condizioni sono: $x \in \mathbf{N} \wedge x \ge 4$. Per la definizione di coefficiente binomiale:

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \quad \Rightarrow \quad x(x-1)(x-2)(x-7) = 0$$

Si ha: $x = 0$ non accettabile (per le condizioni poste);
$x = 1$ non accettabile (per le condizioni poste);
$x = 2$ non accettabile (per le condizioni poste);
$x = 7$ *accettabile.*