Συλλογισμός
Syllogismos
History and Epistemology for Mathematics Education
Storia ed Epistemologia per la Didattica della Matematica

Appunti di didattica della matematica
(a cura di G.T. Bagni)

Capitolo 3
Dal concreto all'astratto

3.1. MATEMATICA E ASTRAZIONE

3.1.1. Verso l'astrazione: un primo esempio

Importanti ricerche didattiche hanno indicato come l'apprendimento del concetto di funzione, un concetto centrale nella didattica della matematica della scuola secondaria, sia spesso favorito dall'iniziale considerazione di un'azione, o della sua interpretazione in un processo, nei quali concretamente si realizzi la corrispondenza tra quantità (numeri, grandezze fisiche etc.), una dipendente dall'altra (si veda ad esempio: Briedenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992, inoltre: Markovitz, Eylon & Bruckheimer, 1986): ricordiamo sin d'ora l'opinione di A. Sfard, sulla quale torneremo nel corso della presente nota, che sottolinea come lo sviluppo di "oggetti matematici astratti" può essere considerato il prodotto di una piena ed elaborata comprensione di procedimenti (Sfard, 1991; Sfard & Thompson, 1994).

Appare sempre più importante, se ci si pone in questo quadro teorico, l'attenzione all'aspetto se miotico: certamente infatti la considerazione di un'azione, di un processo ed infine di un oggetto matemtico richiede l'uso di rappresentazioni e, anticipando un'osservazione che riteniamo fondamentale, non dobbiamo dimenticare che «la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è un punto strategico per la comprensione» (Duval, 1993, p. 38; si veda soprattutto: Duval, 1995a). Anche nella formazione della *concept image*, che consente di giungere poi alla *concept definition* (Tall & Vinner, 1981, p. 152; Vinner, 1983) le rappresentazioni hanno un ruolo rilevante; e l'uso didattico delle tecnologie informatiche, spesso utilmente orientate in termini di potenziamento delle rappresentazioni visuali, assume una netta importanza (come sottolineato in: Briedenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992).

In ogni caso, dunque, il concetto astratto di funzione, almeno in una prima fase, viene avvicinato mediante rappresentazioni, principalmente dedicate a situazioni in cui la funzione appare come un procedimento che pone in relazione (spesso di causa ed effetto) due quantità. Certamente un apprendimento del concetto di funzione che si limiti alla considerazione di un'azione o di un processo (e delle sue rappresentazioni) risulterebbe parziale e incompleto: la formazione di un concetto matematico richiede, come abbiamo ricordato, una sequenza di fasi diverse, dunque un progressivo avvicinamento (sebbene, come vedremo, non tutti i ricercatori optino, da alcuni anni a questa parte, per una struttura rigorosamente sequenziale: Slavit, 1997, p. 268). A. Sfard indica nella fase di *reificazione* il decisivo passaggio da un'introduzione basata sulla considerazione di un processo ad una più elevata ed organica concezione che consideri propriamente l'oggetto matematico (*object-oriented*) e sottolinea che «se vogliamo parlare di *oggetti* matematici, dobbiamo essere in grado di riferirci ai *prodotti* di certi processi senza preoccuparci di quegli stessi processi» (Sfard, 1991, p. 10). Questione didatticamente delicata, a questo punto, è la effettiva realizzazione della fase di reificazione: il tentativo di forzare un'impostazione strutturale potrebbe infatti condurre alla formazione, nella mente dell'allievo, di pericolosi pseudo-oggetti, acompagnati dal sorgere o dal consolidarsi di misconcezioni.

Seguendo M. Artigue (Artigue, 1998), che riassume il «lavoro pionieristico» di E. Dubinsky (Dubinsky 1991, la cui impostazione può essere affiancata a quella di: Sfard, 1991 e 1992), una sequenza gerarchica può essere concepita dalla considerazione di un'azione alla seguente concezione di un processo (fase detta di *interiorizzazione*) e quindi ad un oggetto matematico (fase detta di *incapsulamento*). Assai significativa appare inoltre la nozione di *procept* (Gray & Tall, 1994), M. Artigue (rifacendosi in particolare a: Tall, 1996) rileva che «la nozione di procept sottolinea il ruolo giocato dal simbolismo (…). In effetti, molti dei simboli matematici hanno la natura propria del procept: rappresentano a volte un processo ed a volte il risultato di tale processo» (Artigue, 1998). Ancora una volta il ruolo delle rappresentazioni semiotiche e dei registri coinvolti appare essenziale.

Gli importanti quadri teorici ora tratteggiati si sono recentemente evoluti e, come abbiamo anticipato, hanno progressivamente preso le distanze da un'impostazione troppo rigida, strettamente gerarchico-sequenziale: i rapporti tra processo ed oggetto hanno sensibilmente valorizzato la dimensione dialettica tra le varie fasi ed una crescente importanza viene attribuita alla dimensione semiotica dell'attività di concettualizzazione (per quanto riguarda il ruolo essenziale della metafora si veda: Lakoff & Nuñez, 2000).

Si tenga presente inoltre la nettissima importanza delle rappresentazioni (ad esempio visuali, grafiche) nell'approccio al concetto di funzione del tipo *property-oriented* (Kieren, 1990), un'impostazione che non intende sostituirsi alle teorie precedentemente citate, bensì proporre di esse una rinnovata e più completa interpretazione (Slavit, 1997, p. 269; ma anche: Thompson, 1994). Secondo tale approccio, una funzione viene introdotta e descritta con riferimento alle varie proprietà locali (intersezioni con gli assi, presenza di estremanti e di punti di flesso, presenza di asintoti verticali etc.) o globali (simmetria, periodicità, invertibilità etc.) di cui essa gode (ovvero non gode): evidentemente in un'impostazione *property-oriented*, che didatticamente è di primaria importanza, è coinvolta decisamente la capacità dell'allievo di stabilire connessioni significative tra rappresentazioni diverse (Nemirowsky & Rubin, 1992; Monk & Nemirowsky, 1994), spesso anche con decisivo riferimento alle tecnologie grafiche (Ruthven, 1990).

La stessa esperienza didattica quotidiana permette di affermare con certezza che il rilevamento e l'analisi di alcune proprietà globali e locali di cui gode una funzione (ed in particolare il suo diagramma cartesiano) è essenziale per caratterizzare alcune importanti classi di funzioni: ad esempio, le funzioni lineari hanno diagrammi cartesiani facilmente caratterizzabili da evidenti proprietà, soprattutto di tipo globale, e ciò ci rende possibile identificare una funzione lineare come una funzione il cui diagramma cartesiano goda delle proprietà considerate; un analogo discorso può essere sviluppato per altre classi di funzioni, come le funzioni quadratiche o le funzioni periodiche; le più significative proprietà che caratterizzano le funzioni continue o le funzioni derivabili sembrano invece essere di tipo locale, e gli esempi potrebbero costituire ancora un lungo elenco (alcune ricerche sperimentali sono riportate in: Slavit, 1997, p. 272: hanno messo in evidenza che gli allievi spesso combinano un approccio basato sulla considerazione di una concreta corrispondenza ed uno basato sul rilevamento di alcune proprietà significative).

Ma una rilevante difficoltà nella costruzione dell'oggetto astratto, dunque dell'oggetto matematico vero e proprio, sta nella generalizzazione (Eisenberg & Dreyfus, 1994); l'impor tanza delle proprietà che sono state utilizzate per identificare alcune classi di funzioni deve pertanto essere ridimensionata, ovvero ricondotta alla dimensione corretta: una funzione può infatti godere di tali proprietà (e allora sarà una funzione di un certo tipo, ad esempio lineare), ma può anche *non* goderne, senza con ciò perdere il carattere di funzione. Altre sono le particolarità di cui deve godere un oggetto matematico (potremmo dire una *relazione*, sempre ammesso che tale delicato concetto sia precedentemente stato appreso dall'allievo) per poter essere detto, in generale, *funzione*. Ed comunque un'eventuale caratterizzazione *property-oriented* delle funzioni tra le relazioni apparirebbe, come abbiamo in precedenza rilevato, strettamente legata alle rappresentazioni, in particolare all'esame di alcune proprietà del diagramma cartesiano (nel capitolo 5 torneremo ad occuparci di alcuni esserziali elementi relativi alla visualizzazione).

3.1.2. Immagini mentali: un esperimento

Illustrando, nela paragrafo precedente, alcune considerazioni sull'apprendimento del concetto di funzione abbiamo potuto notare che ruolo dell'astrazione è essenziale, nella matematica. Per molti versi, la matematica *è* astrazione (Barth, 1990).

Ma che cosa significa, in generale, *astrazione*? Le risposte possono essere molte, elaborate magari nei diversi àmbiti disciplinari o culturali. Certo, fin dal momento in cui il bambino si rende conto che le proprie mani, le lenti dei propri occhiali e le ruote della propria bicicletta hanno qualche cosa in comune (hanno la stessa “numerosità”), egli opera, intuitivamente, spontaneamente, secondo un tipico procedimento di astrazione.

La matematica (e qui ci riferiamo al *savoir savant*, ricordato nel capitolo precedente: Chevallard, 1985) ha messo a punto tecniche e terminologie ben precise per formalizzare procedimenti come questi: ma le relazioni di equivalenza ed i passaggi al quoziente necessitano di “massicce dosi” di *trasposizione didattica* prima di poter entrare a far parte dei processi di insegnamento e di apprendimento. E, nel frattempo, i bambini riescono ugualmente a contare ed a confrontare insiemi diversi.

La didattica della matematica si occupa con la massima attenzione di ciò che accade, nella mente dell’allievo, in situazioni come quella ora descritta. Se, da un lato, non intendiamo trattare a livello specialistico questo delicatissimo argomento (rimandando il lettore alle indicazioni bibliografiche alla fine del capitolo), riteniamo utile fornire alcuni punti di riferimento, almeno dal punto di vista terminologico (consigliamo ancora la lettura di: D’Amore & Frabboni, 1996, dal quale trarremo le definizioni di questo paragrafo).

Chiameremo *immagine mentale* ciò che viene elaborato dall’allievo, anche involontariamente, a fronte di una qualsiasi sollecitazione (sia interna che proveniente dall’esterno). Si tratta di una immagine interna, dunque non espressa, almeno inizialmente. Tutte le immagini mentali riferite ad un concetto costituiscono il *modello mentale* relativo a tale concetto (Johnson-Laird, 1988).

Come abbiamo detto, fino a questo punto ci troviamo in una situazione *interna*. Ma le concezioni così formate devono spesso essere espresse, comunicate: mediante un’apposita *traduzione*, dunque, si viene a creare un modello *esterno*, esprimibile, talvolta, in un ben determinato linguaggio (ad esempio mediante parole, disegni etc.). Ogni forma di comunicazione di un contenuto, di un qualsiasi messaggio matematico avviene dunque con l'impiego di modelli esterni; i quali però sono derivati, ad esempio nella mente del nostro allievo, dai corrispondenti modelli interni.

Di estrema importanza, pertanto, sarebbe la conoscenza diretta del modello mentale (interno) di un concetto, modello che l'allievo stesso si è creato: tale conoscenza darebbe infatti la possibilità di capire molte cose a proposito di quanto il nostro allievo ha appreso sul concetto in questione; come sopra anticipato, la difficoltà consiste però nel fatto che tale modello interno non viene *mai* comunicato (esternamente).

Nel paragrafo seguente ci occuperemo di un importante esperimento relativo agli argomenti ora trattati. A tale proposito, torniamo a considerare la risoluzione dei problemi.

Che cosa accade, dunque, quando uno studente si trova di fronte ad un problema? Ancora una volta, non è semplice rispondere in poche parole. Possiamo intanto dire che l'allievo, alle prese con un problema, si crea un modello mentale della situazione, "rappresenta" il testo (per una chiara ed efficace introduzione all'argomento si vedano: Zan, 1991-1992; D'Amore, 1993).

La corretta costruzione di tale modello mentale è molto importante per la risoluzione del problema assegnato; e sembra del tutto ovvio affermare che il fatto che un problema rifletta una situazione facilmente immaginabile in tutti i suoi dettagli (ad esempio, sia riferito ad oggetti familiari, di uso comune, che l'allievo può facilmente "pensare") possa agevolare la costruzione del modello mentale e, dunque, renda più semplice la risoluzione (su questo importante argomento hanno scritto molti ricercatori; ci limitiamo a citare: Johnson-Laird, 1988; Vergnaud, 1985; Paivio, 1986).

E qui... scatta il dubbio: *ma le cose vanno veramente così?*

Una recente ricerca di B. D'Amore, condotta al livello di scuola elementare (gli esperimenti descritti sono stati effettuati tra il 1993 e il 1995; si veda: D'Amore, 1997b), ha messo pesantemente in discussione questa assunzione[1]. Presentiamo brevemente tale ricerca.

È stato proposto a tre gruppi di allievi di V elementare (10-11 anni) di risolvere uno stesso problema, nel testo del quale, però, era stata inserita, per ciascuno di tali gruppi, una diversa parola.

Il testo del problema è il seguente:

Il Sig. Piero è un negoziante. Egli acquista 625 *x* a 500 lire ciascuna e le vende tutte per un totale di 480 000 lire. Qual è il guadagno per ciascuna *x*?

Alla lettera *x* sono state sostituite, per i tre gruppi di allievi, le tre "parole":

- *matite*
- *orettole*
- *przetqzyw*

La scelta di queste "parole" (le virgolette sono d'obbligo, *matite* a parte) era così motivata: il contesto descritto dal problema è facilmente immaginabile, in tutti i suoi dettagli, quando alla *x* è sostituita la parola *matite*. Diversa, invece, viene ad essere la situazione con *orettole* (che cosa sono queste benedette *orettole*? Da quale negoziante, nella mia esperienza, ho potuto acquistare delle *orettole*?). Eppure *orettole* è una parola "credibile", che "suona bene". Potrebbe esserci qualcosa che, in italiano, viene indicato da questa parola. La terza scelta, *przetqzyw*, sembra eludere

[1] Confermiamo ancora una volta che il livello scolastico non deve essere considerato una "barriera" nella ricerca in didattica della matematica: risultati sperimentali ottenuti a livello di scuola elementare sono interessanti (e in questo caso: illuminanti!) in senso molto più generale.

ogni residua possibilità: *non* esiste alcun *przetqzyw*. O, comunque, non posso immaginarlo.

Ecco i risultati (nella categoria E sono state raggruppate le risposte esatte, a parte gli errori di calcolo; nella categoria N quelle non esatte; le percentuali sono arrotondate all'unità):

-	*matite*	E:	56%	N:	44%
-	*orettole*	E:	53%	N:	47%
-	*przetqzyw*	E:	59%	N:	41%

Queste percentuali possono apparire davvero sorprendenti, alla luce delle considerazioni esposte poco sopra: a parte lievissime differenze, statisticamente del tutto insignificanti, esse possono essere infatti considerate *le stesse*.

Dunque, la diversa "immaginabilità" dei dettagli delle situazioni rappresentate *non* ha influito in modo significativo sulle percentuali di successo nella risoluzione del problema (o: "dei problemi"). Che cosa è accaduto, allora? Dobbiamo arguire che gli allievi *non* hanno fatto ricorso a modelli, che essi hanno rinunciato ad "immaginare" le situazioni descritte?

Sarebbe del tutto errato adottare sbrigativamente spiegazioni di questo genere. Riteniamo infatti che gli allievi *abbiano* fatto ricorso a modelli, indubbiamente; ma resta il fatto che la presenza di un elemento in parte o del tutto sconosciuto (*orettole*, *przetqzyw*) *non* li ha minimamente turbati. Non ha, insomma, modificato le loro strategie risolutive (e, quindi, le percentuali dei successi ottenuti). Possiamo notare che le situazioni descritte e immaginate, nei tre casi esaminati, avevano lo stesso grado di "complessità": si trattava, in tutti i tre casi, di una (innocua) situazione *concreta*, dell'acquisto di un "qualcosa" (non importa di "che cosa") da parte di un negoziante.

Non proponiamo al lettore una vera e propria "conclusione": abbiamo già ricordato che la ricerca è tuttora in corso e sarebbe perciò arbitrario e pericoloso azzardare soluzioni categoriche. Vogliamo soltanto ribadire che la possibilità di immaginare una situazione *in tutti i suoi dettagli* non appare decisiva per l'impostazione della corretta risoluzione di un problema.

3.1.3. Problemi e immagini mentali: ancora un'esperienza

Abbiamo addirittura ipotizzato che, in alcuni casi, la possibilità di immaginare i dettagli di una situazione-problema possa creare all'allievo qualche perplessità, fino ad ostacolare, in qualche modo, alcune fasi della risoluzione.

Abbiamo allora proposto ad alcuni allievi della III classe della Scuola Secondaria Inferiore (Scuola Media, allievi di 13-14 anni) e delle prime due classi della Scuola Secondaria Superiore (allievi di 14-16 anni) un "classico" problema geometrico in due versioni: una di esse limitata alla descrizione della situazione geometrica, l'altra completa di una "ambientazione" tale da suggerire l'interpretazione.

L'analisi del comportamento degli allievi è stata dunque condotta esaminando una classe di III Media (25 allievi), una classe di I Liceo scientifico (26 allievi) ed una classe di II Liceo scientifico (23 allievi), per un totale di 74 allievi. Tutti gli allievi avevano seguito, fino al momento del test, un corso tradizionale di matematica; in particolare, conoscevano il Teorema di Pitagora e le sue applicazioni ai problemi di geometria elementare.

Ogni classe è stata suddivisa a caso in due gruppi (costituiti circa dalla metà degli allievi presenti), che indicheremo con A, B.

A ciascun allievo dei gruppi A è stata fornita la scheda seguente:

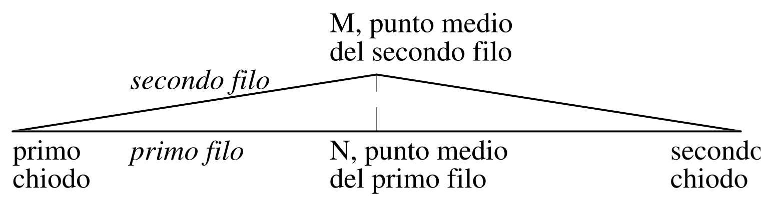
Problema A

Un triangolo isoscele ABN ha la base AB lunga 1 000 000 m; la somma dei lati obliqui è 1 000 001 m; determinare la lunghezza dell'altezza NM.

Separatamente, a ciascun allievo dei gruppi B è stata fornita la scheda:

Problema B

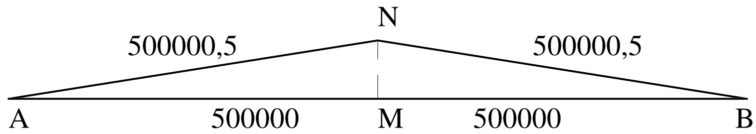
Pensa di legare un filo a due chiodi molto distanti tra di loro, diciamo…1000 km; immagina di usare un filo lungo esattamente 1000 km: il tuo filo sarà dunque perfettamente teso. Agli stessi due chiodi, poi, legherai un secondo filo, lungo 1000 km e 1 m; questo tuo secondo filo, dunque, è un po' più lungo della distanza tra i due chiodi e quindi non sarà perfettamente teso: per poterlo tendere, afferrerai il secondo filo in corrispondenza del suo punto medio e "sposterai" un po' verso l'alto tale punto (come è indicato nella figura qui sotto) in modo da allontanarlo dal primo filo formando un angolo, finché i due lati di tale angolo risultino nuovamente tesi.



Ebbene, di quanto dovrai spostare il punto medio di quel tuo secondo filo? Calcola la distanza tra il punto medio del primo filo, M, e quello del secondo, N.

A *tutti* gli allievi coinvolti, quindi, è stata fornita la scheda seguente:

Risoluzione



Il triangolo AMN è rettangolo in M. Ad esso può dunque essere applicato il teorema di Pitagora. Risulta (le misure sono in metri):

$$\overline{MN} = \sqrt{\overline{AN}^2 - \overline{AM}^2}$$
$$\overline{MN} = \sqrt{500000{,}5^2 - 500000^2}$$
$$\overline{MN} = 707{,}106...$$

Dunque la distanza tra i punti medi M, N è di 707,106 metri circa.

Ritieni che questa risoluzione sia giusta? Perché?

Tempo accordato per rispondere: 15 minuti.

A tutti gli allievi è stato consentito l'uso di carta, penna e della calcolatrice scientifica.

Riassumiamo i risultati nella seguente tabella:

Scheda A (37 allievi: 13 di III m., 13 di I lic., 11 di II lic.)

	III media	I liceo	II liceo	totale
giusta	10 (77%)	12 (92%)	11 (100%)	33 (89%)
non giu.	2 (15%)	1 (8%)	0 (0%)	3 (8%)
no risp.	1 (8%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (3%)

Scheda B (37 allievi: 12 di III m., 13 di I lic., 12 di II lic.)

	III media	I liceo	II liceo	totale
giusta	4 (33%)	10 (77%)	6 (50%)	20 (54%)
non giu.	5 (42%)	3 (23%)	3 (25%)	11 (30%)
no risp.	3 (25%)	0 (0%)	3 (25%)	6 (16%)

Dai risultati del test appare un consistente calo della percentuale degli allievi che ritiene corretta la risoluzione: dall'89% della scheda A al 54% della B.

Prima di passare ad un'analisi più completa dei risultati, ci è sembrato indispensabile prestare attenzione al commento critico fornito dagli allievi: pertanto gli allievi sono stati intervistati (singolarmente, ma alla presenza di tutti i compagni, in aula). Tralasciando le risposte causate da errori di calcolo, la grande maggioranza degli allievi che hanno contestato la risoluzione relativamente alla scheda B hanno fatto riferimento all'apparente non plausibilità della risposta:

«Credo che la risoluzione sia sbagliata in qualche equivalenza: la differenza di un metro su mille chilometri è piccolissima e per tirare il filo dovrebbe bastare poco» (Alberto, III media).

Alcuni allievi parlano di "qualche errore nascosto", di "trucco", di "numeri troppo grandi che fanno sbagliare". Anche tra gli allievi che accettano la risoluzione (sempre con riferimento alla scheda B) appare qualche perplessità:

«Non mi sembra possibile che per un metro in più io per tendere il filo debba spostarmi di 700 metri. Ma ho controllato tutti i calcoli e sono giusti: credo quindi che la risoluzione vada bene» (Mattia, I liceo).

L'osservazione seguente è interessante nell'ambito del rapporto di alcuni allievi con la matematica:

«A me la matematica piaceva molto alle medie, e lì ero brava; ma adesso gli esercizi non mi vengono e questo mi dà fastidio. C'è sempre qualche trucco da vedere, e io spesso non me ne accorgo» (Giovanna, I liceo)[2].

---

[2] Viene alla mente un'osservazione di C. Fiori e C. Pellegrino: «La matematica è una disciplina che gode della singolare proprietà di ispirare sentimenti ed opinioni estremamente contrastanti: è amata o odiata, considerata di facile o di difficile comprensione, viva e

Le considerazioni sui risultati del test, abbinate a quanto emerso dalle interviste agli allievi, consentono la precisazione di alcune osservazioni conclusive.

Notiamo innanzitutto che il test è stato condotto con riferimento ad un numero piuttosto esiguo di allievi (statisticamente, inoltre, non è stata effettuata una particolare campionatura: dunque i risultati del test non possono essere considerati indicativi di un'ampia popolazione).

Dai risultati, comunque, emerge una tendenza abbastanza netta: gli allievi che hanno esaminato il problema formulato in termini più "astratti" non hanno rilevato che i dati proposti erano ben poco realistici ed hanno quindi accettato la risoluzione come formalmente (e tecnicamente) corretta. L'interpretazione della figura presente nella risoluzione stessa è rimasta confinata in ambito geometrico-astratto: un triangolo isoscele, con alcune misure (numeri ed unità di misura) associate ai lati ed all'altezza.

Invece gli allievi che hanno esaminato il problema con esplicito riferimento ad una situazione pratica non hanno potuto evitare di interpretare la (stessa) figura in termini concreti ed hanno rilevato una qualche "improbabilità pratica" dei risultati[3]. Anche dal punto di vista affettivo,

---

stimolante o arida e scostante. Ma tutti hanno di essa una forte immagine» (Fiori & Pellegrino, 1997, p. 428; il riferimento è a: Furinghetti, 1993).

[3] F. Furinghetti osserva che la visualizzazione può costituire un efficace sostegno per l'intuizione; ma non sempre i procedimenti basati su rappresentazioni visuali sono i più semplici, dal punto di vista dell'apprendimento: «L'intuizione… va potenziata ed uno dei mezzi più efficaci è la visualizzazione. Ma occorre tener presente che, come si puntualizza in (Shama & Dreyfus, 1991), visuale non significa sempre facile, anzi in (Presmeg, 1986) la visualizzazione è associata agli allievi dotati. *Intuire* i risultati estendendo per analogia determinate situazioni va praticato con una certa cautela, tenendo presente che per l'allievo non è sempre chiara la distinzione tra questo processo e i processi di astrazione o generalizzazione» (Furinghetti, 1992, p. 94). Indichiamo inoltre: Kaldrimidou, 1987; Duval, 1994 e 1997. Sull'intuizione: Fischbein, 1983, 1985 e 1987.

tutto ciò ha portato alcuni allievi a guardare con diffidenza la risoluzione proposta e, in non pochi casi, a rifiutarla[4].

In D'Amore (1997) era stato chiaramente provato che il fatto che una situazione-problema possa essere immaginata in tutti i suoi dettagli non sembra agevolare lo studente nella ricerca della soluzione; ci sembra di poter addirittura suggerire che, talvolta, tale 'immaginabilità" può addirittura costituire un ostacolo per la risoluzione (o, come nel caso ora esaminato, per l'accettazione di una soluzione corretta).

Concludiamo con un'osservazione di B. D'Amore e di B. Martini:

«Quando si risolve un problema il cui testo è dato per iscritto, per prima cosa ci si fa un modello mentale della situazione descritta dal testo, … o, almeno, così si usa dire... È lecito chiedersi fino a che punto sia necessario farsi modelli mentali *dettagliati* delle situazioni descritte nei testi quando si vogliono risolvere problemi» (D'Amore & Martini, 1997, p. 156).

A ciascun insegnante lasciamo il compito di dare una risposta.

3.2. UN ESEMPIO CRUCIALE: L'INFINITO

3.2.1. Infinito potenziale, infinito attuale

Esaminiamo un argomento molto importante nell'ambito della didattica della matematica della scuola secondaria superiore (ma esso non riguarda soltanto questo livello scolastico): il concetto di infinito.

Una breve introduzione storica si rivelerà di fondamentale importanza.

La genesi del concetto di infinito è infatti lunga e delicata, nella storia della nostra disciplina. In particolare,

---

[4] Sulla componente affettiva nell'apprendimento della matematica è in corso un ampio approfondimento; ci limitiamo a segnalare: Zan, 1995; Pellerey & Orio, 1996; D'Amore & Giovannoni, 1997.

la considerazione dell'infinito in termini *potenziali* contrapposto all'infinito *attuale* è molto antica; ricordiamo la spiegazione di L. Geymonat:

«Si dice che una grandezza variabile costituisce un 'infinito potenziale" quando, pur assumendo sempre valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un segmento con successivi dimezzamenti… il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla invece di 'infinito attuale" quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi; se per esempio immaginiamo di aver scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte a un infinito attuale, perché non esiste alcun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti» (Geymonat, 1970, I, p. 58).

Già Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) distinse chiaramente le due nozioni. Egli impose che, in matematica, l'infinito doveva essere considerato esclusivamente in termini potenziali (Bostock, 1972-1973)[5].

Torniamo all'aspetto più propriamente didattico della questione (ci riferiremo particolarmente a: Bagni, 1998a).

L'efficacia intuitiva dell'infinito potenziale, concepito nei termini di una quantità che può essere progressivamente ed indefinitamente incrementata, può rendere preponderante il ruolo di tale idea nei confronti del concetto, matematicamente più impegnativo, di infinito attuale (Sfard, 1991; Tsamir & Tirosh, 1992). Nella ricerca citata sono stati analizzati due momenti del tradizionale curriculum della scuola secondaria superiore:

---

[5] Ciò per evitare il sorgere di situazioni paradossali (ad esempio i paradossi di Zenone: Arrigo & D'Amore, 1992, pp. 29-34). L'antica impostazione aristotelica influenzò a lungo la concezione dell'infinito (Arrigo & D'Amore, 1992, p. 41)

- l'introduzione, nella III classe del liceo scientifico (allievi di 16-17 anni) dell'insieme dei numeri primi, con riferimento alla dimostrazione di Euclide dell'infinità di tale insieme[6]; si noti che l'approccio di Euclide all'infinito è collegato alla visione aristotelica e dunque è impostato sull'infinito potenziale;
- la sistemazione del concetto di infinito, nella V classe del liceo scientifico (allievi di 18-19 anni) con il concetto di limite.

Riportiamo sinteticamente alcuni risultati relativi a tale ricerca (rinviando il lettore, per i dettagli, all'articolo originale).

È stato rilevato che l'infinito potenziale è chiaramente accettato dagli allievi della III classe del liceo scientifico; ciò conferma che l'apprendimento del concetto di infinito, in questa fase del curriculum può essere utilmente collegato ad una concezione potenziale. Ma ciò non deve illuderci: l'introduzione del concetto di infinito nella scuola secondaria è comunque una fase assai delicata del curriculum matematico; l'apprendimento di questo concetto deve essere attentamente e continuamente controllato dall'insegnante.

Lo studio dell'Analisi matematica, nella V classe, *non* sembra infatti migliorare significativamente la comprensione del concetto di infinito: i risultati degli studenti della V classe non sono sostanzialmente migliori di quelli degli studenti di III; spesso le giustificazioni fornite

---

[6] Il test è stato basato sulla dimostrazione data da Euclide dell'infinità dell'insieme dei numeri primi (com'è noto, la celebre proposizione XX del Libro IX degli *Elementi* euclidei è riferita all'infinità in senso potenziale dell'insieme dei numeri primi: Hardy & Wright, 1938): *I numeri primi sono sempre più di ogni assegnata quantità di numeri primi* (Euclide, 1970). La dimostrazione è la seguente, nella versione elaborata da P. Ribenboim: «Supponiamo che $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \ldots < p_r$ siano... numeri primi. Poniamo quindi $P = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$ e sia p un primo che divida P; allora p non può essere alcuno dei $p_1, p_2, \ldots, p_r$, altrimenti p dividerebbe la differenza $P - p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r = 1$, il che è impossibile. Dunque questo primo p è un altro primo, e $p_1, p_2, \ldots, p_r$ non sono tutti i numeri primi» (Ribenboim, 1980, p. 3).

non appaiono valide o corrette[7]. Inoltre non è stata riscontrata alcuna rilevante interpretazione dell'infinito in senso attuale: ciò accade anche per l'assenza di una specifica introduzione degli insiemi infiniti e dei cardinali transfiniti[8].

Un'interpretazione di tali risultati può essere collegata al ben diverso ruolo della componente astratta nelle concezioni potenziale e attuale dell'infinito.

L'infinito potenziale, infatti, si basa su di un modello piuttosto semplice: l'allievo può immaginare, senza particolari difficoltà, la ripetizione di un atto concreto. Ad esempio, non sono richieste capacità particolari per immaginare l'atto di aggiungere un elemento ad un insieme (l'allievo può pensare di inserire una nuova pallina in un sacchetto con altre palline) o l'atto di muovere un passo in avanti su di una strada. Né sono richieste capacità particolari per immaginare l'indefinita ripetizione di tale atto (a parte qualche difficoltà "pratica", come le dimensioni del sacchetto o la lunghezza della strada, le quali però non sempre sembrano turbare l'allievo): basta pensare di rifare la stessa cosa tante, tante volte, senza fermarsi mai. Ecco naturalmente "immaginato" l'infinito (potenziale).

A quale modello, invece, si fa riferimento per dar corpo al concetto di infinito in senso attuale? Com'è possibile

---

[7] Sull'introduzione intuitiva tradizionale del limite nella scuola secondaria, riferita all'infinito potenziale, indichiamo: Schwarzenberger, 1980; Cornu, 1980 e 1981; Tall & Vinner, 1981; Orton, 1983; Tall, 1985; Davis & Vinner, 1986; Mamona, 1987; Sierpinska, 1987; Mamona-Downs, 1990; Monaghan, 1991; Dimarakis, 1996; Dimarakis & Gagatsis, 1996 e 1997.

[8] Alla didattica dell'infinito e dei cardinali transfiniti è dedicata la ricerca riportata in appendice indicata con la lettera C. Ricordiamo che, nel XIX secolo, le ricerche di Cantor sugli insiemi infiniti portarono a risultati di enorme importanza (Bottazzini, 1990, p. 252) ed alla rivalutazione del concetto di infinito attuale (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 428). Per molto tempo, però, le idee cantoriane furono considerate astruse (Kline, 1991, II, p. 1172; Boyer, 1982, p. 655). Dunque la trattazione degli insiemi infiniti e dei cardinali transfiniti non fu inclusa nei programmi tradizionali delle scuole secondarie superiori; nella ricerca ricordata si può rilevare che tale assenza è causa di alcuni problemi per gli studenti.

(nelle parole sopra citate di L. Geymonat) riferirsi «ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi»? La situazione è molto meno semplice: la considerazione degli (infiniti) punti di un segmento (Geymonat, 1970, I, p. 58), ad esempio, è causa di grossi guai, come il conflitto tra la nozione di insieme *infinito* e di insieme *illimitato* (D'Amore, 1996 e 1997a). Certo, sarebbe opportuno, come sopra segnalato, fare riferimento all'impostazione cantoriana della questione; ma (lo abbiamo osservato nella nota 5) l'introduzione rigorosa degli insiemi dei cardinali transfiniti è considerata assai difficile.

3.2.2. L'infinitesimo

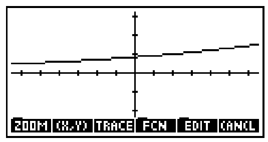
Se nel paragrafo precedente ci siamo occupati dell'infinito, dobbiamo ora notare che anche la nozione di *infinitesimo* assume un ruolo di primaria importanza nella didattica della matematica della scuola secondaria superiore. In particolare, anche il concetto di infinitesimo può essere introdotto in termini potenziali o come infinitesimo attuale.

I risultati di una recente ricerca (Bagni, 1998a), ai quali ci riferiremo fino alla fine della sezione, confermano che parte di quanto sopra rilevato nel caso dell'infinito si ripropone per l'infinitesimo.

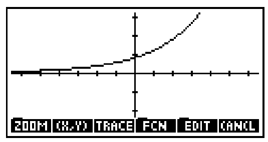
Anche l'introduzione dei procedimenti infinitesimali avviene, intuitivamente, ben prima della trattazione sistematica dei concetti propri dell'Analisi (si pensi, ad esempio, alla nozione di asintoto di una curva nel piano cartesiano). Tale introduzione comporta l'adozione implicita di alcune concezioni da parte dell'allievo; e gli studenti sono spesso portati ad impiegare descrizioni più vicine alla nozione di infinitesimo potenziale che non a quella di infinitesimo attuale.

Ma il concetto di infinitesimo (indipendente dal senso potenziale o attuale) sembra essere causa per gli allievi di alcune difficoltà più consistenti, difficoltà che non erano presenti nel caso dell'infinito.

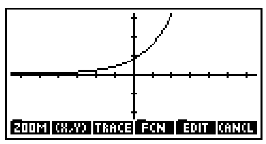
Ad alcuni studenti di III liceo scientifico era stata introdotta la funzione esponenziale (sottolineando che il suo dominio è l'intero insieme dei numeri reali); alcuni diagrammi come i seguenti erano poi stati realizzati con l'impiego di una calcolatrice grafica e proiettati mediante una lavagna luminosa:



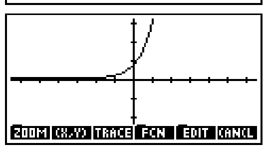
$y = (1.1)^x$



$y = (1.5)^x$



$y = 2^x$



$y = 4^x$

A tali studenti sono quindi state proposte le seguenti domande (frutto, peraltro, di quesiti indicati da alcuni allievi):

1. Cosa accade quando il grafico della funzione esponenziale diventa vicinissimo all'asse delle x? Si ferma? Ritorna a salire?
2. Se il grafico della funzione esponenziale non tocca mai l'asse delle x, pur avvicinandosi sempre di più ad esso, diventerà prima o poi parallelo all'asse delle x (dato che due rette che non si toccano sono parallele)?

Da un primo esame delle risposte sembra che molti allievi siano portati ad aderire a un ragionamento così schematizzabile:

- o la curva si ferma (in corrispondenza di un non meglio precisato x);
- o prosegue indefinitamente;

e se essa prosegue indefinitamente (perché il dominio è *tutto* l'insieme dei numeri reali):

- o raggiungerà (prima o poi) l'asse delle x;
- o diventerà parallela all'asse delle x;
- o tornerà a salire.

È interessante notare che solo pochi allievi hanno affermato che la distanza tra la curva e l'asintoto continua indefinitamente a diminuire, pur senza annullarsi. Evidentemente il concetto di infinitesimo si ricollega al concetto di densità, e qui emerge la difficoltà, per diversi studenti, di concepire una grandezza "indefinitamente divisibile" in grandezze non nulle.

Anche in questo caso è spontaneo pensare al modello che l'allievo può costruirsi: nel paragrafo precedente, con riferimento all'infinito potenziale, abbiamo osservato che non sono richieste capacità particolari per immaginare l'atto di aggiungere un elemento ad un insieme (ad esempio, l'allievo può pensare di inserire una nuova pallina in un sacchetto con altre palline); e neppure la ripetizione indefinita di tale atto sembra creare insormontabili problemi (a parte, ovviamente, le dimensioni del sacchetto). Assai diversa è però la questione se si tratta di immaginare l'atto di *togliere* un elemento ad un insieme: possiamo ancora pensare di estrarre una pallina da un sacchetto, inizialmente pieno di palline; ma se tentiamo di immaginare la ripetizione indefinita di tale atto, l'esperienza ci suggerisce che, prima o poi, raggiungeremo la situazione limite: le palline nel sacchetto *finiranno* (a meno che il sacchetto non sia riempito da… un'infinità *attuale* di palline, ma tale concetto, come sappiamo, è molto delicato!). E quando il sacchetto sarà vuoto, il nostro gioco non potrà più proseguire.

Dunque il concetto di infinitesimo può apparire ostico a non pochi allievi della III classe della scuola secondaria superiore; e ciò, come sopra osservato, può dipendere da una non chiara concezione di nozioni come la densità (o la continuità). Da alcune risposte date dagli allievi appare che anche l'infinitesimo, in forma intuitiva, è di tipo potenziale.

Può essere interessante notare che, ripetendo questo test in V liceo scientifico, alcune difficoltà rilevate nella III classe sembrano superate: il frequente impiego della curva esponenziale (negli esercizi) e l'introduzione del concetto di limite hanno evidentemente contribuito a tale netto miglioramento. Comunque l'infinitesimo, in forma intuitiva, è ancora di tipo potenziale[9].

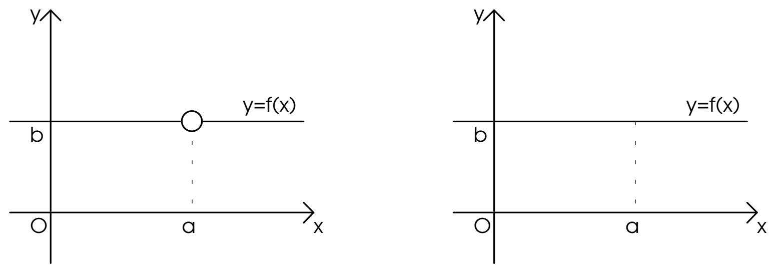
3.2.3. Infinitesimo potenziale e visualizzazione

Concludiamo questa sezione osservando che una intuitiva ma non adeguatamente controllata concezione potenziale dell'infinitesimo può portare gli studenti anche a qualche infortunio.

In un test (riportato in: Bagni, 1998b, un lavoro dedicato alla visualizzazione, argomento che riprenderemo nel capitolo 5) ad alcuni allievi della V classe del liceo scientifico era stato chiesto di dire se le seguenti figure sono compatibili con le relative scritture:

---

[9] La maggior parte degli studenti fa ancora riferimento ad espressioni come «avvicinarci *quanto vogliamo* ad un punto» o «una distanza che può essere *resa più piccola ripetutamente* tutte le volte che si vuole». Ricordiamo che anche l'introduzione (intuitiva) tradizionale del concetto di limite nella scuola superiore si basa sull'infinitesimo potenziale. Ecco una frase tratta dal libro di testo in uso nella classe esaminata: «Per introdurre il concetto di limite, consideriamo ad esempio la funzione espressa da $f(x) = (2x^2-8)/(x-2)$ essendo il dominio D = **R**-{2}. La funzione non è definita per $x = 2$; possiamo tuttavia calcolarla in punti che si approssimano a 2 tanto per difetto che per eccesso… A mano a mano che x si avvicina a 2 i valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più a 8».



$$\lim_{x \to a} f(x) = b \qquad\qquad \lim_{x \to a} f(x) = b$$

Ebbene, un consistente gruppo di studenti (il 37% del totale) ha risposto negativamente e non pochi altri (il 19%) hanno evitato di dare una risposta. Dunque soltanto per meno della metà degli allievi (44%) abbiamo la comprensione e l’accettazione delle (evidentemente solo in apparenza innocue) situazioni proposte.

Come possiamo interpretare questi risultati, certamente non molto incoraggianti?

Invece di dare *noi* insegnanti le *nostre* interpretazioni al comportamento degli allievi, proviamo a considerare le *loro* giustificazioni, fornite nel corso delle interviste che hanno seguito il test.

Eccone due:

«Per le funzioni costanti non c’è bisogno di usare il limite. Tutti i punti hanno la stessa ordinata».

«Con il limite devo descrivere la variazione della *y* causata dalla variazione della *x*».

L’interpretazione dei risultati, ora, appare abbastanza semplice: con il limite (concepito in forma potenziale) descriviamo il continuo, progressivo avvicinamento di un punto al ‘punto limite’. Non c’è questo ‘progressivo avvicinamento’?

Allora…non si con sidera neppure il limite.

3.2.4. Ancora sul concetto di limite: le misconcezioni

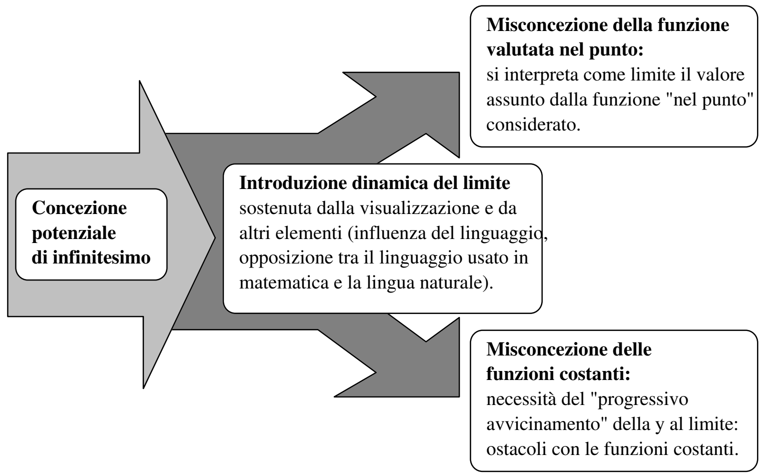
Nel paragrafo precedente abbiamo ricordato qualche difficoltà nell'identificazione della nozione teorica del limite e della corrispondente situazione geometrica, nel piano cartesiano. Abbiamo evidenziato soprattutto la presenza di una misconcezione che identificheremo con la denominazione seguente:

- **Misconcezione delle funzioni costanti.** In base ad una (erroneamente intesa) nozione *dinamica* del limite, collegata all'infinitesimo potenziale, alcuni allievi, per considerare $\lim_{x \to a} f(x) = b$, intendono come indispensabile la presenza di un "progressivo avvicinamento" di y al limite b a fronte del "progressivo avvicinamento" di x al punto $x = a$. Ciò rende ad esempio impossibile la considerazione del limite di funzioni costanti.

Anche la presenza di un'altra misconcezione può essere frequentemente rilevata (si veda ancora: Bagni, 1998b):

- **Misconcezione della funzione valutata nel punto.** Il valore assunto dalla funzione f per $x = a$ viene interpretato come limite $\lim_{x \to a} f(x)$ (e talvolta tale valore è considerato insieme al valore desumibile per $f(x)$ dall'appartenenza di x ad un intorno di a, cioè all'effettivo valore del limite).

Riassumendo: come abbiamo notato, l'introduzione *dinamica* del limite, frequentemente indotta anche da scelte linguistiche, può essere agevolata da una previa (più o meno consapevole) concezione potenziale dell'infinitesimo (ricordiamo ancora l'articolo fondamentale: Sfard, 1991). Ma alcune conseguenze possono essere pericolose.



L'impiego di tecniche visuali (talvolta spontaneamente abbinato alla nozione di infinitesimo potenziale) è didatticamente utile, ma deve essere attentamente controllato dall'insegnante; un suo impiego scarsamente oculato può comportare difficoltà e problemi per l'allievo, causati da un apprendimento incompleto, talvolta addirittura fuorviante.

3.3. COLLEGAMENTI

3.3.1. Un "argomento" per volta?

Ci occuperemo ora di una questione che potrà forse apparire solo marginalmente collegata a quanto trattato nel presente capitolo, ma che viene ad assumere una netta importanza didattica. Invitiamo il lettore a ripensare alle ricerche esposte nei paragrafi precedenti: se, da un lato, l'argomento può apparire unitario (sotto l'unico titolo di 'infinito'), è innegabile che diverse questioni ad esso collegate trovano spazio in molte fasi del programma della scuola secondaria superiore. Ad esempio, ci si occupa, direttamente o indirettamente, di infinito parlando di insiemi numerici, di infinitesimo, di asintoti... Sembra del tutto plausibile che le singole trattazioni di argomenti così vicini siano in qualche modo correlate, forse anche strettamente.

Dedicheremo dunque questa sezione ad una questione di notevole importanza: è possibile impostare l'insegnamento di un argomento (e, dunque, programmare l'apprendimento dei nostri allievi a proposito dell'argomento considerato) riferendoci soltanto ai contenuti pertinenti a tale argomento?

Quanto detto in apertura di questo paragrafo ci orienta verso una risposta negativa. In effetti, chi ha esperienza di insegnamento sa bene che un singolo argomento deve essere inserito in un programma organico: un tale oculato inserimento è indispensabile in quanto può risultare decisivo per un corretto e fruttuoso apprendimento.

Ciò significa che la piena comprensione dell'argomento in questione richiede innanzitutto la conoscenza di alcuni prerequisiti; a sua volta, esso potrà costituire prerequisito per altri argomenti, che saranno trattati in futuro. Ma, più in generale, possiamo dire che ogni argomento del curriculum è "collegato" a molti altri, ad ess o palesemente affini o anche soltanto analoghi per materia trattata o per contesto.

La ricerca in didattica della matematica ha messo a punto numerose impostazioni teoriche che possono dare indicazioni precise in questo delicatissimo campo: a G. Vergnaud è dovuta, ad esempio, la *teoria dei campi concettuali* (Vergnaud, 1985, 1992 e 1994; Fischbein & Vergnaud, 1992; per una chiara esposizione critica: Boero, 1989; D'Amore 1993).

Citiamo lo stesso Vergnaud:

«Un campo concettuale è un insieme di situazioni, per dominare le quali si richiede un'ampia varietà di concetti, di procedure e di rappresentazioni simboliche saldamente collegate l'una all'altra» (Vergnaud, 1992) [10].

---

[10] B. D'Amore ricorda alcuni campi concettuali originariamente indicati da Vergnaud: il campo concettuale delle strutture additive, quello delle strutture moltiplicative, quello delle

3.3.2. Uno sguardo ai programmi

Per una dettagliata conoscenza di queste profonde teorie rinviamo il lettore alle indicazioni bibliografiche (a proposito del curricolo segnaliamo: Fandiño Pinilla, 2002), riteniamo utile dedicare qualche ulteriore riflessione al problema nel suo complesso. Che cosa significa, dunque, che un argomento è collegato ad alcuni altri? Come possiamo scoprire, considerare, sfruttare questi collegamenti?

Proviamo, ad esempio, di esaminare un ben specifico argomento da questo punto di vista: immaginiamo di trovarci nei panni dell'insegnante che, in una III classe della scuola secondaria superiore, si accinge a trattare la circonferenza nell'ambito della geometria analitica elementare[11].

L'allievo, all'inizio della classe III, dispone di un bagaglio di concetti, di nozioni, di abilità matematiche che spazia in diversi àmbiti: dalla logica all'algebra elementare, dallo studio del concetto di funzione alla geometria sintetica. Egli, del resto, si è già occupato della retta nel piano cartesiano ed ha così potuto consolidare una buona base di esperienza per avventurarsi nello studio di luoghi più complicati (ovvero ritenuti tali), come la circonferenza (l'insegnante sa bene che nel corso dell'anno scolastico l'allievo dovrà avere a che fare, nel piano cartesiano, anche con altre curve: la parabola, l'ellisse, l'iperbole, i grafici delle funzioni esponenziale e logaritmo...).

A questo punto si impone un istante di riflessione: nelle righe precedenti abbiamo infatti elencato alcuni brevissimi

misure spaziali, quello delle correlazioni tra spazio, tempo, velocità, accelerazione e forza (cioè il campo riferito a questioni di dinamica), quello delle classi e delle operazioni booleane (D'Amore, 1993, p. 154).

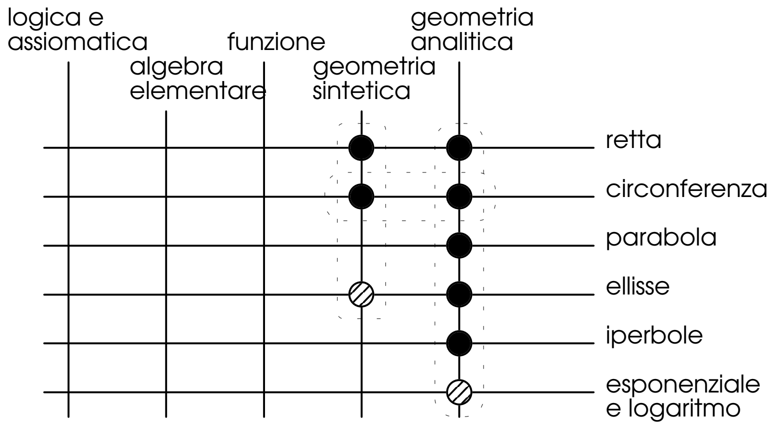
[11] Sottolineiamo subito che si tratta soltanto di un esempio: invitiamo dunque gli insegnanti che ritengono opportuno introdurre la circonferenza nel piano cartesiano in classi diverse dalla III a non sentirsi minimamente contestati!

cenni a molti possibili "collegamenti" tra i vari argomenti che occupano (o che hanno occupato, o che occuperanno) la mente del nostro allievo. Per fissare le idee, ricapitoliamo la situazione e concentriamoci su alcuni di essi:

- c'è un collegamento tra lo studio della circonferenza e quello della retta nell'ambito della geometria sintetica; anzi, l'allievo si sarà probabilmente già occupato della circonferenza nel piano euclideo e avrà esaminato alcuni risultati che collegano la circonferenza alla retta (sempre nel contesto della geometria sintetica);
- un simile collegamento potrà essere realizzato anche con l'ellisse (sebbene in quest'ultimo caso l'importanza possa apparire minore rispetto alla situazione precedente);
- importante è inoltre il bagaglio di concetti, di nozioni, di abilità relative alla geometria analitica che l'allievo ha conquistato operando sulla retta: un collegamento significativo tra i concetti di retta e di circonferenza avviene dunque anche nell'ambito della geometria analitica;
- un simile collegamento potrà realizzarsi anche con lo studio della parabola, dell'ellisse e dell'iperbole nel piano cartesiano (e, forse in misura minore, con lo studio dei grafici delle funzioni esponenziale e logaritmo).

Proviamo a visualizzare quanto ora ipotizzato: considerando gli ambiti "geometria sintetica" e "geometria analitica" (altri àmbiti sopra citati sono: la logica, l'algebra elementare e lo studio del concetto di funzione) potremo ad esempio ottenere una rappresentazione come la seguente, nella quale abbiamo indicato con dei cerchietti neri i collegamenti che ci sembrano di primo piano e con dei cerchietti grigi quelli ritenuti "meno importanti" [12]:

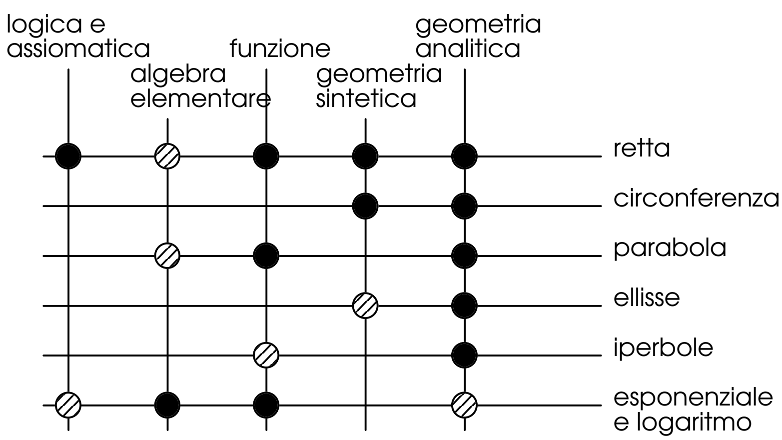
[12] Al fine di evitare ogni malinteso, anticipiamo che questo modo di procedere finisce spesso per essere decisamente soggettivo, se non addirittura arbitrario: alcune delle scelte qui



Naturalmente ci siamo limitati ad alcuni collegamenti fondamentali, peraltro incentrati su di un ben definito argomento (la circonferenza nel piano cartesiano).

Estendendo tale modo di procedere ad altri argomenti del programma tradizionale, ad esempio del triennio della scuola secondaria superiore, possiamo ottenere rappresentazioni come le seguenti.

Classe III

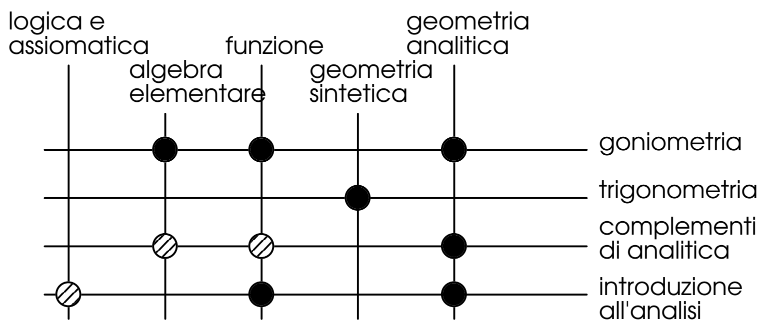


---

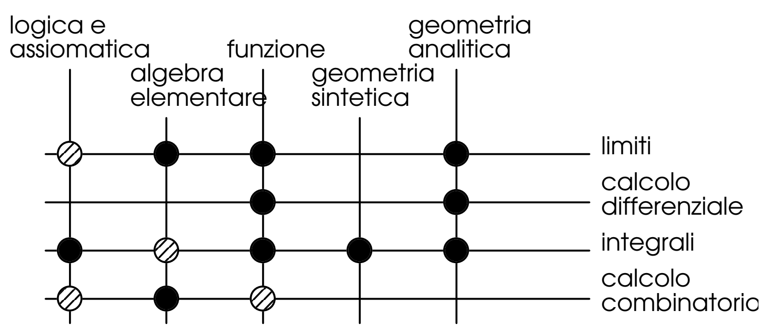
fatte possono non essere condivise; schemi analoghi possono dedursi anche partendo da valutazioni ben diverse. Torneremo su questo aspetto del problema nel paragrafo seguente.

Un insegnante che imposta uno schema come il precedente, ad esempio, si renderà subito conto che l'ambito della geometria analitica viene ad essere prioritario, nel programma di matematica svolto nella III classe. È semplice constatare inoltre che il concetto di retta è quello trattato in termini più diversificati (e dunque, forse, più approfonditi).

Classe IV



Classe V



Osserviamo che l'importanza della geometria analitica sembra mantenersi abbastanza elevata nel corso del triennio; lo studio dei primi concetti dell'Analisi matematica porta infine ad una rivalutazione del concetto di funzione (nella classe V esso viene ad essere il contenuto centrale).

3.3.3. Prudenza!

Nel paragrafo precedente abbiamo proposto alcuni semplici schemi mediante i quali è possibile visualizzare i principali collegamenti tra alcuni argomenti del tradizionale programma di matematica del triennio della scuola secondaria superiore. Ora dobbiamo segnalare alcune osservazioni critiche.

Una prima questione può essere la seguente: qual è l'effettiva utilità di tali schemi, considerata la loro soggettività?

Schemi simili a quelli indicati possono essere utili agli insegnanti per riflettere sul proprio operato (ad esempio sulla propria programmazione) nonché sull'operato degli allievi (ad esempio sui risultati da essi conseguiti relativamente ai vari argomenti). La consapevolezza della centralità di un argomento, ad esempio, può essere molto utile per l'insegnante che cerca di organizzare efficacemente la propria attività didattica.

Dunque si tratta di mezzi espressivi che consentono di sintetizzare e di visualizzare alcuni rapporti tra i vari contenuti del programma e che possono suggerire alcune operazioni di *ingegneria didattica*, ovvero, ad esempio, variazioni dell'ordine nel quale vengono affrontati gli argomenti, oppure del peso da assegnare ai singoli contenuti.

Ben più rilevante è invece una seconda questione: anche ammesso che gli schemi precedenti siano stati elaborati con la massima attenzione e riflettano con precisione scrupolosa la situazione del programma insegnato (o da insegnare), essi sono stati pensati, perfezionati, verificati ed eventualmente modificati soltanto dall'insegnante e riflettono dunque una particolare ed esclusiva visione del processo di insegnamento-apprendimento: il punto di vista, insomma, resta comunque spostato verso l'insegnamento.

Dunque procedimenti come quello sopra illustrato fanno parte di quell'impostazione della didattica che abbiamo indicato, nel capitolo 1, come vicina alla "divulgazione delle idee". Essa risente degli stessi problemi allora rilevati, presenta le stesse limitazioni: gli ipotizzati "collegamenti" tra i vari argomenti del "programma" tradizionale sono davvero presenti, nell'apprendimento del nostro allievo? Inoltre: hanno davvero l'importanza che noi crediamo di poter intuire (e di poter visualizzare mediante i cerchietti neri ed i cerchietti grigi)? Si tratta di valutazioni che possono essere espresse in generale o che devono tener conto dei singoli allievi?

Per giungere a schemi come quelli esemplificati dobbiamo, insomma, fare molte ipotesi: dobbiamo supporre che il nostro allievo si accosti a quel contenuto in un determinato modo, che possa sfruttare (e che effettivamente sfrutti) quel prerequisito, che incontri queste difficoltà, che sia motivato a superarle. Tutte le supposizioni sono basate sulla nostra (magari lunga, solidissima) esperienza di insegnanti, sull'esperienza dei nostri colleghi, sulla tradizione. E nessuno, certamente, vuole svuotare di significato tale prezioso bagaglio! Ma dobbiamo riconoscere che sempre di supposizioni si tratta, di ipotesi. Anche molto plausibili, senza dubbio, ma che necessiterebbero di attente verifiche per poter essere definitivamente confermate ed accettate.

Ancora una volta dalla didattica intesa come "divulgazione delle idee" (della quale, lo ripetiamo, non si deve disconoscere l'utilità!) sentiamo la necessità di avvicinarci ad una forma di ricerca più rigorosamente orientata ai fenomeni dell'apprendimento, a ciò che sperimentalmente può essere rilevato nel comportamento dei nostri allievi.

Ancora una volta, dunque, facciamo un passo verso la didattica intesa come epistemologia dell'apprendimento.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 3

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.

Artigue, M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18.2, 231-262.

Arzarello, F. (1980), *Matematica dell'infinito*, CLU, Torino.

Bagni, G.T. (1997), Didactics of Infinity: Euclid's proof and Eratosthenes' sieve. Prime numbers and potential infinity in High School: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 209-218, Thessaloniki.

Bagni, G.T. (1998a), L'infinitesimo. Infinitesimo potenziale ed infinitesimo attuale nelle concezioni degli studenti della scuola secondaria superiore: *L'educazione matematica*, in via di pubblicazione.

Bagni, G.T. (1998b), *Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale*, in via di pubblicazione.

Barth, B.-M. (1990), *L'apprendimento dell'astrazione*, La Scuola, Brescia (prima edizione: Paris, 1987).

Boero, P. (1989), *Campi semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni su problemi di concettualizzazione e mediazione linguistica connessi ad esperienze di innovazione curricolare*, esposto oralmente a Pisa, sessione n. 6 del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, maggio 1989.

Bostock, D. (1972-1973), Aristotle, Zeno and the potential infinite, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 73.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

Briedenbach, D.E.; Dubinsky, E.; Hawks, J. & Nichols, D. (1992), Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Penseé Sauvage, Grenoble.

Cornu, B. (1980), Interference des modeles spontanes dans l'apprentissage de la notion de limite: *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 8, 57-83.

Cornu, B. (1981), Grandes lignes de l'evolution historique de la notion de limite: *Cahier du Seminaire de Didactique des Mathematiques et de l'Informatique*, 26, 305-326.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. & Giovannoni, L. (1997), Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico: *La matematica e la sua didattica*, 4, 360-399.

D'Amore, B. & Martini, B. (1997), Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard: *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175.

D'Amore, B. & Sandri, P. (1997), *Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante* (in via di pubblicazione).

D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV 'Infinite processes throughout the curriculum", 8 th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

D'Amore, B. (1997a), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.
D'Amore, B. (1997b), Matite, Orettole, Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione?: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* (in corso di stampa).
Davis, P. & Vinner, S. (1986), The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages: *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.
Dimarakis, I. & Gagatsis, A. (1996), The limit concept; difficulties-obstacles of students' undestanding: Gagatsis, A. & Rogers, L. (a cura di) (1996), *Didactics and History of Mathematics*, Erasmus, Thessaloniki.
Dimarakis, I. & Gagatsis, A. (1997), Alcune difficoltà nella comprensione del concetto di limite: *La matematica e la sua didattica*, Bologna (in via di pubblicazione).
Dimarakis, I. (1996), *The limit concept: difficulties-obstacles of students' understanding*, unpublished MA dissertation, Roehampton Institute, Surrey University.
Dubinsky, E. (1991), Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, Tall, D. (a cura di), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126, Kluwer Academic Publishers.
Duval, R. (1983), L'ostacle du dedoublement des objects mathématiques: *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385-414.
Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17, ottobre.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Paris.

Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D'Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1994), On understanding how students learn to visualize function transformations, *Research on Collegiate Mathematics Education*, 1, 45-68.

Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni. L. (a cura di), UTET, Torino.

Fandiño Pinilla, M.I. (2002), *Curricolo e valutazione in matematica*, Pitagora, Bologna.

Fiori, C. & Pellegrino, C. (1997), Immagine della matematica tra concezione e divulgazione: *La matematica e la sua didattica*, 4, 426-443.

Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D'Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.

Fischbein, E. (1983), Intuition and proof: *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (Intuizione e dimostrazione: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).

Fischbein, E. (1985), Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari: Chini Artusi, L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli, Bologna, 122-132.

Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dodrecht.

Furinghetti, F. (1992), Luci ed ombre dell'approccio 'ìntuitivo": Furinghetti, F. (ed.), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II

Internucleo della Scuola superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 83-96.
Furinghetti, F. (1993), Images of Mathematics outside the community of mathematicians: evidence and explanations: *For the Learning of Mathematics*, 13, 2, 33-38.
Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.
Hardy, G.H. & Wright, E.M. (1938), *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford (quinta edizione, 1979).
Johnson-Laird, P.N. & Byrne, R.M.J. (1990), *Deduction*, Erlbaum, Hillsdale.
Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).
Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7, Paris.
Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.
Kieren, T.E. (1990), Understanding for teaching for understanding, *The Alberta Journal of Educational Research*, 36 (3), 191-201.
Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino.
Kosslyn, S.M. (1989), *Le immagini della mente*, Giunti, Firenze 1989 (prima edizione originale: 1983).
Lakoff, G. & Nuñez, R. (2000), *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.
Mamona, J. (1987), *Students' interpretations of some concepts of mathematical analysis*, Unpublished Ph. D. thesis, University of Southampton.

Mamona-Downs, J. (1990), Calculus-Analysis: a review of recent educational research: *II Simposio Internacional Investigacion en Educacion Matematica*, 11-36, Cuernavaca, Mexico.

Markovitz, Z.; Eylon, B. & Bruckheimer, N. (1986), Functions today and yesterday, *For the learning of mathematics*, 6 (2), 18-24.

Monaghan, J. (1991), Problems with the language of limits: *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, 20-24.

Monk, S. & Nemirowsky, R. (1994), The case of Dan: Student construction of a functional sitiation through visual attributes, *Research on Collegiate Mathematics Education*, 1, 139-168.

Nemirowsky, R. & Rubin, A. (1992), Students' tendency to assume rensemblances between a function and its derivative, *TERC Working Paper*, 2-92, Cambridge, Massachussets.

Orton, A. (1983), Students' understanding of differentiation: *Educational Studies in Mathematics*, 14, 235-250.

Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.

Pellerey, M. & Orio, F. (1996), La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica: *ISRE*, 2, 52-73.

Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.

Presmeg, N.C. (1986), Visualization and mathematical giftedness: *Educational studies in mathematics*, 17, 297-311.

Ribenboim, P. (1980), *The Book of Prime Number Records*, Springer Verlag, New York (seconda edizione, 1989).

Ruthven, K. (1990), The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms, *Educational Studies in Mathematics*, 21 (5), 431-450.

Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using Geometric knowledge: Hiebert, J. (a cura di), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.

Schwarzenberger, R. (1980), Why Calculus cannot be made easy: *Mathematical Gazette*, 64, 158-166.

Sfard, A. & Thompson, P.W. (1994), Problems of reification. Representations and mathematical objects, Kirshner, D. (a cura di), *Proceedings of PME-NA* 16, Baton Rouge, 1-32.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992), Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: the case of function, Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, 59-84.

Shama, G. & Dreyfus, T. (1991), Spontaneous strategies for visually presented linear programming problems: Furinghetti, F. (ed.), *Proceedings of PME XV*, Assisi, 3, 262-270.

Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.

Sierpinska, A. (1987), Humanities students and epistemological obstacles related to limits: *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.

Slavit, D. (1997), An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281.

Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-69.

Tall, D. (1980), The notion of infinity mesauring number and its relevance in the intuition of the infinity: *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.

Tall, D. (1985), Understanding the Calculus: *Mathematical Teaching*, 110, 49-53.

Tall, D. (1996), Function and Calculus, Bishop, A.J. & Al. (a cura di), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer Academic Publishers.

Thompson. P.W. (1994), Students, functions and the undergraduate curriculum, Dubinsky, E.; Schoenfeld, A.H. & Kaput, J. (a cura di), *Research in Collegiate Mathematics Education*, I, Providence, R.I., American Mathematical Society, and Washington, D.C., Mathematical Association of America.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity: *PME* XVI, 90-97, Durham.

Vergnaud, G. (1985), Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche: Chini Artusi, L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli-UMI, Bologna, 20-45.

Vergnaud, G. (1992), La teoria dei campi concettuali: *La matematica e la sua didattica*, VI, 1, 4-19.

Vergnaud, G. (1994), *Il bambino, la matematica e la realtà*, Armando, Roma (edizione originale: Lang, Berne 1981).

Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).

Vinner, S. (1983), Concept definition, concept image and the notion of function, *International Journal for Mathematical Education in Science and Technology* 14, 3, 293-305.

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.

Waldegg, G. (1993), La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction: *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 19-36.

Zan, R. (1991-1992), I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14 (7, 9), 659-677; 15 (1), 39-53.

Zan, R. (1995), Chi non riesce in matematica?: D'Amore, B. (a cura di), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*, Atti del IX Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro Terme, Pitagora, Bologna, 77-83.