Atti di *SFIDA-19, Seminario Franco-Italiano di Didattica dell'Algebra*, Nice 2002

Considerazioni che riguardano l'intervento di conoscenze del III ordine nelle fasi di generalizzazione dell'apprendimento del concetto di funzione

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"

I. Funzioni e rappresentazioni: dal processo all'oggetto

Lo studio delle rappresentazioni è un problema cruciale della didattica e si collega ad una riflessione sulla natura e sull'esistenza degli stessi oggetti matematici rappresentati: L. Radford nota che «non si può trattare il problema della rappresentazione delle conoscenze senza penetrare nella dimensione ontologica» (Radford, 2002a, p. 237; la traduzione è nostra).

Per quanto riguarda le connessioni tra l'esperienza umana ed i sistemi matematici formali, nella tradizione piagetiana, la distinzione tra strutture mentali e fisiche è spesso ricondotta a quella tra significato (interno) e significante (esterno); ma l'interazione tra i livelli, uno solo dei quali è osservabile, è continua: operazioni mentali possono avvenire indipendentemente da attività fisiche e le stesse strutture mentali, sottolinea J.J. Kaput, vengono ad essere il prodotto di azioni su materiali concreti (Kaput, 1993). La distinzione tra rappresentazioni interne, mentali, ed esterne, espresse materialmente, è spesso presente in letteratura, in forma esplicita o implicita. Ma considerare ciò in termini di rigido dualismo comporta problemi non trascurabili: la nozione cognitivista di rappresentazione mentale non è facilmente precisabile e molti mezzi di espressione matematica sfuggono comunque a tale suddivisione (Kaput, 1999).

L'uso dei tradizionali sistemi di rappresentazione implica alcuni vincoli didattici: ad esempio, la tendenza a considerare le sole relazioni matematiche rappresentabili algebricamente può allontanare la matematica formalmente espressa dalla reale esperienza. In base a ciò alcuni Autori auspicano una vasta disponibilità di sistemi di rappresentazione, ad esempio mediante l'uso delle tecnologie (Kaput, 1991). Ma ciò pone il problema di un inquadramento teorico delle nuove forme di rappresentazione, la loro *legittimazione* (Radford, 2002a, p. 236).

Sottolineiamo inoltre che è necessario approfondire le connessioni tra l'esperienza spazio-temporale del soggetto (anche collegata ai movimenti corporei), la cui primaria rilevanza nell'apprendimento è stata sottolineata da numerose ricerche, e l'attività anche linguistica di simbolizzazione (accanto all'*embodied cognition* di Lakoff & Núñez, 1980 e 2000, Johnson, 1987, indichiamo: Boero, Garuti & Mariotti, 1999, Arzarello, 2000, Radford, 2002b e 2003).

Importanti ricerche didattiche hanno indicato come l'apprendimento del concetto di funzione sia spesso favorito dall'iniziale considerazione di un'azione, o della sua interpretazione in un processo, nei quali concretamente si realizzi la corrispondenza tra quantità (numeri, grandezze fisiche etc.; ad esempio: Briedenbach & Al., 1992); A. Sfard sottolinea che lo sviluppo di «oggetti matematici astratti» può essere considerato il prodotto di una piena ed elaborata comprensione di procedimenti (Sfard, 1991; Sfard & Thompson, 1994).

Importante, in questo quadro teorico, è l'attenzione all'aspetto semiotico (Kaput, 1989): la considerazione di un'azione, di un processo e infine di un oggetto matematico richiede l'uso di rappresentazioni e, anticipando un'osservazione fondamentale, «la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è un punto strategico per la comprensione» (Duval, 1993, p.

38; si veda soprattutto: Duval, 1995). Anche nella formazione della *concept image*, che consente di giungere alla *concept definition* (Tall & Vinner, 1981, p. 152) le rappresentazioni hanno ruoli rilevanti; e l'uso delle tecnologie, spesso orientate in termini di potenziamento delle rappresentazioni visuali, assume una netta importanza (Briedenbach & Al., 1992).

Certamente un apprendimento del concetto di funzione che si limiti alla considerazione di un'azione o di un processo (nonché delle rappresentazioni) sarebbe parziale: la formazione di un concetto richiede, come abbiamo ricordato, una sequenza di fasi, dunque un progressivo avvicinamento (sebbene non tutti i ricercatori optino, da alcuni anni a questa parte, per una struttura rigorosamente sequenziale: Slavit, 1997, p. 268). A. Sfard indica nella *reificazione* il passaggio da un'introduzione basata sulla considerazione di un processo ad una concezione dell'oggetto matematico (*object-oriented*; D. Slavit tuttavia osserva una «mancanza di chiarezza» in cui si incorre quando ci si riferisce ad una comprensione *object-oriented* di un'idea matematica: Slavit, 1997, p. 265, in cui si cita: Thompson, 1994) e sottolinea che «se vogliamo parlare di *oggetti* matematici, dobbiamo essere in grado di riferirci ai *prodotti* di certi processi senza preoccuparci di quegli stessi processi» (Sfard, 1991, p. 10). Questione delicata, a questo punto, è la realizzazione della fase di reificazione: il tentativo di forzare un'impostazione strutturale potrebbe condurre alla formazione, nella mente dell'allievo, di pericolosi pseudo-oggetti accompagnati dal sorgere o dal consolidarsi di misconcezioni.

Seguendo M. Artigue (Artigue, 1998), che riassume il «lavoro pionieristico» di E. Dubinsky (Dubinsky 1991, la cui impostazione può essere affiancata a quella di: Sfard, 1991 e 1992), una sequenza gerarchica può essere concepita dalla considerazione di un'azione alla seguente concezione di un processo (fase detta di *interiorizzazione*) e quindi ad un oggetto matematico (fase detta di *incapsulamento*). Assai significativa appare la nozione di *procept* (Gray & Tall, 1994); M. Artigue (rifacendosi a: Tall, 1996) rileva che la nozione stessa di procept evoca il ruolo giocato dal simbolismo: molti simboli matematici hanno la natura del procept, rappresentando a volte un processo, a volte il risultato di tale processo (Artigue, 1998).

II. La considerazione delle proprietà

L'aspetto semiotico, dunque, è di primaria importanza per la definizione di un quadro teorico per l'apprendimento dei concetti matematici, ed in particolare della funzione. Si consideri inoltre l'importanza delle rappresentazioni nell'approccio al concetto di funzione del tipo *property-oriented* (Kieren, 1990), un'impostazione che non intende sostituirsi alle teorie sopra citate ma proporne una rinnovata interpretazione (Slavit, 1997, p. 269; Thompson, 1994). Secondo tale approccio, una funzione è introdotta e descritta con riferimento alle proprietà locali (intersezioni con gli assi, presenza di estremanti e di punti di flesso, presenza di asintoti verticali etc.) o globali (simmetria, periodicità, invertibilità etc.) di cui essa gode (o non gode): in un'impostazione *property-oriented* è coinvolta la capacità dell'allievo di stabilire connessioni significative tra rappresentazioni diverse (Nemirowsky & Rubin, 1992; Monk & Nemirowsky, 1994), spesso anche con riferimento alle tecnologie grafiche (Ruthven, 1990).

La stessa esperienza didattica quotidiana permette di affermare che il rilevamento e l'analisi di alcune proprietà globali e locali di cui gode una funzione (in particolare, di cui gode il suo diagramma cartesiano) è essenziale per caratterizzare alcune classi di funzioni: ad esempio, le funzioni lineari hanno diagrammi caratterizzabili da evidenti proprietà, soprattutto di tipo globale, e ciò ci rende possibile identificare una funzione lineare come una funzione il cui diagramma cartesiano goda delle proprietà considerate; un analogo discorso può essere sviluppato per altre classi di funzioni, come le funzioni quadratiche o le funzioni periodiche; le più significative proprietà che caratterizzano le funzioni continue o le funzioni derivabili sembrano invece essere di tipo locale, e gli esempi potrebbero costituire un lungo elenco.

Alcune ricerche sperimentali (riportate in: Slavit, 1997, p. 272) hanno messo in evidenza che gli allievi spesso combinano un approccio basato sulla considerazione di una concreta corrispondenza (*action view*, *operational view*) ed uno basato sul rilevamento di proprietà significative (*property-oriented*). Ad esempio, nello studio di funzioni (ci riferiamo alle scuole superiori italiane, studenti di 18-19 anni), gli allievi considerano talvolta sia alcune corrispondenze tra alcune singole ascisse e le rispettive ordinate, sia proprietà globali o locali della funzione considerata. Il primo approccio, dal punto di vista semiotico, è collegato alla rappresentazione numerica, il secondo appare più vicino al registro visuale.

Un'impostazione *property-oriented* non si rivela utile soltanto per classificare le funzioni, dunque per raggruppare alcune funzioni sulla base di caratteristiche comuni; lo stesso concetto di funzione, come particolarizzazione del concetto generale di relazione, appare infatti suscettibile di un'interpretazione *property-oriented*: ad esempio, una funzione $D \to \mathbf{R}$ è una relazione (un sottoinsieme di $D \times \mathbf{R}$, essendo $D \subseteq \mathbf{R}$: ma una tale introduzione delle relazioni potrebbe non essere didatticamente consigliabile) il cui diagramma cartesiano incontra *non più di una volta* una retta parallela all'asse delle ordinate, cioè di equazione $x = a$ (con $a \in \mathbf{R}$; o incontra *una e una sola volta* una retta di equazione $x = b$ con $b \in D$).

Riassumendo, osserviamo che un approccio *property-oriented* può essere basato sulla partizione di un insieme I in un sottoinsieme S costituito dagli elementi che godono della proprietà P e nel sottoinsieme S' complementare di S rispetto a I, costituito, dunque, dagli elementi che *non* godono della proprietà P. Considerando questa impostazione, una fase essenziale (e talvolta tutt'altro che semplice) verrebbe ad essere la precisazione dell'*ambiente*, cioè dell'insieme I nell'ambito del quale operare la partizione sopra esemplificata: nel caso del concetto generale di funzione, ad esempio, prima di passare a considerare le relazioni in grado di essere caratterizzate dalla proprietà sopra citata, sarebbe necessario precisare che cosa si debba intendere con il termine "relazione".

III. Generalizzazione e particolarizzazione

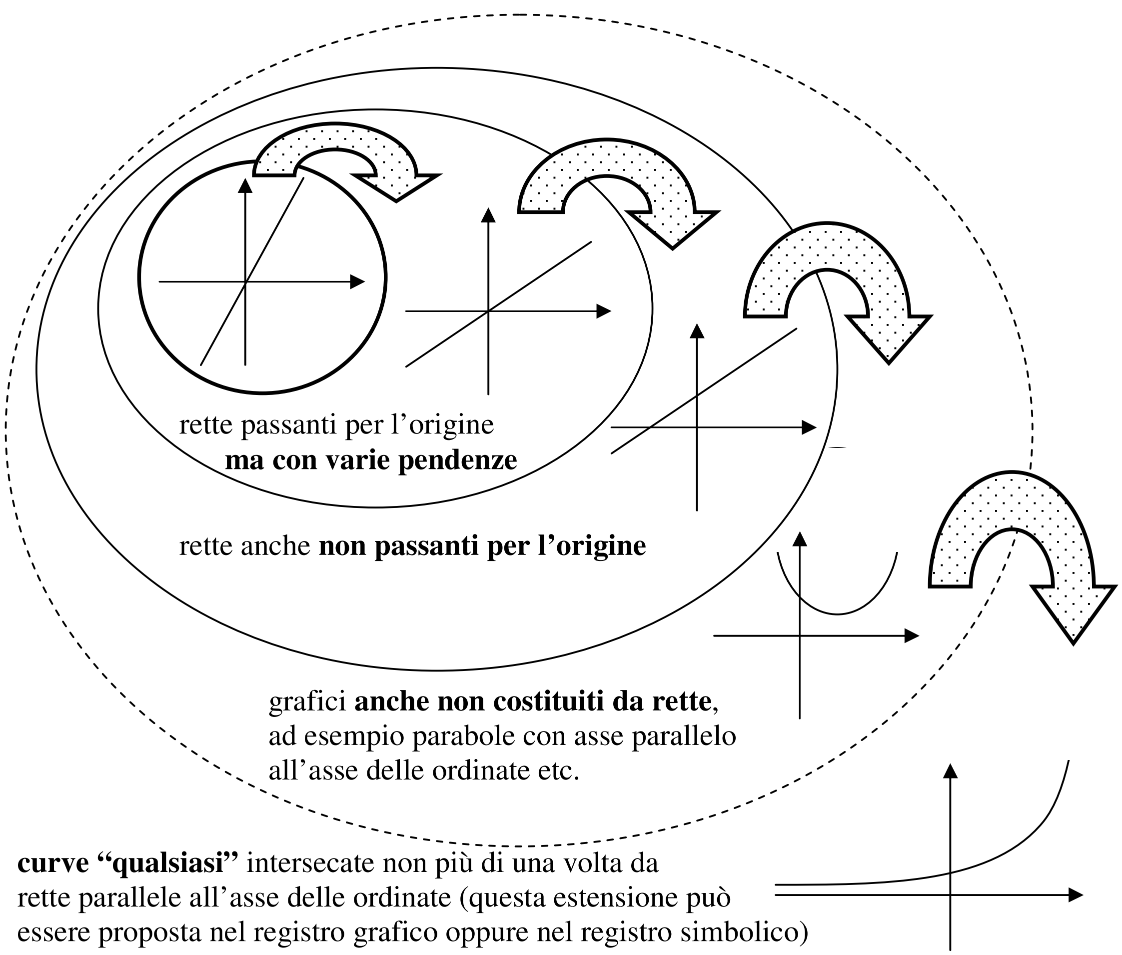
Quanto sopra notato può far pensare a procedimenti basati sulla *particolarizzazione*: dal concetto (generale) di relazione si passerebbe a quello (meno generale) di funzione e quindi ad una particolare classe di funzioni (ad esempio le funzioni lineari) etc. Ma l'apprendimento avviene davvero così? L'esperienza didattica suggerisce forse un percorso opposto: la costruzione di un concetto generale sembra seguire un itinerario che da una particolare corrispondenza porta alla *generalizzazione* di essa in un'intera classe di funzioni per giungere infine, dopo aver considerato classi sempre più ampie, al concetto generale di funzione.

Ogni generalizzazione (passaggio da una classe di funzioni ad una più estesa) avviene considerando nuove corrispondenze aventi qualche caratteristica (ad esempio con riferimento ai grafici) diversa dalle caratteristiche delle corrispondenze considerate nella fase precedente, ma aventi qualche caratteristica che si mantiene comune con le corrispondenze considerate nella fase precedente. Mantenendo il riferimento alle funzioni lineari, nella tabella è delineato un accostamento al concetto di funzione (chiaramente il percorso da considerare non è unico: la sequenza a destra include quella a sinistra, meno dettagliata):

corrispondenze considerate	*rappresentazioni grafiche*	*corrispondenze considerate*	*rappresentazioni grafiche*
singola corrispond. $x \to 2x$	retta di equazione $y = 2x$	singola corrispond. $x \to 2x$	retta di equazione $y = 2x$

↓	↓	↓	↓
		funzioni lineari (propriamente dette)	rette di equazione $y = mx$
		↓	↓
funz. rappresentabili da una retta	rette di equazione $y = mx+q$	funz. rappresentabili da una retta	rette di equazione $y = mx+q$
		↓	↓
↓	↓	funzioni polinomiali	esempi rette parabole cubiche etc.
		↓	↓
funzioni "qualsiasi"	curve intersecate non più di una volta da rette parallele all'asse delle ordinate	funzioni "qualsiasi"	curve intersecate non più di una volta da rette parallele all'asse delle ordinate

Fondamentale, in questa fase, è il ruolo dei controesempi: è indispensabile infatti che l'allievo si renda conto che la generalizzazione realizza un'effettiva estensione.



Non sempre è agevole distinguere le classi: quella tra "funzioni polinomiali" e "qualsiasi", ad esempio, corrisponde con difficoltà ad una differenza di caratteristiche grafiche (nella figura l'insieme delle funzioni polinomiali è tratteggiato). Si potrebbe suggerire l'assenza, per i grafici delle funzioni polinomiali, di asintoti; ma ciò non caratterizza unicamente tali funzioni (si pensi a $y = x+\cos x$). Può essere più semplice caratterizzare le funzioni polinomiali in un registro simbolico, ma ciò presuppone una buona coordinazione dei diversi registri.

Proprio in queste ultime difficoltà individuiamo un limite connesso ad un approccio *property-oriented*: la sua importanza didattica è primaria, ma esso non sembra esaurire il problema della reificazione (Slavit, 1997, p. 271).

IV. Funzioni e registri rappresentativi: un caso sperimentale

La considerazione di proprietà riferite alla rappresentazione grafica è utile per caratterizzare una funzione o un'intera classe di funzioni, ma può, in alcuni casi, indurre perplessità. Per chiarire questa affermazione, provocatoria, proporremo lo studio di un caso ed evidenzieremo come anche in studenti universitari una variazione di registro può costituire un ostacolo.

Riportiamo la trascrizione di un'esperienza che ha visto coinvolti un insegnante (*Ins.*) e un'allieva (*Anna*) del I anno del corso di laurea in Scienze Biologiche (19 anni, un precedente corso scolastico regolare presso un Liceo scientifico italiano ad indirizzo tradizionale) che stava seguendo le lezioni del corso di Calcolo, comprendente elementi di analisi (al momento dell'esperienza non erano state trattate equazioni differenziali), di geometria e di statistica. L'esperienza ha avuto luogo nell'ambito di incontri individuali di esercitazione.

L'insegnante sottopone all'allieva un foglio con la traccia:

> Completa la scrittura seguente. Che cosa rappresenta $y = f(x)$ nel piano cartesiano?
>
> $f''(x) = x \qquad f(x) = \ldots\ldots\ldots$

L'esercizio prevede dunque una prima parte in cui sarà coinvolto il registro rappresentativo simbolico ed una seconda in cui sarà necessario interpretare quanto ottenuto nel piano cartesiano: $f(x)$ dovrà essere collegata ad una *famiglia di funzioni* (non ad un singola funzione) e ciò dovrebbe essere fatto sia nella rappresentazione simbolica, che in quella grafica.

> *Anna (dopo alcuni secondi di attesa)*: Mi dicono che la derivata seconda è x. Bisogna integrare e quindi si deve usare la solita regola *(scrive)*:
>
> $f''(x) = x \qquad f(x) = \ldots\ldots\ldots \qquad \int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
>
> *Anna (breve pausa)*: La formula non è questa? *Ins.*: Controlla bene.
>
> *Anna*: Ah, sì: mancano il dx e la c *(completa la formula)*.
>
> $f''(x) = x \qquad f(x) = \ldots\ldots\ldots \qquad \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$
>
> *Anna (fissa ancora l'insegnante per qualche secondo)*: Adesso integro.
>
> $f''(x) = x \qquad f(x) = \ldots\ldots\ldots \qquad \int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \dfrac{x^2}{2} \qquad \dfrac{1}{2}\dfrac{x^3}{3} = \dfrac{x^3}{6}$
>
> *Anna*: La $f(x)$ è $x^3/6$, posso completare l'esercizio.

Ins.: In sé non sarebbe del tutto sbagliato, ma cosa diresti per quanto riguarda le costanti di integrazione?

Anna: Ma sì! Scusi, me la dimentico sempre *(aggiunge c nel risultato e nei passaggi)*.

$f''(x) = x \qquad f(x) = x^3/6+c \qquad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad \frac{x^2}{2}+c \qquad \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} = \frac{x^3}{6}+c$

Ins.: Adesso va bene? *Anna*: Direi di sì. Non saprei che cosa aggiungere ancora.

Ins.: Devo ripeterti quello che ti ho detto prima, quello che hai scritto non è sbagliato, ma forse non è la soluzione più generale dell'esercizio. Pensaci un po': perché hai messo quella costante di integrazione?

Anna: Perché l'integrale indefinito si fa così. *Ins.*: E perché?

Anna: Perché derivando le costanti vanno via.

Ins.: Qui quante integrazioni hai fatto? *Anna*: Due.

Ins.: E non ti aspetti due costanti? *Anna*: Scrivere c o $2c$ è lo stesso.

La presenza di integrazioni successive è inusuale per l'allieva, la quale ha invece avuto spesso occasione di integrare separatamente gli addendi di una somma.

Ins.: In che senso?

Anna: Quando integro metto $+c$ e quando derivo va via. Nello stesso modo andrebbe via anche $+2c$. *(Per qualche secondo fissa il foglio)*. Sono sicura. Se prendo il risultato e derivo due volte viene x.

Ins.: Che derivando due volte tu ottenga x è vero. Ma prova a risolvere daccapo l'esercizio, facendo con calma le due integrazioni, una dopo l'altra.

Anna prende un altro foglio e scrive:

$f''(x) = x \qquad f'(x) = x^2/2+c \qquad f(x) = \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} +c+c = x^3/6+2c$

Ins.: Guarda bene l'ultimo passaggio, da f' a f: hai integrato proprio tutto?

Anna (dubbiosa): Ah… si integra anche il c? *Ins.*: Tu che cosa ne dici?

Anna (breve pausa): Credo di sì. In effetti prima non ci avevo pensato (*corregge*).

$f''(x) = x \qquad f'(x) = x^2/2+c \qquad f(x) = x^3/6+cx+c$

Ins.: Quelle due costanti devono proprio essere uguali? *Anna*: No.

Ins.: Allora sarebbe preferibile indicarle con due lettere diverse (*Anna corregge*).

$f''(x) = x \qquad f'(x) = x^2/2+c \qquad f(x) = x^3/6+cx+k$

Ins.: Adesso va bene. Va' pure avanti.

Anna: Devo disegnare questa roba nel piano cartesiano. Ma finché ho le lettere non posso andare avanti.

Ins.: Dunque che cosa intendi fare?

Anna: Posso dare dei valori alle lettere. *(Pausa)*. Con gli integrali si fa così.

Ins.: E quali valori vuoi attribuire a c ed a k?

Anna: Tutti i numeri reali. Cioè dei numeri qualsiasi, a scelta.

La traccia dell'esercizio proposto impone ora un cambiamento di registro.

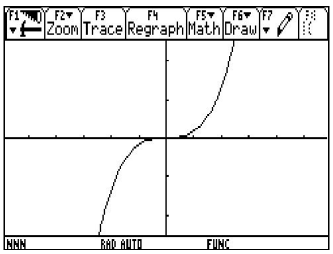
Ins.: Ti propongo, ad esempio, i tre casi: (1) $c = 0$ e $k = 0$; (2) $c = 0$ e $k = 1$; (3) $c = -1$ e $k = 0$. Con l'aiuto della calcolatrice grafica, traccia i tre diagrammi. Riportali su di un foglio in modo da poterli confrontare e poi dimmi che cosa ne pensi. *(L'insegnante scrive i valori delle costanti e le tre formule).*

(1) $c = 0$ e $k = 0$; (2) $c = 0$ e $k = 1$ (3) $c = -1$ e $k = 0$

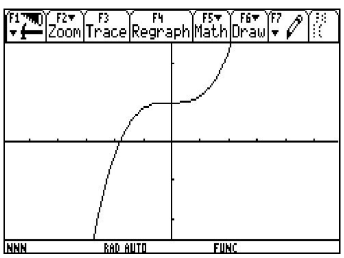
(1) $y = x^3/6$ (2) $y = x^3/6+1$ (3) $y = x^3/6-x$

Anna imposta le formule sulla calcolatrice grafica e ottiene i tre grafici cartesiani.

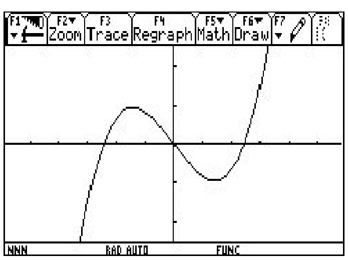
(1)



(2)



(3)



Anna (dopo aver osservato attentamente i diagrammi delle tre funzioni che ha schizzato su di un foglio): I primi due grafici sono uguali, ma il terzo no.

Ins.: Non mi pare che i primi due grafici possano essere considerati uguali.

Anna: Sì, intendevo dire che le prime due sono la stessa curva spostata rispetto all'asse delle x. Invece la terza è una curva proprio diversa.

Ins.: E secondo te questo che cosa significa?

Anna (dubbiosa, dopo qualche istante): C'è qualcosa che non va.

Ins.: In che senso?

Anna: Se una curva è la soluzione l'altra non lo è. Finché una stessa curva si sposta, come accade per (1) e (2), allora tutto va bene. Con gli integrali succede sempre. Ma qui cambia la curva (*osserva le curve con attenzione*): il terzo grafico incontra per tre volte l'asse x, gli altri grafici una sola volta.

Ins.: Eppure abbiamo ottenuto le tre curve partendo dal problema e operando senza fare errori; la calcolatrice non ha sbagliato. Stando così le cose, tutte le tre curve dovrebbero poter essere considerate il diagramma di una soluzione del nostro esercizio.

Anna (perplessa): Se dovessi scegliere una delle tre curve per identificare la soluzione sceglierei la (3): mi sembra che sia la più generale, c'è anche il termine in x. Le prime due vengono così solo perché la c è 0, ma sono un caso particolare.

Anna è passata alla considerazione di alcune proprietà della funzione ricavata (la presenza della rappresentazione grafica sembra indurre a considerare le proprietà della funzione: Slavit, 1997, p, 273); si è resa conto che le tre intersezioni della curva con l'asse delle ascisse sono dovute alla presenza di una costante non nulla. Tuttavia mostra di avere delle difficoltà nel considerare una "soluzione" costituita da una famiglia di funzioni che, nel registro visuale, non originino curve congruenti (per un'interpretazione delle risposte concernenti la "costante di integrazione" alla luce della teoria delle *intuitive rules* di D. Tirosh: Stavy & Tirosh, 1996).

Ins.: Ma non potrebbero essere tutte soluzioni? In fondo vengono tutte dall'equazione $y = x^3/6+cx+k$. Anche altre curve, con diversi valori di c e di k sono soluzioni.

Anna (con aria dubbiosa): Quindi il grafico non esiste?

Ins.: Non esiste un grafico unico perché non esiste un'unica funzione: esistono infinite curve, una per ogni scelta di k e di c.

Anna: Ma sono curve molto diverse tra loro. *Ins.*: Certo. Lo trovi così strano?

Anna (scuote la testa): Un esercizio deve avere una sola soluzione. Un solo grafico.

Questa posizione potrebbe apparire incoerente rispetto a quanto affermato; ma si tratta di riferimenti distinti a diversi tipi di rappresentazione non pienamente coordinati tra loro.

Ins.: Ci sono tanti esercizi che hanno più di una soluzione. Tu stessa avevi accettato come soluzione l'equazione $y = x^3/6+cx+k$. Per diversi valori di c e di k questa diventa un'equazione diversa, rappresenta diverse funzioni.

Anna: Non è la stessa cosa: $y = x^3/6+cx+k$ è un'equazione. La posso scrivere tutta insieme, è una cosa *(l'allieva accentua il termine "una")*, anche se può essere trasformata in cose diverse giocando sui c e sui k. Tanti grafici invece come li scrivo o li disegno tutti insieme? Quando passo ai grafici ne devo scegliere per forza uno. Di solito, con gli integrali il vantaggio è che le curve sono uguali e si spostano solo in alto e in basso, come la (1) e la (2): ma la (3) è una curva tutta diversa. Questo è il problema. E ce ne saranno altre, di diverse.

Il punto cruciale: nel registro simbolico è possibile esprimere con una singola scrittura un insieme di funzioni (procedimento noto all'allieva), ma tale operazione *non può essere ripetuta nel registro visuale* («finché ho le lettere non posso andare avanti»). La diversa flessibilità dei registri riflette una differenza di generalità e di possibile utilizzazione. Dunque è necessario un chiarimento, affidato all'insegnante, che istituzionalizzi il ruolo della rappresentazione grafica e delle proprietà che da essa sono desunte.

V. Conclusione: istituzionalizzazione e ruolo dell'insegnante

Prima di fissare alcune considerazioni sulla reificazione e sul ruolo dell'insegnante, ci sembra opportuno ribadire che anche le osservazioni che seguiranno non dovranno essere considerate con riferimento ad uno svolgimento rigidamente sequenziale dei processi: come anticipato, riteniamo che l'apprendimento di un concetto possa essere scomposto in varie fasi, ma che tale suddivisione non debba essere concepita rigidamente, sebbene alcune fasi possano essere considerate propedeutiche rispetto ad altre; preferiamo pensare ad un confronto progressivo di momenti diversi che possono svilupparsi anche in termini dialettici.

Inizialmente il passaggio dalla considerazione di un'azione alla concezione di un processo (interiorizzazione) rimane riferito all'ambito considerato, dunque ad un caso particolare. Un approccio *property-oriented* può già consentire la precisazione delle caratteristiche di una classe di esempi, frequentemente giocando la partita sul piano delle rappresentazioni visuali; in questa fase, una prima forma di reificazione potrebbe forse prospettarsi anche in forma parziale, con riferimento ad una classe di funzioni (Slavit, 1997, p. 275).

Un momento importante e delicato nella costruzione dell'oggetto astratto, dunque dell'oggetto matematico vero e proprio, sta nelle fasi di generalizzazione (Eisenberg & Dreyfus, 1994); l'importanza delle proprietà utilizzate per identificare alcune classi di funzioni deve pertanto essere ridimensionata, ricondotta alla dimensione corretta: una funzione può godere di tali proprietà (e sarà una funzione di un certo tipo, ad esempio lineare), ma anche *non* goderne, senza perdere il carattere di funzione. Altre sono le particolarità di un oggetto matematico per poter essere detto *funzione*, ed esse si mantengono nella considerata generalizzazione.

Nella fase di passaggio dalla considerazione di un processo alla costruzione di un oggetto generale l'insegnante è un protagonista dell'istituzionalizzazione: in una situazione didattica, ha il compito di tirare le somme, di curare esplicitamente che i vari elementi che entrano a far parte della *concept image*, per poi originare una compiuta *concept definition*, mantengano ruoli corretti; e di proporre la generalizzazione conclusiva, con esempi e controesempi, gestendo i riferimenti (in questa fase non preponderanti) alle rappresentazioni semiotiche.

Il riferimento all'analisi epistemica disciplinare è essenziale: l'allievo deve comprendere alcune caratteristiche della matematica e tale apprendimento non può trascurare, ad esempio, una dimensione sociale. Con J.-Ph. Drouhard, potremmo insomma dire che l'insegnante deve proporre all'allievo quelle conoscenze «del III ordine» che, al di là degli aspetti tecnici collegati a definizioni e teoremi (conoscenze del I ordine) e alle regole di deduzione o di rappresentazione simbolica (conoscenze del II ordine, coinvolte, ad esempio, nell'analisi delle proprietà di una funzione), consentiranno all'allievo stesso una presa di coscienza di aver raggiunto un livello di apprendimento le cui caratteristiche di generalità e di completezza sono proprie della matematica (Drouhard, preprint; inoltre: Robert & Robinet, 1996). L'analisi di quanto accade in questo momento conclusivo potrà essere oggetto di ulteriori ricerche.

VI. Riferimenti bibliografici

Artigue, M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18.2, 231-262.

Arzarello, F. (2000), Inside and outside: spaces, times and languages in proof production, *PME* 24 Plenary Lecture, I, 23-38.

Boero, P.; Garuti, R. & Mariotti, M.A. (1999), Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures, *PME 20*, Valencia, 2, 121-128.

Briedenbach, D.E.; Dubinsky, E.; Hawks, J. & Nichols, D. (1992), Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.

Drouhard, J.-Ph. (preprint), *Les trois orders de connaissances: un essai de présentation*.

Dubinsky, E. (1991), Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, 95-126, Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Peter Lang, Paris.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1994), On understanding how students learn to visualize function transformations, *Research on Collegiate Mathematics Education*, 1, 45-68.

Gray, E. & Tall, D. (1994), Duality, ambiguity, and flexibility: A perceptual view of simple arithmetics, *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (2), 116-140.

Kaput, J.J. (1989), Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra, Kieran, C. & Wagner, S. (Eds.), *Research Agenda for Mathematics Education: Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Lawrence Erlbaum, Hillsdale, 167-194.

Kaput, J.J. (1991), Notations and representations as mediators of constructive processes, von Glaserfeld, E. (Ed.), *Constructivism and mathematics education*, 53-74 Kluwer, Dordrecht.

Kaput, J.J. (1993), The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience, Bieler, R.; Scholz, R.W., Strasser, R. & Winkelman, B. (a cura di), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 379-397, Kluwer, Dordrecht.

Kaput, J.J. (1999), Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows, *Journal of Mathematical Behavior*, 17 (2), 265-281.

Kieren, T.E. (1990), Understanding for teaching for understanding, *The Alberta Journal of Educational Research*, 36 (3), 191-201.

Johnson, M. (1987), *The body in the mind: the bodily basis of meaning, imagination and reason*, The University of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G. & Núñez, R. (1980), *The metaphors we live by*, Univ. of Chicago Press, Chicago.

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000), *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Monk, S. & Nemirowsky, R. (1994), The case of Dan: Student construction of a functional sitiation through visual attributes, *Research on Collegiate Math. Education*, 1, 139-168.

Nemirowsky, R. & Rubin, A. (1992), Students' tendency to assume rensemblances between a function and its derivative, *TERC Working Paper*, 2-92, Cambridge, Massachussets.

Radford, L. (2002a), The Object of Representations: Between Wisdom and Certainty, Hitt, F. (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, 219-240, Cinvestav-IPN, Mexico.

Radford, L. (2002b), The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L. (2003), Gestures, speech and the sprouting of signs, *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Robert, A. & Robinet, J. (1996), Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 16/2, 145-176.

Ruthven, K. (1990), The influence of graphic calculator use on translation from graphic to symbolic forms, *Educational Studies in Mathematics*, 21 (5), 431-450.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educ. Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992), Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: the case of function, Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes 25, 59-84.

Sfard, A. & Thompson, P.W. (1994), Problems of reification. Representations and mathematical objects, Kirshner, D. (Ed.), *PME-NA* 16, Baton Rouge, 1-32.

Slavit, D. (1997), An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281.

Stavy, R. & Tirosh, D. (1996), Intuitive rules in science and mathematics: the case of 'More of A More of B', *International Journal for Science Education*. 18.6, 553-667.

Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-69.

Tall, D. (1996), Function and Calculus, Bishop, A.J. & Al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer Academic Publishers.

Thompson. P.W. (1994), Students, functions and the undergraduate curriculum, Dubinsky, E.; Schoenfeld, A.H. & Kaput, J. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, I, Providence, R.I., AMS, and Washington, D.C., MAA.