La matematica e la sua didattica, 4 (2005), 413–436

Esistono infiniti primi gemelli?

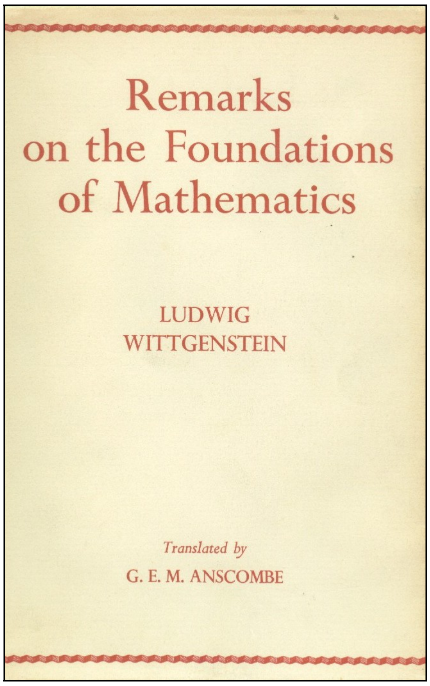
Nel cinquantenario della pubblicazione di *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (Osservazioni sopra i fondamenti della matematica) di Ludwig Wittgenstein (Oxford, 1956)

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

Sunto. Nel presente lavoro esponiamo alcune considerazioni sui concetti di linguaggio e di significato. In particolare, presentiamo alcune idee di Wittgenstein, Quine, Habermas e di altri Autori per proporre una riflessione sui concetti di verità e di certezza, anche con riferimento alla didattica della matematica.

Summary. In this paper we expose some considerations about the concepts of language and meaning. In particular, we present some ideas by Wittgenstein, Quine, Habermas and other Authors in order to propose a reflection on the concepts of truth and certainty, with reference to mathematics education, too.



> «Vuoi dunque dire che 'essere vero' significa essere utilizzabile (essere utile)? – No, voglio solo dire che della successione naturale dei numeri – così come del nostro linguaggio – non si può dire che è vera, ma soltanto che è utile, e, innanzi tutto, che *viene impiegata*»
>
> L. Wittgenstein (1971, I, § 4)

1. Esistono infiniti primi gemelli?
2. Prima di domandarci se è vero o è falso che esistono infiniti primi gemelli dobbiamo chiederci: che cosa significa, propriamente, la frase "esistono infiniti primi gemelli"?
3. Che cosa significa "esistono"? Che cosa significa "infiniti"? "Che cosa significa "primi"? Che cosa significa "gemelli"?
4. E che cosa significa "vero"?
5. Questo approccio è forse ingenuo e potrebbe rivelarsi inconcludente: potrebbe cioè non avere senso inseguire un rigoroso atomismo cercando di separare forzatamente queste quattro parole (Quine, 1986). Esse fanno parte di una frase, di un'affermazione matematica. Ovviamente il termine "gemelli" avrebbe altri significati se inserito in contesti diversi: i gemelli della camicia, Luigi e Paolo sono gemelli.

> «Abbatti tutti questi alberi! – Ma non capisci che cosa significa '*tutti*'? (Ne aveva lasciato in piedi *uno*). Come ha imparato, costui, che cosa significa 'tutti'? Senza dubbio, con l'esercizio. – E certamente, non soltanto quest'esercizio ha agito in lui in modo da fargli *fare una certa cosa* in seguito a un certo comando, ma ha anche dotato la parola di un contorno di immagini (visive o di altro tipo), l'una o l'altra delle quali affiora quando udiamo la parola o la pronunciamo»
>
> L. Wittgenstein (1971, I, § 10)

6. Una parola ha significato soltanto nel contesto di una proposizione: prima di far pensare ai giochi linguistici di Wittgenstein, questo ricorda il principio del contesto di Frege (Dummett, 1983). Ma è poi obbligatorio limitarsi alle proposizioni? Davidson per assegnare un significato alle parole e alle frasi (indipendentemente dal particolare contesto d'uso) propone un *olismo semantico* e afferma che una proposizione (dunque ogni parola in essa contenuta) ha significato soltanto se considerata nel linguaggio (Davidson, 1978, p. 33; Dell'Utri, 2002). Anche Humboldt, due secoli fa, diceva che le parole derivano il proprio significato nel contesto delle proposizioni, le proposizioni da quello dei testi che contribuiscono a formare e così via (Habermas, 2001, p. 64).

> «Il fisico non può mai sottoporre al controllo dell'esperienza un'ipotesi isolata, ma soltanto un insieme di ipotesi»
>
> P. Duhem (1906, p. 284)

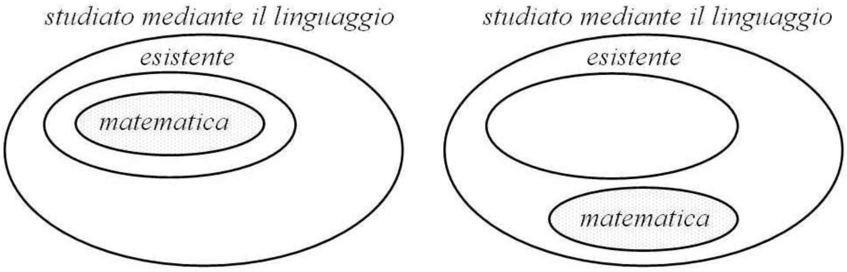
7. Un naturale passaggio *quantitativo* dalla parola alla frase e dalla frase al testo non è l'unico che consente di allargare il principio del contesto di Frege: secondo Wittgenstein il linguaggio deve essere collegato ad un ampio contesto di azioni, usi e istituzioni e il significato di una parola è l'uso di essa in tale contesto (Penco, 2004, p. 103; Wittgenstein, 1999).

> «Ogni giorno impariamo un linguaggio comune, certe parole ci vengono insegnate mostrandoci oggetti etc., e in connessione con essi escogitiamo una certa immagine. Poi, gradatamente, modifichiamo l'uso delle parole e, quanto più lo modifichiamo, tanto meno appropriata diventa quell'immagine, fino a diventare assolutamente ridicola. (…) Abbiamo bisogno di qualcosa di più dell'immagine giusta, abbiamo bisogno di sapere come la si usa»
>
> L. Wittgenstein (1982a, p. 19)

8. Il nostro primario interesse per il linguaggio non è solo un'esercitazione accademica: l'idea che il linguaggio riveli l'essere risale ad Aristotele (Lolli, 2002, p. 26) e il linguaggio è l'unico mezzo che abbiamo a disposizione per studiare ciò che esiste ("il linguaggio": ma siamo certi di poter usare il singolare?).
9. Mediante il linguaggio trattiamo, pensiamo, comunichiamo contenuti matematici. Dunque la matematica esiste?

> «Si constata facilmente che le dimostrazioni depositate alla storia non sono un brancolare confuso e ogni volta originale; hanno un formato abbastanza regolare e ripetitivo. Questo significa che le capacità argomentative umane non sono infinite, anzi a quanto pare sono rese sempre più o meno dagli stessi schemi. La fantasia ha evidentemente un limite, forse radicato nel linguaggio»
>
> G. Lolli (2005, p. 32)

10. Ciò che esiste viene studiato attraverso il linguaggio, attraverso il linguaggio studiamo la matematica, dunque la matematica esiste. Non è certo un sillogismo convincente.



11. A meno che non ci sia una coincidenza tra ciò che esiste e ciò che viene studiato mediante il linguaggio, la cosa non funziona. (Ma il nulla esiste? Viene studiato…).

12. Quando si pensa a un oggetto *che esiste* si cerca di definirlo elencando le sue proprietà intrinseche. Ma perché tutti noi riconosciamo e quindi affermiamo questa sua esistenza? Perché possiamo *usarlo* (averne un'esperienza: viene in mente la definizione aristotelica nella *Metafisica*). Dunque ciò che conta sono le proprietà interazionali di quell'oggetto: il modo in cui esso viene percepito e usato (Lakoff, Johnson, 1998, p. 155; si veda la dimensione praxemica in: Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).
13. Questo uso si riferisce ad un'azione pratica oppure a un'espressione linguistica? Usare un oggetto vuol dire manipolarlo concretamente o basta parlare di esso? Parlare è manipolare. Quando in geometria diciamo "per ogni coppia di punti distinti, esiste al più una retta alla quale essi appartengono" abbiamo enunciato una frase (certamente vera) *usando* le parole "punti" e "retta". Sono le parole che esistono, oppure gli oggetti? C'è differenza?

«È l'esperienza a insegnarci che tra due punti qualsiasi può passare una retta? »

L. Wittgenstein (1971, III, § 4)

14. Saremmo più convinti *disegnando* quei due punti e la retta?
15. Qui forse riemerge l'antica opposizione tra δόξα e αλήθεια.

«Lo studioso di geometria acquisisce, con un grado di chiarezza e acutezza che il non matematico a fatica riesce a immaginare, una salda convinzione nell'esistenza di verità necessarie»

W. Whewell (1858, part 1, bk. 2, ch. 4, § 8)

16. Il contesto in cui siamo chiamati a collocare un'espressione linguistica: un contesto linguistico-culturale alla Humboldt oppure un contesto riferito all'uso, seguendo ad esempio Wittgenstein. Non è però detto che questi due approcci siano inconciliabili.

«Ancor meno di quanto fosse possibile per la nozione di numero è plausibile per un modello formale la possibilità di essere astratto dalla realtà per mezzo di una facoltà particolare di riconoscimento di analogie ed elementi comuni. Il meccanismo di formazione di un modello formale è piuttosto indiretto e in gran parte guidato dal linguaggio»

G. Lolli (2002, p. 232)

17. Scegliamo preliminarmente di intendere una frase nell'àmbito di un qualche contesto. Ad esempio, torniamo all'affermazione "esistono infiniti primi gemelli" e decidiamo esplicitamente di riflettere su di essa restando nel mondo della matematica, sia come riferimento teorico generale che come ambiente in cui usare il linguaggio: in tale situazione l'iniziale grossolana ambiguità riguardante il termine "gemelli" potrebbe

scomparire. O almeno si ridurrebbe notevolmente. È un primo risultato, incoraggiante.

18. Del resto ce lo aspettavamo: la matematica, negli ultimi ventiquattro secoli, è stata considerata il riferimento primo e irrinunciabile per la conoscenza certa.

> «Il linguaggio è un'arte sociale che tutti acquisiamo sulla base solo del comportamento manifesto delle altre persone in circostanze pubblicamente riconoscibili»
>
> W.V.O. Quine (1986, p. 59)

19. Tuttavia se vogliamo illustrare il significato di ciascuna delle parole che utilizziamo (anche per comunicare la matematica) dobbiamo pur sempre utilizzare molte altre parole. Se si afferma che "un primo è un numero divisibile soltanto per sé stesso e per l'unità" si deve poi spiegare che cosa significa "numero", "divisibile", "soltanto" eccetera. E ognuno di questi termini sarà introdotto ricorrendo a nuove parole. Senza fine?

20. È il solito problema del linguaggio che parla di sé stesso: un atomismo radicale che pretendesse di definire singolarmente ogni parola cozzerebbe contro questa lunghissima catena di rimandi. Sembrerebbe cioè portare inevitabilmente alla situazione descritta da Davidson, l'olismo semantico. E, alla lunga, ad un circolo vizioso.

> «Noi parliamo del comprendere una proposizione, nel senso che essa può essere sostituita da un'altra che dice la stessa cosa; ma anche nel senso che non può essere sostituita da nessun'altra. (…) Dunque qui "comprendere" ha due significati differenti? – Preferisco dire che questi modi d'uso di "comprendere" formano il suo significato, il mio *concetto* del comprendere»
>
> L. Wittgenstein (1999, § 531-532)

21. Eppure, ritornando alle idee di Frege, dovrebbe valere anche il principio di composizionalità in base al quale il significato di una frase viene riferito ai significati dei suoi componenti e alle regole di composizione (Frege, 1992, p. 36).

22. Non si riesce a non percepire qualche apparente attrito nell'impostazione di Frege: il principio di composizionalità e il principio del contesto sembrano procedere in due direzioni opposte. Da un lato il significato è ricondotto da un insieme ai singoli elementi; dall'altro si afferma che ciascun elemento può essere osservato e interpretato solo all'interno di un contesto (sufficientemente) ampio (Habermas, 2001, p. 74). Qualcosa non va? Forse bisogna riflettere di più su questa apparente dissonanza.

23. In generale, come possiamo ricondurre il significato di una frase ai significati dei suoi componenti se il significato di ogni termine dipende dall'intero linguaggio? Da dove potremmo (o dovremmo) iniziare? Nel

quadro del proprio olismo epistemologico, Quine rifiuta la distinzione, considerata classica a partire da Kant, secondo la quale gli enunciati si dividono in analitici e sintetici, con i primi costitutivi del significato linguistico e i secondi dipendenti da fatti empirici (Quine, 1966; Penco, 2004, p. 148).

24. Si pone allora un'altra questione: avrebbe senso cercare di valutare le dimensioni del linguaggio che andiamo a considerare? Quali sono, ad esempio, i *confini* del linguaggio matematico?

> «La matematica richiede probabilmente una visione olistica di sé stessa, ma non continua con quella di tutte le scienze»
>
> G. Lolli (2002, p. 127)

25. Ed esiste un linguaggio matematico organico, unitario, oppure ci sono più sottolinguaggi in qualche modo separabili? Il significato di "numero primo" deve fare obbligatoriamente riferimento a tutta la matematica, ad esempio al significato di "misura di Lebesgue"? È insomma possibile stabilire un confine che racchiuda il settore del linguaggio che influenza un termine assegnato?
26. Dal punto di vista pratico, un olismo radicale rischierebbe di paralizzare ogni attività di comprensione. Sarebbe dunque lecito, ovvero sensato, augurarsi di suddividere il linguaggio (della matematica e probabilmente non solo) in più settori indipendenti o almeno in qualche modo autosufficienti. Dummett sostiene che tra l'atomismo e l'olismo potrebbe inserirsi un qualche molecolarismo (Dummett, 1996).
27. Un approccio di questo genere porterebbe senza dubbio ad una visione dell'apprendimento più accettabile: non sarebbe ragionevole pensare che un linguaggio (ad esempio quello che usiamo in matematica) possa essere imparato tutto insieme.
28. Lo sviluppo del pensiero e quello del linguaggio, pur non coincidendo, si influenzano reciprocamente (Vygotskij, 1990).
29. Un vocabolario rischia comunque di restare sempre un circolo vizioso. Questa è forse la ragione per cui, almeno in matematica, i concetti primitivi sembrano ineliminabili: ma il ricorso ai concetti primitivi risolve davvero e definitivamente il problema? È cioè possibile, fissati (come?) alcuni termini primitivi (perché proprio quelli?), stabilire delle regole certe per interpretare ogni altra parola?
30. E si può dissentire da tali regole?
31. Fish osserva che il lettore è «corresponsabile nella produzione del significato, di un significato a sua volta ridefinito come un evento piuttosto che un'entità» (Fish, 1987, p. 7). Uno scritto di matematica è assai indicativo in proposito: c'è un continuo rinvio semantico e

progettuale tra l'autore e il lettore, dunque il lettore-coautore. Basti pensare alla semantica del termine "postulato" (D'Amore, 1998).

«Man mano che i matematici acquistano esperienza, il loro punto di vista può slittare rispetto a quelle che essi considerano verità inoppugnabili – sempre che ci sia *qualcosa* che essi considerano verità inoppugnabile. Un compromesso ragionevole è prendere un *qualche* corpo di credenze e principi come verità inoppugnabili, e di argomentare di lì in avanti»

R. Penrose (1998, p. 103)

32. Resnik si domanda (forse non a torto): che cos'è che funge da evidenza *conclusiva* per gli assiomi matematici? (Resnik, 1997).
33. Il problema sul quale confrontarsi potrebbe essere il valore sociale da attribuire ad eventuali regole che pretendessero di essere universali. Possiamo pensare di stabilire le regole che stabiliscono i significati dei termini una volta per tutte? (Wittgenstein, 1971, III, § 2) Non si dà il caso che elaboriamo, aggiungiamo, modifichiamo i significati – «make up the rules as we go along»? (Wittgenstein, 1999, § 83; Marconi, 2000).

«Col suo ricorso descrittivo all'uso della lingua acquisito fattualmente, Wittgenstein livella (…) la dimensione cognitiva del linguaggio. Non appena le condizioni di verità che bisogna conoscere per poter impiegare correttamente proposizioni assertorie vengono ormai desunte soltanto dalla prassi linguistica *cui si è assuefatti*, scompare la differenza tra validità e valore sociale – ciò a cui siamo legittimati viene assimilato a ciò cui ci siamo semplicemente abituati»

J. Habermas (2001, p. 80)

34. Nelle lingue naturali, nota Carnap, le convenzioni giocano un ruolo non sempre facile da determinare. Ma la situazione per i linguaggi artificiali è ben diversa: in questo caso sembra cioè possibile stabilire rigorosamente alcune *verità* convenzionali (Origgi, 2000, p. 35; Pasquinelli, 1995).
35. L'impostazione assiomatico-deduttiva offre qualche buona possibilità di risolvere l'apparente dissonanza tra i principi teorici di Frege: all'inizio vengono individuate alcune parole (ad esempio punto, retta eccetera) e il loro significato viene fissato stabilendo certe caratteristiche che legano tali parole (ad esempio si dice che per ogni coppia di punti distinti esiste al più una retta alla quale essi appartengono). In questo senso è salvo il principio del contesto: il significato di quelle parole viene determinato nel contesto creato dagli assiomi. Tutte le altre formulazioni, definizioni o affermazioni, derivano il proprio significato da quanto inizialmente scelto: è salvo il principio di composizionalità.

«La matematica compiuta presentata in forma compiuta appare come puramente dimostrativa, consistente solo di dimostrazioni. Ma la matematica in formazione assomiglia a ogni altra conoscenza umana in formazione. Si deve congetturare un teorema prima di dimostrarlo; si deve congetturare l'idea della dimostrazione prima di sistemare i dettagli. Si devono combinare osservazioni e seguire analogie; si deve provare e riprovare»

G. Polya (1954, p. VI)

36. La famosa metafora di Otto Neurath che Quine ha posto come epigrafe a *Word and Object*: come il marinaio è costretto a riparare la propria barca in mare aperto, così l'impresa conoscitiva non può uscire da sé stessa, dalla scienza, e valutarsi dall'esterno (Quine, 1996; Origgi, 2000, p. 13). Da questo punto di vista la matematica sembrerebbe obbligata a cercare in sé stessa il proprio significato; ma lo stesso Quine, citando Poincaré, afferma che la matematica «non ha come unico scopo di contemplare eternamente il proprio ombelico» (Quine, 1975, p. 150).
37. Spesso diciamo che 0=1 è un *assurdo*, cioè una contraddizione in sé. Ma la singola affermazione 0=1 non è una *contraddizione in sé*: 0=1 è assurdo solo perché tra i fatti che noi pensiamo veri c'è $0\neq1$. Dunque l'assurdo è $(0=1)\wedge(0\neq1)$ (Lolli, 2005, p. 113). Il punto chiave è capire chi o che cosa ci obbliga ad ammettere che $0\neq1$.
38. È perfettamente assurdo pensare che 0 e 1 siano la stessa cosa: è contro l'intuizione, non è una congettura che ha bisogno di una dimostrazione, di una giustificazione. Come sarebbe assurdo pensare all'esistenza di un'acqua che sia limpida e bianca (Wittgenstein, 1982b).

«Le congetture devono essere verificate. Questo è *politically correct*, ma anche imbarazzante: se occorre una verifica, l'intuizione in sé non sarebbe quindi sufficiente, non sarebbe una fonte di conoscenza»

G. Lolli (2002, p. 97)

39. È assurdo pensare che esista un'acqua che sia limpida e bianca. Qui però l'assurdo è diverso: le proprietà "bianca" e "limpida" non sono una la negazione dell'altra. Il fatto è che «non si può descrivere l'aspetto che avrebbe una cosa bianca e limpida; e ciò significa: non si sa quale descrizione si richieda a un tizio con queste parole» (Wittgenstein, 1982b, § 187).

«Non possiamo considerare la matematica vera puramente per convenzione a meno che tutti quei principi logici ai quali si suppone si riduca la matematica non siano anch'essi veri per convenzione»

W.V.O. Quine (1975, p. 151)

40. La matematica può (ovvero deve) puntare tutto su di un'impostazione assiomatico-deduttiva?
41. La logica del XX secolo ha raffreddato gli entusiasmi.

«Come Donald Davidson io vedo la costruzione di una teoria della verità – o piuttosto di una generale nozione di verità secondo un'interpretazione arbitraria – come lo scopo fondamentale di una seria sintassi e semantica»

R. Montague (1974, p. 188)

42. Per Quine il logicismo, l'intuizionismo e il formalismo si differenziano innanzitutto per l'impostazione ontologica (Quine, 1986): allora gli enti matematici sarebbero rispettivamente oggetti platonici, concetti mentali, entità fittizie. Si tratta di scegliere (operazione tutt'altro che banale).
43. Nella visione dell'empirismo logico, le verità matematiche possono ridursi a verità logiche che sono tali grazie alle convenzioni linguistiche stabilite all'interno dei linguaggi logici. Quine, come sappiamo, contesta tale convenzionalismo (Origgi, 2000, pp. 5-6).

«La cultura dei nostri padri è un tessuto di enunciati. (…) È una cultura grigia, nera di fatti e bianca di convenzioni. Ma non ho trovato alcuna ragione sostanziale per concludere che vi siano in essa fili del tutto neri o altri del tutto bianchi»

W.V.O. Quine (1975, p. 196)

44. Chi fa matematica può forse permettersi una buona dose di arbitrarietà; ma chi la comunica, chi la insegna? È impossibile non essere soggettivi: in qualsiasi forma di comunicazione lo si è.
45. La didattica della matematica può puntare tutto su di una impostazione assiomatico-deduttiva? (Kline, 1974).

«Quello che una presentazione assiomatica di un argomento di matematica *nasconde* è almeno tanto rilevante per la comprensione della matematica di quello che una presentazione assiomatica *pretende* di rivelare»

G.-C. Rota (cit. da Davis, 2000, p. 66)

46. Anche scegliendo esplicitamente di restare nell'àmbito della matematica, non sempre una proposizione ha un'unica possibile interpretazione. L'influenza dei diversi modelli di una teoria può cambiare radicalmente le cose (Kaye, 1991). L'Aritmetica di Robinson, ad esempio, è una sottoteoria dell'Aritmetica di Peano e ha per modello il modello standard costituito dai numeri naturali con le usuali addizione e moltiplicazione. Pensiamo però a un diverso modello dell'Aritmetica di Robinson al quale appartengono tutti i polinomi a coefficienti interi con coefficiente direttivo positivo: in tale modello la proposizione "esistono infiniti primi gemelli" è chiaramente vera se consideriamo "primo" un polinomio $P(x)$ irriducibile e primitivo. Infatti tutti i polinomi $x+k$ sono primi (sono irriducibili e primitivi), per ogni scelta dell'intero k (Bagni, 2002).

47. La situazione si complica: qui non si tratta di vedere se oltre a Luigi Primi e Paolo Primi, che sono gemelli, esistono al mondo altre coppie di gemelli che si chiamano Primi di cognome (in questo caso la nostra frase sarebbe comunque falsa, in quanto la popolazione mondiale è finita). Qui stiamo parlando *seriamente* di matematica! Si dirà: "Quando in un articolo di matematica ci si chiede se esistono infiniti primi gemelli, si deve pensare alle coppie (3; 5), (5; 7), (11; 13) eccetera". Ma perché un matematico non potrebbe pensare alle coppie (x+1; x+3), (x+2; x+4), (x+3; x+5), (x+4; x+6) eccetera, tutte costituite da elementi primi gemelli nel modello polinomiale dell'Aritmetica di Robinson? Queste coppie sono *sicuramente* infinite.
48. Non si scappa: il linguaggio deve essere interpretato. Continuamente, e tutto: anche quell'innocuo, comunissimo "eccetera" (Wittgenstein, 1971, II, § 46). "Adesso non sottilizziamo, un matematico quando dice eccetera si riferisce a un discorso chiaro, nel nostro caso intende dire che i primi gemelli possono essere infiniti, un'affermazione che può esprimersi rigorosamente con la quantificazione: $(\forall n)(\exists p)(\mathrm{Pr}(p)\wedge\mathrm{Pr}(p+2)\wedge(p>n))$, dove con Pr($y$) intendiamo dire che y è primo". Calma. Innanzitutto questa espressione deve essere inquadrata nel *nostro* linguaggio simbolico: siamo nel 2006, operiamo nel mondo occidentale, Newton o Euclide o un matematico cinese di appena cent'anni fa non sarebbero stati in grado di leggere la nostra *rigorosissima* scrittura; e tra qualche secolo soltanto qualche storico ricorderà a fatica quei simboli arcaici e imprecisi. Inoltre per poter mettere a fuoco il significato dobbiamo spiegare ancora parecchie cose; ad esempio dobbiamo definire il predicato Pr(y) come $(y\neq 0)\wedge(y\neq 1)\wedge(\neg(\exists a)(\exists b)((a\neq 1)\wedge(b\neq 1)\wedge(ab=y)))$. Torniamo così a pensare alla lunga, noiosa catena di rimandi, all'olismo semantico di Davidson.
49. Resta comunque il problema di stabilire che cos'è y: un numero, un polinomio? Un altro oggetto matematico?
50. Non possiamo cercare una dimostrazione partendo da dubbi di questo genere!

> «Che ne è allora della mitica certezza associata alle dimostrazioni matematiche? L'idea che ci sia una certezza speciale in matematica è un equivoco alimentato da una svista linguistica»
>
> G. Lolli (2005, p. 16)

51. Insomma: esistono infiniti primi gemelli? Finché consideriamo questa frase in senso assoluto non ne veniamo fuori.
52. E in particolare ci sorprende (magari ci infastidisce) dover ammettere che non basta decidere che stiamo parlando di *matematica*.

> «Il paradosso scompare soltanto se rompiamo in modo radicale con l'idea che il linguaggio funzioni sempre in un *unico* modo, serva sempre allo stesso scopo: trasmettere pensieri – siano questi pensieri intorno a case, a dolori, al bene e al male, o a qualunque altra cosa»
>
> L. Wittgenstein (1999, § 304)

53. Dunque per procedere è necessario riferire quella frase (ogni frase) a un contesto, a un modello più specifico e dettagliato, pensarla relativamente a molte altre frasi. E questa non è una novità (Lolli, 2005, p. 12): ogni matematico sa benissimo che 2+2 fa 4 nell'aritmetica di tutti i giorni mentre fa 1 in un'aritmetica modulo 3. Ma perché abbiamo chiamato un'aritmetica (una delle tante) "l'aritmetica di tutti i giorni"? La nostra scelta di un contesto (fra i tanti) è davvero libera? È un'operazione teorica? Dobbiamo forse individuare un contesto privilegiato pensando, ad esempio, ai legami con l'esperienza? Nel caso dell'Aritmetica di Robinson i numeri sono più concreti dei polinomi, la loro applicazione appare molto più spontanea e diretta.
54. Putnam afferma che «le questioni di interpretazione e le questioni di fatto» sono inseparabili (Putnam, 1992, p. 25). Come potremmo eludere il *dovere* di interpretare? Eppure non ogni volta che percepiamo un segno (ogni volta che, in qualche modo, lo usiamo) diamo di esso un'esplicita interpretazione (Wittgenstein, 1990a, I, § 9 e 1990b, II, § 669).

> «Se mi attengo alla massima che il significato è conferito dall'uso, allora non posso modificare il modo d'impiego di un'espressione senza modificarne anche il significato. Ma allora è fuorviante dire: "L'espressione *deve* avere un significato diverso se usata in maniera diversa". Essa semplicemente *ha* un altro significato, l'uso diverso *è* il significato diverso»
>
> L. Wittgenstein (1982a, p. 200)

55. Ogni matematico sa benissimo che 2+2 fa 4 nell'aritmetica di tutti i giorni mentre fa 1 in un'aritmetica modulo 3 *e non se ne preoccupa*. Ma non basta riconoscere l'esistenza di un problema per poterlo considerare risolto.
56. Il punto è: il modello numerico può essere usato (e viene effettivamente usato, giorno dopo giorno) per tradurre direttamente la realtà (alcuni aspetti di essa) o l'esperienza. Traduce immediatamente (nel senso di non mediatamente). Con il sofisticato modello polinomiale la traduzione è meno efficace, meno convincente (più artificiale), più fredda e lontana. Qui sarebbe più appropriato parlare di traduzione o di interpretazione?
57. Che cosa significa tradurre? Potremmo proporre molti (troppi) sinonimi: interpretare, identificare, circoscrivere…
58. Torniamo comunque a Quine. Secondo lui una *traduzione radicale* porta a situazioni di stallo: non è possibile tradurre una lingua sconosciuta nella

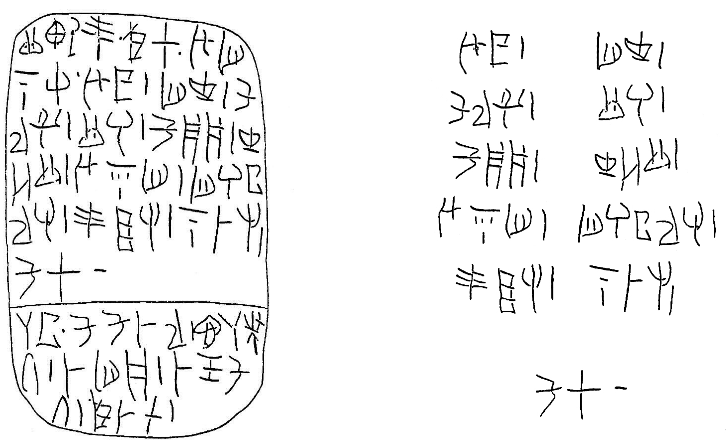
nostra lingua con certezza assoluta (ma una certezza non assoluta avrebbe ancora un qualche valore? Una certezza “non assoluta” non sarebbe più una certezza: per definizione) (Quine, 1996).

> «Manuali per tradurre una lingua in un’altra possono essere composti in modi divergenti, tutti compatibili con la totalità delle disposizioni verbali, eppure tutti incompatibili tra loro»
>
> W.V.O. Quine (1996, p. 93)

59. E possiamo spingerci addirittura oltre: non è necessario fare riferimento ad un’altra lingua. Insomma l’indeterminatezza si manifesta non solo per la *traduzione* radicale, ma anche per l’*interpretazione* radicale (Davidson, 2001 e 2003): si perde dunque la possibilità di riferirsi con una sufficiente dose di certezza a un singolo ed assoluto significato (Perissinotto, Ruggenini, 2002).
60. Le inquietanti osservazioni di Quine o di Davidson valgono anche quando si parla di matematica?

> «Di uno che applica una regola per decifrare uno scritto si può dire che compia operazioni matematiche? Eppure le sue trasformazioni si possono concepire in questo modo»
>
> L. Wittgenstein (1971, IV, § 5)

61. Un esempio può essere riferito alla scrittura lineare A, a tutt’oggi non decifrata, fondamentale per la cultura egea del II millennio a.C. Nelle tavolette PH-8 e PH-11 di Festo (1700 a.C.) compaiono sbarrette verticali interpretate come unità ed orizzontali che rappresentano decine, segni a volte abbinati a ideogrammi. La tavoletta HT-117 di Haghia Triada (1450 a.C., nella figura a sinistra) presenta una serie di sillabogrammi più difficile da interpretare.



62. Consideriamo i segni presenti dopo la seconda interpunzione (collocata tra il secondo e il terzo sillabogramma della seconda riga) e la linea che precede le ultime tre righe. I sillabogrammi prima della sbarretta orizzontale nell'ultima riga considerata sono attestati molte volte a Creta e ciò ha permesso una loro interpretazione: significano "totale" (Godart, 2001, p. 158). Se riordiniamo i segni come nella figura a destra, possiamo interpretare la tavoletta osservando che ci sono dieci tipi di oggetti diversi (che non identifichiamo), uno per tipo, seguiti dal totale (10).
63. Ci troviamo di fronte a un'addizione? Mancherebbe l'omogeneità degli addendi. Il conteggio finale sembra piuttosto riferirsi ad una collezione di elementi evidenziati dalle sbarrette verticali. In questa rappresentazione, preceduta dalla descrizione scandita dalle interpunzioni, i numerali hanno dunque ruoli diversi: quelli unitari evidenziano il coinvolgimento di un singolo elemento nella collezione da considerare (e da valutare quantitativamente); l'ultimo (10), preceduto dal termine "totale", esprime quella che oggi chiamiamo la cardinalità dell'insieme di oggetti.
64. Non abbiamo *tradotto* la tavoletta HT-117, ma abbiamo *interpretato* la sua struttura, e questa nostra interpretazione, in fondo non lontana da una traduzione radicale, non appare del tutto arbitraria. Essa si rapporta al ruolo sociale della scrittura come strumento di registrazione di dati e di beni nell'epoca dei palazzi cretesi, in particolare al passaggio da una responsabilità individuale collegata all'iniziale registrazione mnemonica alla responsabilità collettiva, fino alla formazione di un'élite culturale implicata dalla nascita di una scrittura sillabica evoluta.
65. L'esempio dell'interpretazione della tavoletta in lineare A suggerisce che il classico problema della traduzione radicale, ovvero dell'interpretazione radicale, ha aspetti diversi e delicati.

> «Forse la dottrina dell'indeterminatezza della traduzione non avrà poi un'aria tanto paradossale per i lettori che conoscono le osservazioni dell'ultimo Wittgenstein sul significato»
>
> W.V.O. Quine (1996, p. 99)

66. È comunque difficile (impossibile?) accettare una concezione privata del significato (Wittgenstein, 1999, § 202): procedendo in questa direzione rischieremmo di veder svanire ogni possibilità di comunicazione. Dobbiamo ricorrere ancora ai "giochi linguistici" di Wittgenstein per tenere la situazione sotto controllo.
67. C'è inoltre un aspetto più propriamente teorico che suggerisce una netta inversione di rotta, riassunto nella critica di Dummett a Davidson: per dare un'interpretazione dobbiamo già possedere un linguaggio (Penco, 2004, p. 167).

68. Bisogna uscire da questa frantumazione: il linguaggio ha le funzioni di rappresentare e di comunicare, dunque si rivolge sia verso il mondo che verso l'interlocutore. Parliamo infatti di una realtà intersoggettivamente intesa e facendo ciò ci rivolgiamo ad un'altra persona: questi due aspetti sono inscindibili.
69. Humboldt introduceva una distinzione ulteriore: il linguaggio ha funzioni cognitiva, *espressiva* e comunicativa. La prima rappresenta e la terza comunica, cioè produce accordo o causa obiezioni; ma c'è anche la seconda: esprime sentimenti, provoca reazioni (Habermas, 2001, p. 66). Così anche parlando o scrivendo di matematica ricercatori, insegnanti e studenti rappresentano, comunicano. E talvolta esprimono sentimenti, dubbi, paure.
70. In ogni caso, Dummett ha ragione: una teoria del significato deve essere una teoria della comprensione e passa necessariamente attraverso la conoscenza implicita del linguaggio posseduta da un parlante. Dunque deve rispecchiare il carattere pubblico del linguaggio (Penco, 2004, p. 184). Per questo (anche per questo) la comprensione della matematica non dovrebbe accettare fenomeni di indeterminatezza interpretativa?
71. Ma potrebbe subirli?

> «Finché si analizza soltanto il pensiero logicamente, e non il discorso grammaticalmente, non c'è affatto bisogno della seconda persona»
>
> J. Habermas (1981, p. 202)

72. Chi fa matematica può forse permettersi di pensare sempre in prima persona; ma chi comunica o insegna la matematica? (D'Amore, 1998).
73. L'analisi di Frege richiedeva (soltanto) la prima persona: la didattica esige un approfondimento ulteriore. Ovvero un percorso di riflessione e quindi di ricerca diverso.

> "Malgrado le sue interessanti osservazioni sull'efficacia assertoria che solo l'atto di affermazione conferisce all'asserzione, Frege si limita, in sostanza, all'analisi logica della forma di proposizioni semplici. La semantica formale esclude dall'analisi logica la dimensione comunicativa della lingua."
>
> J. Habermas (2001, p. 73)

74. Il significato di un enunciato può collegarsi ad una rete di diritti e di impegni: Brandom parla di autorizzazioni, che danno al parlante il diritto ad asserire un enunciato come vero, e di impegni, conseguenze di tale asserzione (Brandom, 2002).
75. Ciò accade chiaramente anche per la matematica: le affermazioni dei ricercatori, degli insegnanti e degli studenti, ad esempio, sono spesso

collegate ad una rete di autorizzazioni e di conseguenze e possono essere interpretate in rapporto ad esse.

76. Ogni interpretazione fa riferimento, esplicitamente o implicitamente, a delle *regole*: queste sarebbero quelle che determinano il nostro modo di agire (per la didattica pensiamo a Brousseau, a Chevallard). Ma secondo Wittgenstein esistono dei modi di seguire una regola che si manifestano in ciò che noi chiamiamo «seguire una regola» e «contravvenire ad essa» (Wittgenstein, 1999, § 201). E l'uso mantiene saldamente la propria centralità (Wittgenstein, 1971, III, § 2).
77. Secondo Searle ci sono due tipi di regole: quelle costitutive che definiscono il tipo di gioco che stiamo giocando e quelle regolative che suggeriscono le migliori strategie nell'àmbito di un gioco (Searle, 1992). Anche questa distinzione può risultare molto interessante con riferimento alla matematica.
78. Che tipo di regole seguono i ricercatori, gli insegnanti e gli studenti di matematica? Costitutive o regolative? E come seguono tali regole? Il fatto che non sia semplice mettere a fuoco la situazione in questo caso induce a pensare che seguire una regola e contravvenire ad essa sia in effetti qualcosa di più complicato di quanto sembri. Ancora una volta, dunque, si torna a Wittgenstein.
79. Per chi riflette sulla didattica della matematica è comunque centrale l'esperienza, l'evidenza empirica: i fatti che accadono, le parole pronunciate, i gesti. Non solo tutto ciò fornisce ad un osservatore esterno la possibilità di essere rilevato e interpretato per capire il comportamento del soggetto (dell'insegnante che insegna, del discente che apprende); ma, prima di tutto, l'esperienza ha fornito al soggetto stesso la possibilità di costruire i significati. C'è una qualche asimmetria di ruoli tra studenti, insegnanti e studiosi di didattica.
80. C'è chi parla e c'è chi ascolta. Ma forse non si tratta di pratiche così diverse (Fish, 1987; D'Amore, 1998).

> «Il parlare è per sua natura un ascoltare. È l'ascoltare la lingua che parliamo. (…) Noi non soltanto parliamo la lingua, ma parliamo *da* essa»
>
> M. Heidegger (1989, p. 254)

81. Nell'insegnamento-apprendimento della matematica avviene un fatto: il protagonista è il soggetto (lo studente, l'insegnante; ma spesso entrambi). Parallelamente quel fatto viene osservato: il protagonista è stavolta esterno alla scena (lo studioso di didattica). Anche in questo secondo caso però può entrare in gioco l'aspetto soggettivo della comunicazione: scattano gli effetti del contratto sperimentale (Schubauer Leoni, 1988). E forse non solo da parte degli studenti: il comportamento di chi osserva (ed è chiamato a interpretare) può essere sempre considerato neutrale?

82. Il ruolo dell'esperienza: introdurre dei segni e costruire dei significati per questi segni. Non c'è dubbio: questa costruzione (questa mediazione) avviene *socialmente* (Radford, 2003; Messeri, 2000, p. 176).

83. La conoscenza non si produce in un rapporto esclusivo tra l'individuo e il problema da risolvere: all'impostazione unidirezionale di una costruzione della conoscenza scandita da superamenti di ostacoli si sostituisce un progresso dialogico; l'allievo apprende in collaborazione con altri allievi e con l'insegnante (Radford, Boero, Vasco, 2000, p. 164). È essenziale che ogni esperienza faccia riferimento ad un'area comune: l'esperienza, dunque, non è personale, ma condivisa.

> «L'alternativa per la filosofia della matematica è se essa debba interessarsi a come la matematica è entrata nella storia e a come la si acquisisce individualmente, oppure se debba interessarsi alla matematica così com'è, com'è sanzionata in uno dei vari modi ritenuti rilevanti. (…) Nel primo caso la discussione delle origini introduce nel quadro anche elementi non matematici o pre-matematici»
>
> G. Lolli (2002, p. 37)

84. Questa condivisione ci porta inoltre a costruire una forma di comune sicurezza, quindi di certezza. In aula, studenti ed insegnanti si accostano ad un sapere: gli studenti lo fanno tutti insieme e gli insegnanti li stimolano e li indirizzano; le responsabilità di un'affermazione (della sua proposta e della sua accettazione) vengono ampiamente distribuite. Siamo così indotti a tornare precipitosamente a Brandom, alla sua rete di diritti e di impegni.

> «Le proposizioni "$a = a$", "$p \supset p$", "La parola 'Bismarck' ha 8 lettere", "Non esiste un verde che sia anche rosso" sono tutte evidenti e riguardano tutte l'essenza: che cos'hanno in comune? È chiaro che ciascuna di esse è di una specie diversa e ha un impiego diverso»
>
> L. Wittgenstein (1971, III, § 39)

85. Abbiamo una comune nozione di certezza che ci guida e ci difende, collegata ad una pratica che da sempre viene utilizzata con successo, consapevolmente o meno, nella trasmissione del sapere (la logica antica e rassicurante della matematica si è alleata con le altrettanto rassicuranti caratteristiche tradizionali della didattica).

> «C'è probabilmente molto di più, nella matematica, di quanto previsto dalle sole regole della logica»
>
> A. Sfard (1991, p. 2)

86. Tutta la nostra ricerca in didattica della matematica è tesa a conseguire sicurezza, a fornire spiegazioni certe. Le classificazioni inquadrano, le nostre teorie spiegano dettagliatamente i fatti, formulano domande e propongono (impongono) risposte: la presenza stessa di tali risposte ci soddisfa, ci rasserena.
87. Ma possiamo affermare con piena tranquillità di capire davvero ciò che i nostri allievi intendono dire? Siamo certi che loro capiscano ciò che intendiamo dire noi?
88. Un nostro allievo potrebbe parlare di un'acqua "limpida *e* bianca": e la comunicazione si farebbe difficile. Con tutte le conseguenze negative di ciò.

«La principale funzione (della filosofia) dovrebbe essere quella di accompagnare e di aiutare il costante processo sociale che introduce la matematica. (…) La matematica è un'attività pubblica. Che occorre in un contesto sociale e che ha conseguenze sociali»

N.D. Goodman (1979, p. 540)

89. Dovremmo forse rinunciare, talvolta, a spiegare i comportamenti di studenti e di insegnanti? Dovremmo riconoscere che i dati a disposizione non sono sufficienti, ovvero non sufficientemente affidabili per proporre un'interpretazione davvero certa?

«C'è una differenza, tra l'imparare a scuola quello che è vero e quello che è falso in matematica, e il fatto che io stesso dichiari che a proposito di una certa proposizione non posso sbagliarmi. Qui aggiungo qualcosa di particolare a quello che è stato stabilito in generale»

L. Wittgenstein (1978, § 664-665)

90. In conclusione: esistono infiniti primi gemelli?
91. A tutt'oggi (2006) i teorici dei numeri non sono certi della risposta da dare. Ma c'è di peggio: forse nemmeno il significato della domanda può essere considerato chiaro.
92. Ho detto "il significato": ma allora c'è una classe di matematici per i quali la domanda è chiara? Si deve lavorare per classi di individui che condividono una prassi.
93. Se qualcuno riuscirà a risolvere *matematicamente* il problema, avrà allora cambiato le cose per quanto riguarda il significato degli oggetti ai quali quella domanda si riferisce?

«L'ontologia è modificata dallo sviluppo delle scienze? Una teoria scientifica risponde alla domanda "che cosa è…" oppure la svuota?»

G. Lolli (2002, p. 48)

94. Gli enunciati della matematica non sono la descrizione di qualcosa (*Beschreibung von Etwas*): sono la cosa, la cosa stessa (*die Sache selbst*) (Gargani, 1973, p. 62) e "la matematica è linguaggio di sé stessa" (D'Amore, 1998).
95. Tarski e Gödel, rielaborando l'antica antinomia del mentitore, hanno dimostrato che la verità non è definibile: se lo fosse andremmo incontro a una contraddizione (Lolli, 2004). Naturalmente ciò non comporta che non si possa usare l'aggettivo "vero"; ma tale uso, per essere considerato legittimo, richiede la distinzione di diversi livelli di linguaggio: possiamo parlare di verità in un linguaggio solo collocandoci al di fuori di esso (Lolli, 2005, pp. 13-14).
96. E torna alla mente la famosa metafora tanto amata da Quine, con il marinaio costretto a riparare la propria barca in mare aperto…
97. I linguaggi formali, i linguaggi della logica, tuttavia, non sono rinchiusi nella ristretta concretezza di alcuna barca. Consentono un tuffo inebriante nell'astratto: tutto più elevato, tutto bello, tutto elegante.
98. Ma se Chiara, Luigi ed Elena, in aula, verso le 11 e un quarto, in una mattina un po' piovosa, ci domandano quanti sono, in effetti, i primi gemelli, che cosa rispondiamo?
99. I nostri allievi vorrebbero una risposta *concreta* e *certa*.

> «La verità è relativa alla comprensione, che significa che non vi è alcun punto di vista assoluto da cui ottenere verità assolute e oggettive sul mondo. Ciò non significa che non vi siano verità; significa solo che la verità è relativa al nostro sistema concettuale che è fondato su, e continuamente verificato da, le nostre esperienze e quelle di altri membri della nostra cultura nelle nostre interazioni quotidiane con altre persone e con i nostri ambienti fisici e culturali»
>
> R. Lakoff, M. Johnson (1998, p. 236)

100. Dobbiamo ripensare, ricordando le riflessioni con le quali Wittgenstein ci ha salutato, alla nostra comune nozione di *certezza*. Forse è un lusso che non ci possiamo più permettere.

> «Non necessariamente l'assenza completa di dubbio in un certo punto falsifica un giuoco linguistico, neppure là dove, come diremmo, può sussistere un dubbio 'legittimo'. Perché, appunto, esiste anche qualcosa come un'*altra* aritmetica»
>
> L. Wittgenstein (1978, § 375)

> «Il concetto *è stato tratto dall'uso linguistico quotidiano* e per questo sembra, a prima vista, che debba avere senso anche per i numeri»
>
> L. Wittgenstein (1971, IV, § 34)

Bibliografia

Bagni, G.T.: 2002, Congetture e teorie aritmetiche, *Archimede*, 2, 96-100.

Brandom, R.: 2002, *Articolare le ragioni*, Il Saggiatore, Milano.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J.: 1997, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*, ICE/Horsori, Barcelona.

D'Amore, B.: 1998, La crisi di identità e di valori nella essenza e nella fenomenologia della conoscenza matematica. *Encyclopaideia*, 2, 77-90.

Davidson, D.: 1978, What Metaphors Mean, *Critical Inquiry*, 5, 31-47.

Davidson, D.: 2001, The Myth of the Subjective. *Subjective, Intersubjective, Objective*, Clarendon, Oxford, 39-52.

Davidson, D.: 2003, *Verità e interpretazione*, Il Mulino, Bologna.

Davis, Ph.J.: 2000, *The Education of a Mathematician*, A.K. Peters, Natick MA.

Dell'Utri, M. (Ed.): 2002, *Olismo*, Quodlibet, Macerata.

Duhem, P.: 1906, *La théorie physique, son objet et sa structure*, Chevalier et Rivière, Paris.

Dummett, M.: 1983, *Filosofia del linguaggio. Saggio su Frege*, Marietti, Genova.

Dummett, M.: 1996, *La base logica della metafisica*, Il Mulino, Bologna.

Fish, S.: 1987, *C'è un testo in questa classe?* Einaudi, Torino.

Frege, G.: 1992, *Ricerche logiche*, Guerini, Milano.

Gargani, A.G.: 1973, *Introduzione a Wittgenstein*, Laterza, Bari-Roma.

Godart, L.: 2001, *L'invenzione della scrittura*, Einaudi, Torino.

Goodman, N.D.: 1979, Mathematics as an objective science, *American Mathematical Monthly*, 86, 7, 540-551.

Habermas, J.: 1981, *Theorie des kommunikativen Handelns*, Suhrkamp, Frankfurt a.M.

Habermas, J.: 2001, *Verità e giustificazione*, Laterza, Roma-Bari.

Heidegger, M.: 1990, *In cammino verso il linguaggio*, Mursia, Milano.

Kaye, R.W.: 1991, *Models of Peano Arithmetic*, Clarendon Press, Oxford.

Kline, M.: 1974, *Why Johnny can't add*, Vintage, New York.

Lakoff, G., Johnson, M.: 1998, *Metafora e vita quotidiana*, Bompiani, Milano.

Lolli, G.: 2002, *Filosofia della matematica*, Il Mulino, Bologna.

Lolli, G.: 2004, *Da Euclide a Gödel*, Il Mulino, Bologna.

Lolli, G.: 2005, *QED Fenomenologia della dimostrazione*, Bollati Boringhieri, Torino.

Marconi, D. (Ed.): 2000, *Guida a Wittgenstein*, Laterza, Roma-Bari.

Messeri, M.: 2000, Seguire la regola. Marconi, D. (Ed.), *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 151-192.

Montague, R.: 1974, *Formal Philosophy*, Thomason, R. (Ed.), Yale University Press, New Haven.

Origgi, G.: 2000, *Introduzione a Quine*, Laterza, Roma-Bari.

Pasquinelli, A. (Ed.): 1995, *L'eredità di Rudolf Carnap. Epistemologia, filosofia delle scienze, filosofia*, Clueb, Bologna.

Penco, C.: 2004, *Introduzione alla filosofia del linguaggio*, Laterza, Roma-Bari.

Penrose, R.: 1998, *Ombre sulla mente*, Mondadori, Milano.

Perissinotto, L., Ruggenini, M.: 2002, *Tempo e interpretazione*, Guerini, Milano.

Polya, G.: 1954, *Mathematics and Plausibile Reasoning. I. Induction and Analogy in Mathematics*, Princeton University Press, Princeton.

Putnam, H.: 1992, *Pragmatismo: una questione aperta*, Laterza, Roma-Bari.

Quine, W.V.O.: 1966, *Il problema del significato*, Ubaldini, Roma.

Quine, W.V.O.: 1975, *I modi del paradosso*, Il Saggiatore, Milano.

Quine, W.V.O.: 1986, *La relatività ontologica e altri saggi*, Armando, Roma.

Quine, W.V.O.: 1996, *Parola e oggetto*, Il Saggiatore, Milano.

Radford, L.: 2003, On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. et Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis*, 49-79, Legas, Ottawa.

Radford, L., Boero, P., Vasco, C.: 2000, Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. Fauvel, J., van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, 162-167, Kluwer, Dordrecht.

Resnik, M.D.: 1997, *Mathematics as a Science of Patterns*, Clarendon, Oxford.

Schubauer Leoni, M.L.: 1988, L'interaction expérimentateur-sujet à propos d'un savoir mathématique: la situation de test revisitée, Perret-Clermont, A.N., Nicolet, M. (Eds.), *Interagir et connaître*, DelVal, Cousset, Suisse.

Searle, J.: 1992, *Atti linguistici*, Bollati Boringhieri, Torino.

Sfard, A.: 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Vygotskij, L.S.: 1990, *Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche*, Laterza, Roma-Bari.

Wittgenstein, L.: 1971, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*, Einaudi, Torino.

Wittgenstein, L.: 1978, *Della Certezza*, Einaudi, Torino.

Wittgenstein, L.: 1982a, *Lezioni sui fondamenti della matematica*, Boringhieri, Torino.

Wittgenstein, L.: 1982b, *Osservazioni sui colori*, Einaudi, Torino.

Wittgenstein, L.: 1990a, *Grammatica filosofica*, La Nuova Italia, Firenze.

Wittgenstein, L.: 1990b, *Osservazioni sulla filosofia della psicologia*, Adelphi, Milano.

Wittgenstein, L.: 1999, *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino.

Whewell, W.: 1858, *The Philosophy of Inductive Sciences*, London.