L'educazione matematica XIX, V, 3, 2 (1998), 110-121

L'infinitesimo nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'analisi

GIORGIO T. BAGNI
NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

Summary. In this paper the idea of infinitesimal in the learning of mathematics in classroom practice is investigated, referred to Italian High School (*Liceo scientifico*, pupils aged 16-19 years). A brief historical preface is given, mentioning works by Aristotle, by Leibniz, by d'Alembert, by Euler and the contraposition of potential infinitesimal and actual infinitesimal. Then the status of some infinitesimal concepts is studied by two tests, before and after the study of the Calculus. We conclude that infinitesimal methods are tacitally considered in the sense of potential infinitesimal.

La nozione di infinitesimo assume un ruolo di primaria importanza nella didattica della matematica della scuola secondaria superiore. L'introduzione dei procedimenti infinitesimali avviene, intuitivamente, *prima* della trattazione dei concetti propri dell'analisi (si pensi alla nozione di asintoto di una curva studiata attraverso la sua rappresentazione analitica). Tale introduzione comporta l'adozione implicita di alcune concezioni da parte dell'allievo; in particolaregli studenti sono portati ad accostarsi all'infinitesimo mediante descrizioni intuitive, più vicine, come vedremo, alla nozione di infinitesimo potenziale che non a quella, impegnativa, di infinitesimo attuale.

In questo articolo presenteremo innanzitutto una breve rassegna storica delle posizioni riguardanti l'infinitesimo ([1]); quindi analizzeremo la nozione di infinitesimo indotta negli studenti della scuola secondaria superiore (con particolare riferimento al *Liceo scientifico* italiano) dalla tradizionale impostazione didattica prima e dopo lo studio dell'analisi.

1. RIFERIMENTI STORICI

Storicamente, la contrapposizione tra i concetti di infinitesimo potenziale e di infinitesimo attuale, così come quella, analoga, tra i concetti di infinito potenziale e di infinito attuale ([2]), ha radici molto antiche.

([1]) Per quanto riguarda l'uso della storia nella didattica della matematica: Weil, 1980; Grugnetti, 1992; Furinghetti, 1993; Furinghetti & Somaglia, 1997.

([2]) «Si dice che una grandezza variabile costituisce un 'infinito potenziale' quando, pur assumendo sempre valori finiti, essa può crescere al di là di ogni limite; se per esempio immaginiamo di suddividere un segmento con successivi dimezzamenti... il numero delle parti a cui perveniamo, pur essendo in ogni caso finito, può crescere ad arbitrio. Si parla invece di 'infinito attuale' quando ci si riferisce ad un ben determinato insieme, effettivamente costituito da un numero illimitato di elementi; se per esempio immaginiamo di aver scomposto un segmento in tutti i suoi punti, ci troveremo di fronte a un infinito attuale, perché non esiste alcun numero finito che riesca a misurare la totalità di questi punti» (Geymonat, 1970, I, p. 58).

Per quanto riguarda l'infinito, già Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) distingueva rigorosamente l'infinito attuale dall'infinito potenziale; l'infinito in matematica, per Aristotele, non poteva essere che del secondo tipo: egli, temendo il sorgere di paradossi (come quelli di Zenone: Arrigo & D'Amore, 1992, pp. 29-34), escludeva l'infinito attuale. La posizione aristotelica influenzò a lungo l'evoluzione dell'idea di infinito e quella di infinitesimo.

Nota B. D'Amore:

«Il divieto di Aristotele ai matematici di far uso dell'infinito attuale va interpretato come un vero e proprio dogma... Più di uno studioso arriverà, nel Medioevo e nel Rinascimento, ma anche in tempi a noi assai più vicini, a scandagliare il senso stesso dell'infinito attuale... Ma la pesante eredità dello stagirita sarà sempre presente» (Arrigo & D'Amore, 1992, p. 41).

La implicita o esplicita contrapposizione tra infinitesimo attuale e potenziale si manifestò dopo la nascita del calcolo, dunque dopo gli studi di Isaac Newton (1642-1727) e di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): l'importanza di tali concetti fu al centro della ricerca sui fondamenti dell'analisi, nel XVII secolo ([3]). Così si esprimeva Leibniz in un manoscritto del 1695:

«Quando parliamo di quantità... indefinitamente piccole (cioè, le più piccole di cui possiamo venire a conoscenza) si intende che vogliamo indicare quantità tanto piccole quanto si vuole, cosicché l'errore che si può commettere sia minore di una certa quantità assegnata» (Kline, 1991, I, p. 451).

Interessanti sono le osservazioni comunicate nel 1690 da Leibniz a John Wallis (1616-1703):

«È utile considerare quantità infinitamente piccole tali che, quando si cerca il loro rapporto, esse possono non essere considerate uguali a zero, ma che vengono respinte non appena compaiono vicino a quantità incomparabilmente più grandi. Così, se abbiamo $x+dx$, dx viene respinto. È però diverso se cerchiamo la differenza fra $x+dx$ e x. Analogamente, non possiamo avere insieme xdx e $dxdx$. Se quindi dobbiamo differenziare xy, scriveremo $(x+dx)(y+dy)-xy = xdy+ydx+dxdy$. Così, in ogni caso particolare l'errore è minore di qualsiasi quantità finita» (Leibniz, 1849-1863, IV, p. 63).

Federigo Enriques nota qualche ambiguità nel differenziale leibniziano:

«La derivazione viene considerata da lui come quoziente di due *differentiae* o (come si è detto in seguito secondo Giov. Bernoulli e L. Eulero) di due differenziali... Se questi incrementi vadano intesi soltanto in senso potenziale, cioè come quantità variabili evanescenti, ovvero staticamente come infinitesimi attuali non appare chiaramente nell'opera di Leibniz» (Enriques, 1938, p. 60).

([3]) Osserva M. Kline: «Alcuni germi della formulazione corretta dei nuovi concetti possono essere già trovati nella letteratura del Seicento. Wallis, nell'*Arithmetica infinitorum*, introdusse il concetto aritmetico del limite di una funzione come il numero avvicinato dalla funzione in modo tale che la differenza tra esso e la funzione possa essere resa minore di qualunque quantità assegnabile fino ad annullarsi quando il procedimento viene continuato all'infinito. La sua formulazione è vaga, ma contiene l'idea giusta» (Kline, 1991, I, p. 453).

Nel XX secolo, la critica contemporanea ha ripreso alcune posizioni leibniziane, giungendo ad elaborare sistemazioni interessanti, anche didatticamente, come l'analisi non-standard (4). Ma le applicazioni dei metodi infinitesimali (soprattutto per quanto riguarda l'infinitesimo attuale) ebbero, fin dall'inizio del XVIII secolo, anche attivi oppositori, come George Berkeley (1685-1753), autore di *The Analyst, or a discourse addressed to an infidel mathematician* (5).

Le critiche erano spesso espresse da matematici non professionisti, ma anche un analista come Michel Rolle (1652-1719) nutrì dubbi sulla sua sistemazione: ricorda U. Bottazzini che egli «non era affatto convinto della correttezza del calcolo leibniziano, che considerava una sorta di trucco ben riuscito» (Bottazzini, 1990, p. 27) (6). Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783) espresse perplessità sul fatto che gli infinitesimi fossero considerati come quantità nulle, pur essendo qualitativamente diversi da zero ed affermò:

«Una quantità o è qualcosa o è niente: se è qualcosa, non si è ancora annullata; se è niente, si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio tra qualcosa e niente è pura chimera» (*Mèlanges de litèrature, d'histoire et de philosophie*, pp. 249-250: Boyer, 1982, p. 521).

Così si espresse inoltre d'Alembert nell'articolo intitolato *Limite*:

«La teoria dei limiti è la vera metafisica del calcolo... Nel calcolo differenziale non si ha mai a che fare con quantità infinitesime, ma unicamente con limiti di quantità finite. Perciò la metafisica delle quantità infinite e infinitamente piccole... è completamente inutile per il calcolo differenziale» (Kline, 1991, I, p. 505).

Leonhard Euler (1707-1783) «respingeva il concetto di infinitesimo come quantità più piccola di qualunque grandezza assegnabile e tuttavia diversa da zero» (Kline, 1991, I, p. 500) (7); Euler scrisse nelle proprie *Institutiones calculi differentialis*:

(4) Scrive A. Robinson riferendosi ai fondamenti storici dell'analisi non standard: «Leibniz intuì che la teoria degli infinitesimi implica l'introduzione di numeri ideali che possono essere infinitamente piccoli... se paragonati ai numeri reali. Né lui né i suoi discepoli né i suoi successori seppero dare uno sviluppo razionale ad un tale sistema... Questi numeri ideali, governati dalle stesse leggi dei numeri ordinari, sono solo una comoda finzione, adottata per abbreviare l'argomentazione e per facilitare l'invenzione o la scoperta matematica» (Robinson, 1974).

(5) Citiamo Berkeley: «Concepire una quantità infinitamente minore di ogni sensibile o immaginabile quantità oltrepassa, lo confesso, ogni mia capacità. Ma concepire una parte di questa quantità infinitesima, tale che sia ancora infinitamente minore di essa, questa è un'infinita difficoltà per qualunque uomo» (Arrigo & D'Amore, 1992, p. 123).

(6) Si veda ad esempio l'interessante opera di Giuseppe Torelli (1721-1781) *De nihilo geometrico libri II*, pubblicata nel 1758 a Verona (Torelli, 1758).

(7) Sylvestre-François Lacroix (1765-1843) nel suo *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* introdusse il termine 'coefficiente differenziale' per indicare la derivata, $dy = f'(x)dx$ (Lacroix, 1837). Una rigorizzazione della nozione di limite, che in parte riprese idee di d'Alembert, fu merito di Augustin Louis Cauchy (1789-1857), nel *Cours d'analyse* (1821).

«Non c'è dubbio che ogni quantità può essere diminuita in misura tale da annullarsi completamente e svanire. Ma una quantità infinitamente piccola non è nient'altro che una quantità evanescente e perciò la cosa stessa è uguale a 0. Ciò è anche in armonia con quella definizione delle cose infinitamente piccole di cui si dice che sono minori di qualunque quantità assegnabile; è certo che essa dovrebbe essere nulla perché, a meno che non sia uguale a 0, sarebbe possibile assegnarle una quantità uguale, il che è contrario all'ipotesi» (Euler, 1755-1787) (traduzione in: Kline, 1991, I, p. 500).

Euler fu in grado di distinguere il differenziale di una funzione dal suo incremento, ma non sempre seguì tale distinzione. Euler dunque si preoccupò di operare una riflessione sulla natura di alcuni oggetti fondamentali del calcolo, ma, in assenza di basi precise, optò per la ricerca matematica, eludendo un rigore che avrebbe limitato le potenzialità dell'intuito (Struik, 1981).

Concludiamo dunque con le parole di M. Kline, che così riassume lo stato della ricerca sui fondamenti del calcolo infinitesimale nel XVIII secolo:

«Nel Settecento... la distinzione fra un numero molto grande e un numero 'infinito' non veniva quasi mai fatta e sembrava chiaro che un teorema valido per qualsiasi *n* dovesse valere anche per *n* infinito. Analogamente, un rapporto incrementale veniva sostituito da una derivata e non si distingueva quasi mai la somma di un numero finito di termini da un integrale» (Kline, 1991, I, p. 506).

2. STRUTTURA E METODOLOGIA DELLA RICERCA

Molti ricercatori si sono dedicati, negli ultimi anni, all'analisi delle esperienze riguardanti la didattica dell'infinitesimo e dell'infinito (alcune centinaia di titoli sono riportati in: D'Amore, 1996 e 1997); le notevoli difficoltà incontrate dagli studenti nella considerazione dell'infinito attuale, ad esempio, sono evidenziate da Tsamir & Tirosh (1992) ([8]); altrettanto rilevanti sono le difficoltà collegate ai numeri irrazionali, studiate da Fischbein, Jehiam & Cohen (1996).

La contrapposizione tra infinitesimo potenziale ed infinitesimo attuale si riflette chiaramente nella didattica della matematica; in particolare, l'innegabile valenza intuitiva della concezione potenziale dell'infinitesimo, inteso come una grandezza che può essere diminuita progressivamente e indefinitamente, può rendere preponderante il ruolo di tale concezione sul concetto, di infinitesimo attuale, matematicamente più impegnativo.

Abbiamo quindi ritenuto interessante condurre uno studio delle concezioni dell'infinitesimo presso gli studenti della scuola secondaria superiore prima e dopo lo studio dell'analisi sulla base di alcuni test. La nostra ricerca è stata orientata ad analizzare l'accostamento degli allievi al concetto di infinitesimo, sia per quanto riguarda l'infinitesimo potenziale che per quanto riguarda l'infinitesimo attuale. In particolare, abbiamo esaminato due distinti momenti del curriculum tradizionale del *Liceo scientifico*:

([8]) Scrive B. D'Amore: «Le discipline nelle quali l'infinito è potenziale sono soprattutto l'Analisi, la Geometria, l'Aritmetica; quelle nelle quali l'infinito appare studiato come attuale sono ancora l'Analisi, l'Aritmetica, la Geometria e la Logica; qui metterei anche la Teoria del caos e lo studio dei Frattali...» (D'Amore, 1996).

- l'introduzione intuitiva, nella III classe del *Liceo scientifico* (età degli allievi: 16-17 anni), di alcune situazioni geometriche infinitesimali, come la nozione di asintoto di una curva studiata attraverso la sua rappresentazione analitica (abbiamo fatto esplicito riferimento alla curva esponenziale); in tale fase abbiamo proposto agli allievi stessi di formulare alcune domande e successivamente di rispondere ad esse in un test;
- la sistemazione del concetto di infinitesimo, nella V classe del *Liceo scientifico* (età degli allievi: 18-19 anni), condotta mediante i concetti dell'analisi; abbiamo qui riproposto lo stesso test precedentemente somministrato agli allievi di III.

Possiamo dunque così sintetizzare il progetto della nostra ricerca:

Struttura della ricerca

1. L'infinitesimo nella III ***Liceo scientifico* (16-17 anni)**	**2. L'infinitesimo nella V** ***Liceo scientifico* (18-19 anni)**
Formulazione di domande sul concetto di asintoto di una curva piana (classe III)	
Test 1 (sul concetto di asintoto di una curva piana, classe III)	*Test 2* (sul concetto di asintoto di una curva piana, classe V)

3. Conclusione

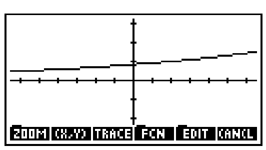
L'infinitesimo nel curriculum tradizionale del *Liceo scientifico* prima e dopo lo studio dell'analisi.

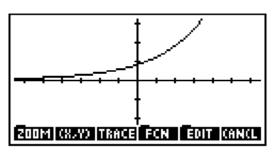
3.1. DOMANDE RIGUARDANTE GLI ASINTOTI (CLASSE III)

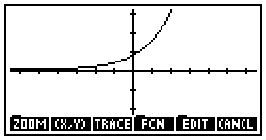
L'introduzione del grafico cartesiano della funzione esponenziale, come sopra anticipato, ci ha fornito l'occasione per analizzare il comportamento degli allievi (di 16-17 anni) di fronte agli asintoti del diagramma cartesiano di una funzione reale di variabile reale.

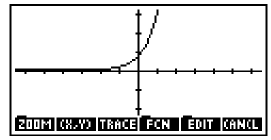
L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando una classe di III *Liceo scientifico* (età degli allievi: 16-17 anni), a Treviso, per un totale di 25 studenti, con curriculum matematico tradizionale. È stata innanzitutto introdotta agli allievi la funzione esponenziale (per basi positive e diverse da 1) sottolineando che il suo dominio è **R**. Sono stati quindi presentati i seguenti diagrammi, realizzati in classe con l'impiego di una calcolatrice grafica e proiettati mediante una lavagna luminosa, riferiti ad otto basi diverse:

- quattro di esse maggiori di 1:

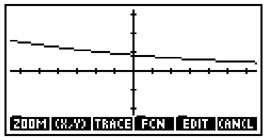
$y = (1.1)^x$ 

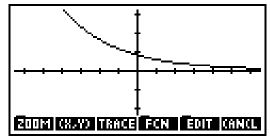
$y = (1.5)^x$ 

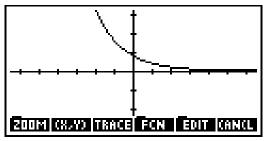
$y = 2^x$ 

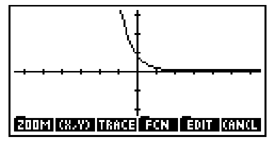
$y = 4^x$ 

- quattro di esse maggiori di 0 e minori di 1:

$y = (0.9)^x$ 

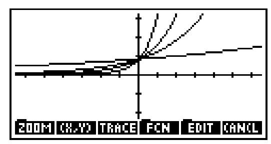
$y = (0.7)^x$ 

$y = (0.5)^x$ 

$y = (0.2)^x$ 

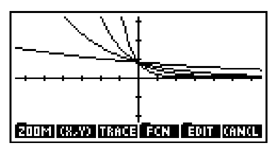
Commentando tali diagrammi è stato sottolineato che:

- le basi maggiori di 1 portano a diagrammi crescenti (che sono stati presentati nella stessa schermata); in tutti questi casi la curva ‘si trova molto vicina’ al semiasse delle x negative;



(basi maggiori di 1)

- le basi maggiori di 0 e minori di 1 portano a diagrammi decrescenti (che sono stati presentati nella stessa schermata); in tutti questi casi la curva ‘si trova molto vicina’ al semiasse delle x positive.



(basi positive minori di 1)

È stato infine direttamente verificato con l’impi ego di una calcolatrice che la funzione esponenziale è calcolabile anche per x ‘molto grandi’ in valore assoluto (nei limiti tecnici dello strumento di calcolo impiegato). In particolare, è stato constatato che:

- assumendo (alcune) basi b maggiori di 1, ad x negative e ‘molto grandi’ in valore assoluto corrispondono $y = b^x$ positive e ‘molto piccole’;
- assumendo (alcune) basi b maggiori di 0 e minori di 1, ad x positive e ‘molto grandi’ in valore assoluto corrispondono $y = b^x$ positive e ‘molto piccole’.

Al fine di analizzare la situazione di ‘vicinanza’ della curva esponenziale e dell’asse delle ascisse (ricordiamo che si trattava della prima occasione in cui gli allievi prendevano in considerazione l’asintoto di una curva) è stato proposto agli allievi stessi di formulare una domanda riguardante tale particolare comportamento, da rivolgere ai compagni di classe; gli studenti sono stati liberi di associarsi in piccoli gruppi per produrre la domanda. Il tempo concesso loro è stato fissato in 15 minuti. È stato sottolineato che la richiesta non avrebbe dovuto essere interpretata in termini coercitivi.

Dopo una breve discussione, due gruppi di allievi (che identificheremo come 'gruppo 1' e 'gruppo 2') hanno formulato una domanda ciascuno.

Proponiamo le due domande nell'ordine con cui sono state presentate:

- (gruppo 1) «Che cosa accade quando il grafico della funzione esponenziale diventa vicinissimo all'asse delle x? Si ferma? Ritorna a salire?»
- (gruppo 2) «Se il grafico della funzione esponenziale non tocca mai l'asse delle x, pur avvicinandosi sempre di più ad esso, diventerà prima o poi parallelo all'asse delle x (dato che sappiamo che due rette che non si toccano sono parallele)?»

3.2. OSSERVAZIONI SULLE DOMANDE POSTE DAGLI ALLIEVI

Le domande formulate suggeriscono alcune immediate valutazioni:

- dalla domanda del gruppo 1 potrebbe emergere un primo riferimento (implicito e comunque molto difficoltoso) ad una concezione *potenziale* dell'infinitesimo: la distanza della curva esponenziale dal proprio asintoto viene intuitivamente percepita come una grandezza progressivamente variabile (il grafico *diventa* vicinissimo all'asse delle ascisse);
- l'imbarazzo per gli allievi sorge però quando viene considerata la situazione caratterizzata dal termine 'vicinissimo'; a questo punto le ipotesi, chiaramente espresse in forma dubitativa, sono due: forse la curva 'si ferma' (situazione suggerita dai grafici realizzati con la calcolatrice?), forse essa 'ritorna a salire'.

  Gli allievi sembrano intuire la possibilità (l'esigenza?) di una *posizione limite*, una sorta di livello di vicinanza estrema raggiungibile. Ma questo livello viene spontaneamente collocato... *al finito* e tale supposizione non risulta sorretta da una qualsiasi concezione di infinitesimo attuale;
- anche dalla domanda del gruppo 2 emerge l'implicito riferimento ad una concezione potenziale dell'infinitesimo: la curva esponenziale 'si avvicina sempre di più' all'asse delle x (pur senza mai raggiungerlo);
- molto interessante è l'analisi della *situazione limite* ipotizzata dal gruppo 2: ad un certo punto, la curva, non potendo 'toccare' l'asse delle x, diventerebbe addirittura... 'parallela' ad esso ([9]). Ciò esprime il disagio derivante dal tentativo di analisi di una possibile situazione *finale*, quando cioè l'avvicinamento della curva alla retta possa essere considerato, in qualche modo, concluso.

Dunque, in un primo momento, una concezione potenziale sembra essere intuitivamente adottata dagli allievi; ma a questa prima fase seguono alcuni tentativi ingenui di *immaginare la 'conclusione' del procedimento di progressiva diminuzione della distanza tra la curva e l'asintoto*.

([9]) Viene da pensare ad una sorta di concezione pitagorica, monadica della situazione descritta: la curva e la retta, quando giungeranno ad essere separate da una sola monade, se non potranno congiungersi dovranno proseguire parallele, essendo la curva obbligata a trasformarsi in una retta...

Si potrebbe pensare che tali supposizioni siano motivate dalla difficoltà di concepire l'infinitesimo stesso: insomma, forse nei nostri allievi ritroveremmo proprio i dubbi fondamentali che tormentavano, nel Settecento, pensatori come Leibniz, d'Alembert ed Euler...

Abbiamo scelto di non procedere subito all'intervista degli allievi che hanno elaborato le due domande. Con il test 1, infatti, tutti gli allievi della classe sono stati invitati a rispondere alle domande formulate; le interviste sono state condotte dopo la realizzazione del test 1.

4.1. TEST 1 (CLASSE III)

Le due domande elaborate dagli allievi e sopra esaminate sono state proposte nella loro formulazione originale a tutti gli studenti della classe. A ciascun allievo è stato dunque proposto il seguente test (tempo accordato: 20 minuti):

> *Rispondi alle seguenti domande:*
>
> 1. Che cosa accade quando il grafico della funzione esponenziale diventa vicinissimo all'asse delle x? Si ferma? Ritorna a salire?
> 2. Se il grafico della funzione esponenziale non tocca mai l'asse delle x, pur avvicinandosi sempre di più ad esso, diventerà prima o poi parallelo all'asse delle x (dato che due rette che non si toccano sono parallele)?

Tutti gli allievi hanno riconsegnato il foglio del test; alcuni di essi (circa la metà) hanno riconsegnato il foglio prima della scadenza dei 20 minuti.

4.2. RISULTATI DEL TEST 1

Alcuni allievi hanno risposto ad una sola delle due domande, alcuni hanno riunito le due risposte in un'unica risposta; in particolare:

rispondono a entrambe le domande:	15	(60 %)
danno un'unica risposta:	5	(20 %)
rispondono soltanto alla prima domanda:	3	(12 %)
rispondono soltanto alla seconda domanda:	2	(8 %)

- Per quanto riguarda le risposte alla domanda 1, un rilevante numero di allievi (circa la metà) ha affermato, in vari modi, che il grafico della funzione esponenziale non 'si ferma' né 'torna a salire'; ad esempio:

«La curva non si fermerà mai proprio perché b è elevato ad un valore x che è incognito e può assumere qualsiasi valore. Inoltre la curva non può salire perché in questo caso descriverebbe il grafico di una parabola e naturalmente questo è impossibile» (Alessandro D.).

Il riferimento alla «parabola» è interessante: sottolineiamo infatti che la parabola è stata studiata dagli allievi pochi giorni prima del test; lo studente sembra considerare la parabola come la tipica curva simmetrica.

«La curva mantiene sempre una certa distanza dall'asse x che tenderà sempre a diminuire. Non possiamo calcolare questa distanza perché la retta è infinita» (Andrea).

La concezione di infinitesimo che emerge da questa risposta è evidentemente potenziale.

«Non si ferma e non risale. Non c'è un limite alla vicinanza tra la curva e l'asse delle x, quindi il grafico mantiene il suo andamento per quanto piccolo sia l'esponente» (Alessandro B.).

Tra le risposte significative alla domanda 1 ricordiamo inoltre le seguenti:

«Penso che la curva esponenziale tocchi l'asse delle x. Comunque non si ferma» (Angela).

«Il grafico della funzione esponenziale toccherà l'asse delle x all'infinito» (Paolo I.).

Quest'ultima affermazione, per quanto interessante, non è però giustificata in un contesto di scuola secondaria superiore.

«Dato che non può fermarsi perché il dominio è **R**, tornerà a salire' (Denis).

Riassumendo le risposte alla domanda 1:

'Il grafico non si ferma né torna a salire'	12	(48 %)
'Il grafico si ferma'	4	(16 %)
'Il grafico torna a salire'	2	(8 %)
(risposte diverse o nessuna risposta)	7	(28 %)

- Per quanto riguarda le risposte alla domanda 2, la maggior parte degli allievi ha negato il parallelismo tra la curva e l'asintoto; ad esempio:

«Il grafico della funzione esponenziale è una curva e non una retta, dunque non può essere parallelo all'asse delle x» (Serena).

Dunque il problema principale, per l'allieva, sembra essere la differenza tra una curva ed una retta.

«Credo che il grafico continui a correre anche se non proprio parallelamente all'asse delle x. Infatti la distanza si potrà scomporre in infiniti punti. Ai nostri occhi l'inclinazione sarà così piccola da essere impercettibile» (Elisabetta).

In questo caso, invece, l'allieva sembra preoccuparsi della difficoltà di percepire la differenza tra una curva ed una retta.

«Il parallelismo si ha solo se $y = 1^x$ (la retta $y = 1$). È l'unico caso» (Angela).

Si noti che il caso $y = 1^x$ non era stato considerato dall'insegnante.

«Non diventerà mai parallelo poiché la base è maggiore di zero e poiché uno spazio è divisibile in infiniti spazi» (Paolo S.).

Tra le risposte più significative alla domanda 2 ricordiamo inoltre le seguenti:

«Sì, diventano parallele perché la lunghezza è infinita» (Alessandro C.).

«Per non toccare l'asse delle x deve per forza essere parallela o tornare a salire. Penso che il grafico continui parallelo all'asse delle x, poiché sotto all'asse non può andare» (Chiara).

Questa risposta può essere interpretata in base alle considerazioni espresse nel paragrafo precedente.

Riassumendo le risposte alla domanda 2:		
'Il grafico diventa parallelo all'asse'	6	(24 %)
'Il grafico non diventa parallelo all'asse'	14	(56 %)
(risposte diverse o nessuna risposta)	5	(20 %)

- Tra le risposte ad entrambe le domande ricordiamo le seguenti:

«La curva non diventerà mai parallela all'asse, perché quando sarà molto vicina all'asse x e i punti saranno dunque allineati quasi a formare una retta il grafico si interromperà e non avrà continuazione» (Filippo).

«Secondo me la curva continua a scendere; se consideriamo y come una frazione, si potrebbe dire che il denominatore di questa frazione continua ad aumentare fino all'infinito e poiché lo spazio è composto di punti infinitamente piccoli, potrebbe darsi che la curva arrivi ad una vicinanza tale all'asse delle x che, non essendo in grado di misurare, possiamo trascurare» (Alessio).

«A prescindere dal fatto che non si tratta di rette ma di curve, il grafico non toccherà mai l'asse delle x né diventerà parallelo ad esso. Continuerà ad avvicinarglisi come un numero periodico si avvicina di poco sempre ad un numero superiore» (Carlo).

«Non potendo la curva toccare l'asse delle x, né diventare ad esso parallela, né fermarsi, la curva potrebbe avere delle oscillazioni che le permettano di non toccare l'asse delle x e di non diventare ad esso parallela» (Laura).

Gli allievi hanno manifestato un buon interesse alla problematica ad essi proposta, come confermano l'alta percentuale di soluzioni date (solo pochi si astengono dal rispondere) ed un evidente sforzo creativo per tentare di giustificare le proprie affermazioni. Interessanti sono, ad esempio, il paragone con i numeri periodici (Carlo) e il riferimento, corretto, alle frazioni (Alessio).

Un primo esame delle risposte sembra comunque confermare quanto osservato commentando le due domande formulate dagli allievi. Molti studenti sembrano aderire ad un ragionamento così schematizzabile:

- o la curva si ferma (in corrispondenza di un non meglio precisato x);
- o prosegue indefinitamente;

se essa prosegue indefinitamente (perché il dominio è **R**):

- o raggiungerà (prima o poi) l'asse delle x;
- o diventerà parallela all'asse delle x;
- o tornerà a salire.

Si arriva addirittura ad ipotizzare che il comportamento della curva sia caratterizzato da 'oscillazioni' in modo che essa non tocchi l'asse delle x senza diventare 'parallela' ad esso (si ricordi l'osservazione di Laura). ..

Solo pochi allievi hanno affermato che la distanza tra la curva e l'asintoto continua indefinitamente a diminuire, pur senza annullarsi (Elisabetta). Il concetto di infinitesimo si ricollega al concetto di densità, ed emerge la difficoltà, per molti studenti, di concepire una grandezza 'indefinitamente divisibile' in grandezze non nulle (si ricordi che Paolo S. afferma esplicitamente che uno 'spazio' può essere suddiviso 'in infiniti spazi').

Osserviamo infine che alcune clausole del *contratto didattico* sembrano indurre gli allievi ad usare una terminologia apparentemente rigorosa, ma sostanzialmente non compresa a fondo (Brousseau, 1987): affermazioni come «Il grafico della funzione esponenziale toccherà l'asse delle x all'infinito» non sono giustificabili in un contesto di scuola secondaria superiore.

4.3. INTERVISTE CON GLI ALLIEVI (TEST 1)

Alcuni allievi hanno fornito interessanti giustificazioni nelle interviste, che dunque hanno sostanzialmente confermato le impressioni sopra anticipate. Qualche affermazione merita di essere riportata:

«Se la curva e la retta si avvicinano sempre di più penso che il contatto prima o poi debba esserci; avviene all'infinito, perché se avvenisse prima, cosa succederebbe dopo? In effetti però non so bene che cosa sia l'infinito. Credo che lo studieremo più avanti» (Paolo I.).

«Ho sbagliato ad affermare che la curva si interrompe, perché al dominio appartengono tutti i numeri. Però faccio fatica a capire che cosa succede quando la curva e la retta arrivano vicinissime: prima o poi si toccheranno, e questo è impossibile perché l'esponenziale non deve annullarsi» (Filippo).

«La curva non può avere delle oscillazioni, perché altrimenti non sarebbe più sempre crescente o sempre decrescente. Non ho tenuto presente che nella spiegazione abbiamo visto che se la base è maggiore di 1 la curva è sempre crescente, altrimenti è decrescente» (Laura).

Non tutti gli allievi intervistati hanno mostrato di accettare immediatamente le contestazioni che sono state mosse alle loro osservazioni. In particolare, alcuni hanno manifestato qualche difficoltà ad accettare che una curva possa avvicinarsi indefinitamente ad una retta senza avere con essa punti in comune.

4.4. ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI (TEST 1)

Dai risultati del test e dalle interviste possiamo concludere che:

- Il concetto di infinitesimo appare ostico a molti allievi di III *Liceo scientifico*. Ciò dipende, almeno in parte, da una non chiara concezione di nozioni come la densità (se non addirittura la continuità di **R**).
- L'infinitesimo, in forma intuitiva, è potenziale. Assai frequenti sono frasi come «Credo che il grafico continui a 'correre'...» o «La curva continua a scendere perché, se consideriamo y come una frazione, si potrebbe dire che il denominatore di questa frazione continua ad aumentare fino all'infinito».
- L'infinitesimo attuale non viene considerato. Affermazioni come «Il grafico della funzione esponenziale toccherà l'asse delle x all'infinito» (Paolo I.) non appaiono consapevolmente giustificate.

5.1. TEST 2 (CLASSE V)

Per analizzare l'evoluzione delle concezioni degli allievi riguardanti l'infinitesimo abbiamo ritenuto opportuno prendere in esame una classe di V *Liceo* *scientifico*, a Treviso, per un totale di 27 allievi. Al momento del test erano già stati trattati i limiti; la definizione di limite era però stata data nella forma tradizionale per la scuola secondaria superiore (ovvero non preceduta da un rigoroso studio della topologia elementare) ([10]).

Le domande elaborate dagli allievi di III (già proposte nel test 1) sono state proposte anche a tutti gli studenti della classe esaminata (tempo: 20 minuti):

> *Rispondi alle seguenti domande:*
>
> 1. Cosa accade quando il grafico della funzione esponenziale diventa vicinissimo all'asse delle x? Si ferma? Ritorna a salire?
> 2. Se il grafico della funzione esponenziale non tocca mai l'asse delle x, pur avvicinandosi sempre di più ad esso, diventerà prima o poi parallelo all'asse delle x (dato che due rette che non si toccano sono parallele)?

Tutti gli allievi hanno riconsegnato il foglio del test; alcuni di essi (circa un terzo) hanno riconsegnato il foglio prima della scadenza dei 20 minuti.

5.2. RISULTATI DEL TEST 2

Nessun allievo ha risposto ad una sola delle due domande; alcuni hanno riunito le due risposte in un'unica risposta; in particolare:

rispondono a entrambe le domande:	20	(74 %)
danno un'unica risposta:	7	(26 %)

Dalle risposte più significative abbiamo selezionato le frasi seguenti:

«La curva si troverà sempre tra l'asse delle x ed un altro punto più in alto proprio per la continuità della materia» (Stefano).

«Quando la curva $y = e^x$ è vicinissima ad $y = 0$, essa continua ad avvicinarsi in quanto $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$. Con il concetto di limite non ha più senso dire 'vicinissima' all'asse delle x» (Alberto).

Alcuni hanno riferito il termine 'fermarsi' a una concezione temporale:

«Si può immaginare che tra la curva e l'asintoto vi sia una distanza infinita, che non potrà mai essere coperta del tutto, per quanto si prolunghi, nel tempo, la curva in direzione dell'asintoto» (Domenico).

Il riferimento del termine 'fermarsi' a questioni temporali è però talvolta considerato scorretto:

«Non ha senso parlare di 'fermarsi' perché è un concetto che include una dimensione spaziale ed una temporale. I punti sono presenti tutti contemporaneamente nello stesso istante di tempo» (Alvise).

([10]) Riportiamo una frase tratta dal libro di testo in uso nella classe: «Per introdurre il concetto di limite, consideriamo ad esempio la funzione f: D→**R**, $x\to(2x^2-8)/(x-2)$ essendo D = **R**–{2}. La funzione non è definita per $x = 2$; possiamo tuttavia calcolarla in punti che si approssimano a 2 tanto per difetto che per eccesso... A mano a mano che x si avvicina a 2, i valori di $f(x)$ si avvicinano sempre più a 8...».

Riassumendo le risposte alla domanda 1:		
‘Il grafico non si ferma né torna a salire’	24	(89 %)
‘Il grafico si ferma’	1	(4 %)
‘Il grafico torna a salire’	0	(0 %)
(risposte diverse o nessuna risposta)	2	(7 %)

Riassumendo le risposte alla domanda 2:		
‘Il grafico diventa parallelo all’asse’	2	(7 %)
‘Il grafico non diventa parallelo all’asse’	23	(86 %)
(risposte diverse o nessuna risposta)	2	(7 %)

Da quanto appare esaminando le percentuali di risposta, gli allievi della V classe potrebbero apparire più sicuri dei loro colleghi di III nel descrivere il comportamento di una curva in prossimità del proprio asintoto. La curva esponenziale, del resto, è uno degli ‘oggetti’ matematici più frequentemente impiegati nel triennio superiore (classi III-IV-V) del *Liceo scientifico*.

Per quanto riguarda le giustificazioni espresse (per iscritto), spesso è citato il limite della funzione esponenziale (per $x \to -\infty$): ben 16 allievi (59 %) hanno riportato un limite per giustificare le proprie affermazioni ([11]).

Osserviamo che viene ancora evocata una dimensione potenziale dell’infinitesimo: espressioni come «continua ad avvicinarsi...» sono impiegate con frequenza (ricordiamo del resto che la stessa tradizionale introduzione del limite nella scuola secondaria superiore fa riferimento ad un’impostazione potenziale dell’infinitesimo, come si evince dalla precedente nota 10). Domenico afferma che la distanza tra la curva ed il proprio asintoto «non potrà mai essere coperta del tutto, per quanto si prolunghi, nel tempo, la curva in direzione dell’asintoto».

Contro questa impostazione si esprime Alvise, che esclude la dimensione temporale e dunque sembra fare implicitamente riferimento ad una concezione attuale di infinitesimo.

5.3. INTERVISTE CON GLI ALLIEVI (TEST 2)

Anche alcuni studenti della V hanno fornito interessanti giustificazioni nelle interviste ed hanno sostanzialmente confermato le impressioni sopra anticipate. Alcune affermazioni meritano di essere riportate:

«Ho scritto qualcosa sulla continuità della materia ma capisco di avere sbagliato. Non credo che la materia sia continua come la retta» (Stefano).

«La parola ‘vicinissimo’, in effetti, inganna. Con il concetto di limite possiamo avvicinarci quanto vogliamo ad un punto e perciò dire ‘vicinissimo’ non ha più un senso matematico. È un modo di dire che può essere usato da chi non conosce i limiti e non si può esprimere rigorosamente» (Alberto).

([11]) Viene spontaneo ricordare la clausola del *contratto didattico* che B. D’Amore e P. Sandri hanno chiamato ‘e. g. f.’ (esigenza della giustificazione formale); la sua presenza è riscontrabile già a partire dalle scuole elementari: a loro avviso la clausola diventa sempre più vincolante con il passare degli anni, al crescere del livello scolastico di appartenenza (D’Amore & Sandri, 1997).

«Parlando di ‘distanza infinita’ intendevo dire una distanza che può essere resa più piccola ripetutamente tutte le volte che si vuole, cioè infinite volte» (Domenico).

«Per me non ha senso pensare che la distanza diminuisca nel tempo: la curva non la si disegna praticamente con una matita che passa su di un foglio di carta, la curva c'è già, noi la dobbiamo solo considerare, la immaginiamo già tutta completa» (Alvise, rispondendo a Domenico).

5.4. ANALISI DELLE INTERVISTE E CONCLUSIONI (TEST 2)

Dai risultati del test e dalle interviste possiamo concludere che:

- Il concetto di infinitesimo appare abbastanza chiaro ad alcuni allievi di V *Liceo scientifico* (ma non a tutti). Rispetto ai colleghi di III c'è una qualche evoluzione positiva per quanto riguarda la comprensione della reciproca posizione della curva esponenziale e del proprio asintoto. Il frequente impiego della curva esponenziale in esercizi e l'introduzione intuitiva del concetto di limite contribuiscono forse a tale miglioramento.
- L'infinitesimo, in forma intuitiva, è comunque ancora di tipo *potenziale*. Molti studenti fanno ancora riferimento ad espressioni come «avvicinarci quanto vogliamo ad un punto» o come «una distanza che può essere resa più piccola ripetutamente tutte le volte che si vuole». L'introduzione intuitiva (tradizionale) del concetto di limite nella scuola secondaria superiore è del resto basata su di una concezione potenziale dell'infinitesimo.
- Un implicito riferimento all'infinitesimo attuale è presente soltanto nella risposta di Alvise. L'opinione di Alvise, però, sembra riguardare globalmente la curva esponenziale piuttosto che, specificamente, la distanza tra essa ed il proprio asintoto.

6. CONCLUSIONI GENERALI

Da quanto rilevato mediante i test precedenti, possiamo concludere che l'introduzione della nozione di infinitesimo nella scuola secondaria superiore viene ad essere una fase delicata ed importante del curriculum. L'apprendimento di tale nozione deve essere attentamente controllato dall'insegnante, per evitare la formazione, nella mente dell'allievo, di misconcezioni, di idee scorrette.

Alcune difficoltà inizialmente presenti, rilevate presso gli allievi della III classe del *Liceo scientifico*, sono ricollegabili alla poco chiara impostazione di concetti quali la densità e la continuità: alcuni allievi, come abbiamo potuto constatare, ritengono che un'indefinita riduzione di una quantità finita porti necessariamente all'annullamento di tale quantità.

Queste difficoltà vengono ridotte nel corso del triennio III-IV-V *Liceo scientifico*, anche se non sempre sono del tutto superate nella V classe.

La considerazione di situazioni geometriche quali l'asintoto di una curva piana può contribuire alla formazione della nozione intuitiva di infinitesimo nella mente dell'allievo; in particolare, lo studente può essere condotto, seppure non senza difficoltà, alla considerazione di una grandezza (geometrica) suscettibile di essere indefinitamente ridotta, fino a diventare minore di una qualsiasi grandezza assegnata.

L'infinitesimo così introdotto è potenziale. Esso è spesso visto dagli allievi come un concetto 'dinamico', che prevede un effettivo 'avvicina mento' dei punti del grafico della funzione considerata a zero. È possibile supporre che il ruolo dell'infinitesimo attuale verrebbe ad essere rivalutato attraverso un'intro - duzione topologica.

Riferimenti bibliografici

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992) , *Infiniti*, Angeli, Milano.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino.

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).

Brousseau, G. (1987), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques: *Études en didactique des Mathématiques*, Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux.

D'Amore, B. (1996), L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi: *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335.

D'Amore , B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: 'l'infinito in didattica della matematica': *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

D'Amore, B. & Sandri, P. (1997), *Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante*, in via di pubblicazione.

Enriques, F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982).

Euler, L. (1787), *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum*, Galeati, Pavia (prima edizione: 1755).

Fischbein, E.; Jehiam, R. & Cohen, D. (1996), Il concetto di numero irrazionale in studenti di scuola superiore ed in futuri insegnanti: *La matematica e la sua didattica*, 3 (*Educational studies in mathematics*, 29, 1995, 29-44).

Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica: *L'educazione mate matica*, III, IV, 123-134.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione mate matica*, XVIII, V, 2, 1.

Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.

Grugnetti, L. (1992), L'histoire des mathématiques: une expérience interdisciplinaire fondée sur l'histoire des mathématiques: *Plot*, 60, 17-21.

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972).

Leibniz, G.W. (1849-1863), *Mathematische Schriften*, C.I. Gerhardt (a cura di), Ascher-Schmidt, Berlin-Halle (ristampa: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1962).

Lacroix, S.F. (1837), *Traité elementaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, 5me edition, Bachelier, Paris.

Robinson, A. (1974), *Non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam-London.

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Torelli, G. (1758), *De nihilo geometrico*, Carattoni, Verona.

Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity: *Educational studies in mathematics* 12, 151-169.

Tall, D. (1985), Understanding the Calculus: *Mathematical Teaching*, 110, 49-53.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsi stent ideas about actual infinity: *PME* XVI, 90-97, Durham (NH).

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.

Weil, A. (1980), History of mathematics: why and how: Letho, O. (ed.), *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, I, 227-236.