La matematica e la sua didattica (1997) 3, 306-319

Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi.
Esercizi standard e contratto didattico nella scuola secondaria superiore

Giorgio T. Bagni
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna

Summary. In this paper the ideas of imaginary number and of domain of a function in the learning of mathematics in classroom practice are investigated, referred to Italian High School (*Liceo scientifico*, pupils aged 16-19 years); the status of these concepts is studied by a test. We conclude that several pupils are not sure about the resolution of the traditional exercise asking "to find the domain" of a given real function.

INTRODUZIONE

Uno degli esercizi più diffusi nella pratica didattica della scuola secondaria superiore è la determinazione del dominio di un'assegnata funzione. Frequentemente allo studente viene proposta una funzione reale:

$f\colon \mathrm{D}\to\mathbf{R}$ essendo: $\mathrm{D}\subseteq\mathbf{R}$

rappresentata (unicamente) da un'espressione nella variabile x, ovvero da:

$x\to f(x)$

Quindi l'allievo è chiamato a determinare l'insieme D, inteso come il più vasto insieme costituito dai reali x tali che l'espressione $f(x)$ sia calcolabile come numero reale. Tale insieme viene detto dominio della funzione data (si vedano a tale riguardo le considerazioni critiche espresse in: Bacciotti e Beccari, 1988).

Un simile esercizio merita particolare attenzione. Didatticamente, la sua formulazione può infatti essere causa di equivoci (anche terminologici: Villani, 1986) che talvolta giungono ad ostacolare la corretta comprensione, da parte dell'allievo, di alcune importanti nozioni collegate al concetto di funzione.

DOMINIO E FUNZIONE

Il presente lavoro non intende ripercorrere le molte esperienze e ricerche didattiche collegate al concetto di funzione. Molti Autori hanno dedicato, anche recentemente, sforzi significativi all'approfondimento delle questioni collegate alla funzione, alla sua definizione ed alla sua rappresentazione (ad esempio: Vinner, 1992; Duval, 1993; Fischbein, 1993); la nostra ricerca è dedicata ad alcuni aspetti della pratica didattica (Bacciotti e Beccari, 1988).

Richiamiamo l'usuale presentazione didattica della funzione. Seguiamo Apostol (1977) che così propone una prima descrizione del concetto:

"Dati due insiemi, diciamo X e Y, una funzione è una corrispondenza che associa ad ogni elemento di X uno ed un solo elemento di Y. L'insieme X si chiama dominio della funzione" (Apostol, 1977, I, p. 62) ([1]).

Già in questa introduzione, dunque, Apostol premette alla presentazione della corrispondenza l'esplicita citazione degli insiemi X e Y nell'ambito dei quali viene definita la funzione (questa osservazione sarà importante per la nostra ricerca: Peano, 1911; Bourbaki, 1966). Poche pagine dopo, l'Autore dà una definizione formale di funzione che fa riferimento alle coppie ordinate:

"Una funzione f è un insieme di coppie ordinate $(x; y)$ in cui non ve ne siano due con lo stesso primo membro. Se f è una funzione, l'insieme di tutti gli elementi x che compaiono al primo membro delle coppie $(x; y)$ in f è detto dominio di f" (Apostol, 1977, I, p. 66) ([2]).

([1]) Il libro di T.M. Apostol è un autorevole testo universitario. Le presentazioni didattiche in manuali per le secondarie non sono tuttavia diverse; ad esempio, nel libro di testo in adozione nelle classi che saranno esaminate nel presente articolo leggiamo: "Dati due insiemi A e B, che chiamiamo rispettivamente 'insieme di partenza' e insieme di arrivo', si dice funzione o applicazione f di A in B una legge che associ ad *ogni* elemento di A *uno e un solo* elemento di B... L'insieme A viene detto dominio della funzione f" (il libro è dedicato ad allievi della 3ª Liceo scientifico, 16-17 anni).

([2]) La definizione data è, propriamente, relativa al *grafico* (Bacciotti e Beccari, 1988). Seguiamo G. Prodi: "Abbiamo... usato il termine 'relazione' per indicare un predicato in due variabili. Sia ora $R(x; y)$ una relazione che abbia senso nella teoria degli insiemi. Possiamo allora considerare l'insieme $\{(x; y): (x; y)\in A\times B \text{ e } R(x; y)\}$ cioè il sottoinsieme di $A\times B$ costituito da tutte le coppie per cui la relazione è verificata. Esso viene detto *grafico* della relazione... Nella teoria degli insiemi, spesso il termine 'relazione' viene usato nel significato di 'grafico', perciò... useremo lo stesso simbolo per indicare una relazione e il suo grafico" (Prodi, 1970, p. 31). E. Giusti nota che, operando nel modo ora ricordato, "la nozione di funzione perde il suo carattere primitivo e viene definita unicamente in termini di insiemi; corrispondentemente all'accrescersi del formalismo, viene però meno l'immediatezza dell'intuizione" (Giusti, 1983, p. 121).

Nella pratica, una funzione non è però usualmente introdotta con riferimento alle coppie (x; y); frequentemente viene privilegiato un approccio più intuitivo (come osservato in: Giusti, 1983, p. 121). Apostol nota:

"Come alternativa alla descrizione di una funzione f per mezzo della specificazione esplicita delle coppie che contiene, è normalmente preferibile descrivere il dominio di f e poi, a partire da ogni x del dominio, il modo con cui si ottiene il valore $f(x)$" (Apostol, 1977, I, p. 66) ([3]).

Ci sembra importante osservare che, ancora una volta, la precisazione del dominio della funzione considerata è parte integrante della stessa indicazione della funzione. Per assegnare una funzione è dunque necessario:

- descrivere il dominio di f;
- *successivamente*, descrivere il modo con cui si ottiene $f(x)$.

INVECE: FUNZIONE E (DI CONSEGUENZA) DOMINIO

Il procedimento precedentemente ricordato per assegnare una funzione viene effettivamente messo in pratica?

Prima di azzardare una risposta, esaminiamo qualche traccia proposta negli esami di maturità scientifica in Italia (dagli anni Settanta agli anni Novanta). Sfogliando il ricco elenco dei quesiti proposti, ci accorgiamo immediatamente che l'indicazione del dominio delle funzioni considerate viene frequentemente omessa:

"Si disegni il grafico della funzione $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ e se ne determinino i punti per i quali la distanza dal punto A (0; 1) assume valore minimo" (Sessione ordinaria, 1973).

"Si disegnino i grafici delle due funzioni $y = \dfrac{x(1-2x)}{1+2x}$ e $y = \dfrac{1}{1+2x}$ e si scrivano le equazioni dei rispettivi asintoti" (Sessione suppletiva, 1973).

([3]) G. Prodi definisce analogamente la funzione: "Una relazione definita in A×B si dice applicazione (o funzione) di A in B se per ogni $x \in$ A esiste uno ed un solo $y \in$ B tale che (x; y)$\in f$" (Prodi, 1970, p. 31). Egli annota poi: "In molte questioni non è necessario specificare il dominio e il codominio di un'applicazione, essendo sufficiente conoscere l'espressione che la definisce. Ma in certe questioni la precisazione del dominio e del codominio sono essenziali: come quando ci si chiede se un'applicazione è surgettiva, oppure se è iniettiva" (Prodi, 1970, p. 34).

'Si studi la funzione $y = \dfrac{x^3}{2x^2-1}$ e se ne disegni il grafico" (Sessione ordinaria, 1974).

Sarebbe inutile riportare un lungo elenco di esempi di questo tipo. Ci limiteremo ad osservare che in tempi più recenti la situazione non cambia:

'Si studi la funzione $y = \dfrac{2x^3-3x^2+1}{2x^2}$ e se ne disegni il grafico" (Sessione suppletiva, 1987).

'Si considerino la funzione $f(x) = \dfrac{1+x^2}{x^2}$ e la sua funzione primitiva $F(x)$ che assume lo stesso valore di $f(x)$ per $x = 1$" (Sessione ordinaria, 1988).

'Tracciare il grafico della funzione $y = xe^{-x}$" (Sessione ordinaria, 1990).

Dunque in molte occasioni, anche nei testi ministeriali, una funzione viene introdotta da una semplice formula, senza preventivamente indicare il dominio in cui tale formula deve essere considerata ([4]) (Bacciotti e Beccari, 1988, p. 46).

([4]) Non sarà inutile osservare che la consolidata abitudine di trascurare l'indicazione del dominio ha portato a qualche clamoroso infortunio. Leggiamo nella traccia proposta all'esame di maturità scientifica 1995 (sessione ordinaria): 'Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD e EFGH sono opposte ed i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che: $\overline{\mathrm{BP}} = x$. a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla seguente funzione: $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}\left(x^2-x+1\right)}$. b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti". Consideriamo il problema geometrico: l'appartenenza di P allo spigolo BF di 'lunghezza unitaria", con $\overline{\mathrm{BP}} = x$, *impone la limitazione* $0 \le x \le 1$. Pertanto non ha senso affermare (senza alcuna specificazione di dominio) che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla $y = \sqrt{\dfrac{2}{3}\left(x^2-x+1\right)}$. Sarebbe stato invece necessario indicare tale funzione precisandone il dominio, che *non* è tutto **R**. E la richiesta al punto (b) (di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, *dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti*) diventa problematica per il candidato: non è facile considerare gli asintoti di una funzione continua definita nell'intervallo chiuso e limitato [0; 1] (e... il teorema di Weierstrass?) (Bagni, 1995).

UN ESERCIZIO PER... RIFLETTERE

Restiamo nell'ambito dei testi assegnati ai candidati negli esami di maturità scientifica. Consideriamo la funzione $x \rightarrow f(x)$ proposta nella prova scritta di matematica del 1989 (sessione ordinaria), espressa da:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

Come al solito, il dominio non è preventivamente indicato nella traccia.

Ebbene: *qual è il dominio di questa funzione?*

Se cerchiamo un insieme $D \subseteq \mathbf{R}$ affinché il denominatore sia non nullo e la radice quadrata sia reale, dobbiamo imporre la condizione:

$$x>1$$

Ma... attenzione: a $x = 0$ (considerato come numero complesso) corrisponde $f(0) = \frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ (gli studenti liceali dovrebbero sapere bene che lo 0 complesso diviso per un numero complesso non nullo dà sempre come quoziente lo 0 complesso).

La situazione può allora risultare delicata: abbiamo visto che $f(0) = 0$ (e l'allievo potrebbe chiedersi: ci si riferisce allo zero in **R** oppure allo zero in **C**?); ciò potrebbe indurre a considerare 0 come appartenente al dominio di f; ma per eseguire il calcolo di $f(0)$ è necessario considerare lo 0 come elemento di **C** ed estrarre quindi (sempre operando in **C**) la radice quadrata di -1: tutto ciò porta a *non* considerare 0 come appartenente al dominio di f...

In situazioni come quella ora descritta sarebbe evidentemente consigliabile precisare a priori il dominio in cui è definita la funzione in esame, al fine di evitare ogni ambiguità di interpretazione. Proprio la funzione ora ricordata sarà utilizzata per esaminare le opinioni di alcuni studenti.

METODOLOGIA DELLA RICERCA

L'analisi del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando attraverso un test 75 studenti, provenienti da:

- una classe 3ª Liceo scientifico (allievi di 16-17 anni), a Treviso, per un totale di 26 studenti;
- una classe 4ª Liceo scientifico (allievi di 17-18 anni), a Treviso, per un totale di 24 studenti;
- una classe 5ª Liceo scientifico (allievi di 18-19 anni), a Treviso, per un totale di 25 studenti.

Le tre classi sono state esaminate separatamente.

In tutte le classi era stato svolto, al momento del test, un programma tradizionale di matematica; in particolare, gli allievi conoscevano i numeri complessi (introdotti nella classe 2ª) e le operazioni elementari con essi; conoscevano i concetti di funzione e di dominio di una funzione (introdotti nella classe 1ª e ripresi all'inizio della classe 3ª, come sopra anticipato nella nota 1).

A ciascuno studente è stata inizialmente consegnata la scheda seguente:

Scheda A

Indica il dominio della funzione $x \rightarrow f(x)$ espressa da:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

Agli studenti sono stati concessi 5 minuti per dare una risposta alla domanda riportata sulla scheda A. Quindi le schede A sono state ritirate; ogni allievo che ha dato una risposta diversa da $\{x \in \mathbf{R}: x > 1\}$ è stato intervistato (singolarmente), al fine di comprendere le motivazioni di tale risposta; ad ogni allievo che ha risposto $\{x \in \mathbf{R}: x > 1\}$ è stata invece fornita la scheda seguente:

Scheda B

Considera la seguente scrittura:

$$\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$$

È vera o è falsa?

Agli studenti sono stati concessi 5 minuti per dare una risposta alla domanda riportata sulla scheda B.

Quindi le schede B sono state ritirate ed è stata fornita a ciascun allievo che ha compilato la scheda B la scheda seguente:

Scheda C

Confronta quanto hai scritto nelle schede A, B.

Dopo avere risposto alla domanda della scheda B, daresti la stessa risposta alla domanda della scheda A? Perché?

Ad ogni allievo sono state mostrate le proprie schede A, B, con l'invito a non intervenire più su di esse.

Per rispondere sono stati concessi 5 minuti ([5]).

RISULTATI DEL TEST

Scheda A

Classi (età)	3ª (16-17)	4ª (17-18)	5ª (18-19)	Totale
$\{x\in \mathbf{R}: x>1\}$	18	20	23	61 (81%)
$\{x\in \mathbf{R}: x\geq 1\}$	4	3	2	9 (12%)
$\{x\in \mathbf{R}: x\neq 1\}$	2	1	0	3 (4%)
$\{x\in \mathbf{R}: x>0\}$	2	0	0	2 (3%)

Le schede B e C sono state fornite a 61 allievi (coloro i quali hanno risposto $\{x\in \mathbf{R}: x>1\}$ alla domanda della scheda A).

Nei risultati seguenti, le percentuali sono riferite agli allievi che hanno effettivamente compilato le schede B e C.

Scheda B

Classi (età)	3ª (16-17)	4ª (17-18)	5ª (18-19)	Totale
Vera	11	10	16	37 (61%)
Falsa	7	10	7	24 (39%)

([5]) Alla coerenza nelle risposte degli allievi sono dedicate alcune ricerche (a partire da Piaget, 1980; Tirosh, 1990). Citiamo P. Tsamir e D. Tirosh: "Molti studi rivelano che spesso gli allievi hanno idee mutuamente incoerenti, occasionalmente come risultato di intuizioni primarie (Fischbein, 1987; Kahnemann, Slovic and Tversky, 1982). Spesso gli studenti ritengono ciascuna di tali incompatibili idee autoevidente. In molti casi è plausibile che solo uno specifico intervento didattico risolverà le incoerenze (Fischbein, Nello and Marino, 1991)... Negli ultimi dieci anni sono stati proposti approcci didattici per risolvere le incoerenze, tra i quali l'"insegnamento per conflitto" (Swan, 1983), l'"insegnamento per analogia" (Strauss and Bichler, 1988) e l'"approccio all'ambiente generico" (Tall, 1990). È stato mostrato che il metodo dell'insegnamento per conflitto, basato sull'elevamento della consapevolezza degli studenti delle contraddizioni nelle loro opinioni e della non legittimità di ciò in matematica, può essere efficace per rimuovere e per correggere molte misconcezioni (Tirosh and Graeber, 1990). Tuttavia, non è stata dedicata sufficiente attenzione alle reazioni degli studenti messi di fronte alle negazioni di proprie affermazioni" (Tsamir e Tirosh, 1997).

Scheda C

Classi (età)	3ª (16-17)	4ª (17-18)	5ª (18-19)	Totale
Confermo	12	13	16	41 (67%)
Non confermo	4	7	5	16 (26%)
Incerti	2	0	2	4 (7%)

PRIME CONSIDERAZIONI SUI RISULTATI

I risultati del test, descritti nel paragrafo precedente, e l'analisi dei protocolli suggeriscono le seguenti considerazioni:

- Gli allievi sono in media ben preparati ad affrontare esercizi tradizionali del tipo "Determina il dominio della funzione...". La percentuale di coloro che hanno risposto $\{x \in \mathbf{R}: x>1\}$ alla domanda della scheda A (81%) è elevata.
- La questione riguardante la verità o la falsità di $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ è interessante: gli studenti sembrano suddividersi in due gruppi, entrambi consistenti, ed il 39% degli allievi (i quali, lo ricordiamo, hanno tutti trattato i complessi e le operazioni con essi) afferma che tale scrittura è falsa.
- Anche le risposte date alla domanda della scheda C confermano la presenza di perplessità negli allievi. Alcuni di essi (il 26%) ritengono di dover cambiare la risposta relativa al dominio della funzione $x \to \frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

Prima di passare ad un'analisi più completa dei risultati, è sembrato indispensabile prestare attenzione al commento degli allievi: pertanto gli studenti sono stati intervistati (singolarmente, ma alla presenza di tutti i compagni, in aula) ed hanno fornito le spiegazioni riportate nel paragrafo seguente.

INTERVISTE CON GLI ALLIEVI

Un primo gruppo di interviste ha visto come protagonisti gli allievi che, alla domanda riportata nella scheda A, non hanno risposto $\{x \in \mathbf{R}: x>1\}$. Da tali interviste è emerso che queste risposte sono state causate da sviste o da dimenticanze (ad esempio, chi ha risposto $\{x \in \mathbf{R}: x \geq 1\}$ ha ammesso di aver considerato la radice ma non la presenza del denominatore). Tutti gli allievi hanno riconosciuto gli errori ed hanno accettato le correzioni.

Un secondo gruppo di interviste ha visto come protagonisti gli allievi che hanno compilato tutte le schede A, B, C.

Osserviamo innanzitutto che molti studenti intervistati hanno manifestato perplessità ed incertezze, nonostante abbiano infine optato per una posizione abbastanza netta nelle riposte date. Ciò conferma che la stessa struttura dell'esercizio proposto è causa di qualche dubbio negli allievi.

È interessante riportare alcune osservazioni espresse.

Tra gli allievi che reputano vero che $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ e che ritengono 0 appartenente al dominio della funzione considerata (quindi che accettano di cambiare la risposta data nella scheda A), segnaliamo le osservazioni:

"Il risultato di $f(0)$ è 0 ed è quindi un numero reale accettabile. Se il risultato fosse stato $\sqrt{-1}$, cioè irrazionale, non l'avrei accettato. Lo 0 appartiene al dominio e credo che appartengano al dominio anche altri numeri minori di 1, ma dovrei aver più tempo per provare; però resta la condizione $x \neq 1$ perché non si annulli il denominatore" (Valentina, classe 3ª, che per un lapsus parla di 'irrazionale' intendendo 'immaginario').

"0 è reale e appartiene al dominio. È come se dividessi $2i$ per i: avrei 2, reale, e lo accetterei nel dominio, anche se all'inizio non avevo considerato questa possibilità" (Andrea T., classe 4ª).

"$f(0) = 0$ perché 0 diviso un numero qualsiasi, non nullo, dà 0. Quindi il dominio è $\{x \in \mathbf{R}: x > 1 \vee x = 0\}$" (Enrico, classe 4ª). L'opinione di Enrico è stata espressa in forma equivalente da alcuni altri allievi.

"Il quoziente 0 è reale, anche se ho dovuto usare un complesso. Ma la funzione è data proprio dal quoziente e dunque accetto 0 come punto del dominio" (Linda, classe 4ª).

"Il valore $x = 0$ non annulla il denominatore e quindi non rende impossibile la frazione. La presenza di $\sqrt{-1}$ in sé non è impossibile, nei numeri complessi. Il risultato poi è un numero reale. Dunque mi sembra che 0 possa essere accettato nel dominio" (Maria Teresa, classe 5ª).

"Se io considero il procedimento pratico di calcolo di $f(0)$ suddiviso in passi, devo ad un certo punto estrarre la radice di –1 e poi dividere 0 per il risultato di questa estrazione. È chiaro che in questo modo uscirei dai numeri reali. Ma io non penso a questo modo di calcolare $f(0)$: per me si tratta di una corrispondenza, di un modo di collegare direttamente 0 a 0, senza passaggi intermedi" (Andrea M., classe 5ª).

La posizione di Andrea M. (che riprende in parte quella precedentemente espressa da Linda) è interessante: viene distinto con chiarezza il valore della funzione dal procedimento per ottenere tale valore.

"In sé lo 0 dovrebbe essere accettato nel dominio perché la sua immagine è in effetti un numero reale. Credo però che non sarebbe accettabile nelle applicazioni, cioè quando la funzione è impiegata per rappresentare qualcosa di concreto, perché in questo caso mi troverei ad operare su quantità non reali" (Giampaolo, classe 5ª).

Interessante è anche quest'ultima affermazione, nella quale viene ipotizzata una qualche applicazione della funzione in esame. Analizzeremo le interviste nel paragrafo seguente.

Tra gli allievi che ritengono falso che $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ e che non ritengono 0 appartenente al dominio della funzione considerata (quindi che non accettano di cambiare la risposta data nella scheda A), segnaliamo le osservazioni:

"Non posso calcolare la funzione in $x = 0$ perché 0 non appartiene al dominio" (Anna, classe 3ª). L'opinione di Anna è stata espressa in forma equivalente da alcuni altri allievi.

"La radice di un numero negativo non esiste in **R**. Dunque l'espressione non può essere calcolata" (Carlo, classe 4ª).

Tra gli allievi che ritengono vero che $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ ma che non ritengono 0 appartenente al dominio della funzione considerata (quindi che non accettano di cambiare la risposta data nella scheda A), segnaliamo le osservazioni:

"$f(0)$ sarebbe 0 in **C**, e dunque l'uguaglianza è vera. Ma non è vera con i reali e quindi lo 0 per me non appartiene al dominio, che è costituito da numeri reali" (Alessandro, classe 3ª).

"Il fatto che sia $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ non mi costringe a cambiare il dominio. Le funzioni sono operazioni tra numeri reali che devono essere calcolate sempre con i numeri reali. Per calcolare $\sqrt{-1}$ non posso usare i reali e questo mi fa capire che $x = 0$ non può stare nel dominio" (Sabrina, classe 4ª).

La maggior parte delle giustificazioni fornite dagli allievi che, pur ritenendo vera la scrittura proposta nella scheda B, non considerano 0 elemento del dominio possono essere ricondotte alle giustificazioni precedenti.

ANALISI DELLE INTERVISTE

> "E già non havvi mistero alcuno che due immaginarj moltiplicati insieme diano un reale, perché nascendo l'immaginarietà coll'estrarre la radice seconda da −1, per cagion d'esempio, è necessario che alzando a podestà seconda questo radicale immaginario si restituisca la quantità reale −1, il che ben inteso svanisce ogni paradosso... Né deve far meraviglia che un immaginario diviso un immaginario dia un reale, perché il rapporto di continenza tra due immaginarj può essere reale".
>
> Vincenzo Riccati e Girolamo Saladini
> *Istituzioni Analitiche*, I, c. III, 1776

Le prime considerazioni sui risultati del test, abbinate a quanto emerso dalle interviste agli allievi, riportate nel paragrafo precedente, consentono la precisazione delle conclusioni seguenti.

- L'esercizio tradizionale del tipo "determina il dominio della funzione..." è causa di alcune perplessità negli allievi. Molti di essi, sebbene tecnicamente ben preparati a risolvere esercizi del genere, incontrano rilevanti difficoltà interpretative: che cosa significa "determinare il dominio" di una funzione f assegnata? Si deve forse trovare il più vasto sottoinsieme di **R** costituito da x tali che $f(x)$ sia reale? Ma perché proprio il più vasto? E che significa, praticamente, "tale che $f(x)$ sia reale"? Significa semplicemente che $f(x)$ deve essere un numero complesso con parte immaginaria nulla? Oppure significa che $f(x)$, oltre ad essere un complesso con parte immaginaria nulla, deve essere calcolabile senza mai impiegare, nei calcoli, numeri complessi con parte immaginaria non nulla?

Non vogliamo certo affermare che a tali domande non possano essere date risposte sensate e coerenti: ma tali risposte, sulle quali si basano le "regole del gioco" per la risoluzione dell'esercizio in questione, dovrebbero essere esplicitamente dichiarate agli allievi. E ciò, invece, molto spesso non avviene, con le ben comprensibili conseguenze in termini di dubbi e di pericolose incertezze negli studenti.

- Il *contratto didattico* influenza chiaramente il comportamento degli allievi: la consolidata abitudine ad escludere il ricorso alle quantità immaginarie porta molti allievi (che peraltro hanno ben conosciuto e trattato nei propri studi il corpo complesso) a bloccarsi immediatamente di fronte al primo manifestarsi di un numero complesso con la parte immaginaria non nulla. Tutto ciò avviene, in diversi casi, anche a costo di provocare un'incoerenza tra due risposte date.

- Quando gli allievi si trovano di fronte ad un'incoerenza reagiscono in modi diversi ([6]): alcuni riconoscono come inaccettabile l'incoerenza e scelgono di intervenire per correggere una delle affermazioni in conflitto (ad esempio cambiano il dominio della funzione in questione); altri mantengono invece le proprie opinioni e provano a conciliarle, talvolta con riferimento a contesti matematici diversi (ad esempio, con riferimento ad operazioni da svolgere in **R** e in **C**). Notiamo che anche in questo caso è presente l'influenza del *contratto didattico*: il fatto di avere, in precedenza, stabilito un dominio per la funzione f al quale non appartiene l'elemento 0 fa sì che alcuni allievi non prendano neppure in considerazione la possibilità di calcolare un'espressione equivalente a $f(0)$. Nulla può accadere al di fuori del dominio... ([7]).

CONCLUSIONE

È data la funzione $x \rightarrow f(x)$ espressa da:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$$

Ebbene... *qual è il suo dominio?*

([6]) Quanto ora emerso può essere posto in relazione con i risultati di P. Tsamir e D. Tirosh, che così concludono la descrizione delle interviste in una loro ricerca: "Ognuno dei 20 studenti che hanno dato risposte incompatibili... è stato stimolato ad indicare qualche possibile modo di risolvere la contraddizione. Le loro risposte possono essere inquadrate nelle due seguenti categorie: (a) Sei studenti hanno riconosciuto ed identificato che due affermazioni contraddittorie sono reciprocamente incompatibili, ma hanno ritenuto tale situazione lecita in matematica... (b) Quattordici studenti hanno identificato le componenti contraddittorie di una situazione incoerente ed hanno identificato la situazione come problematica" (Tsamir e Tirosh, 1997).

([7]) Sono grato a Fabrizio Monari (Monghidoro, Bologna) per alcune indicazioni bibliografiche e per gli stimolanti suggerimenti; ad esempio, mi segnala l'interessante funzione espressa da $y = \frac{\sqrt{-x}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}$. Il suo dominio (in campo reale) sembrerebbe "evidentemente" vuoto (le "condizioni" $x \leq 0$ e $x > 1$ sono incompatibili!), ma che cosa accade per $x \in [0, 1[$? Ad esempio, per $x = \frac{1}{3}$, si avrebbe $y = \sqrt{\frac{1}{2}} + 1$, che è... un numero reale (ovvero, più precisamente, un numero complesso con la parte immaginaria nulla).

Bibliografia

Apostol, T.M. (1977), *Calcolo*, I, Boringhieri, Torino.

Bacciotti, A. e Beccari, G. (1988), Problemi didattici nel corsi universitari: l'introduzione del concetto di funzione, *Archimede*, XL, 41-49.

Bagni, G.T. (1995), Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1995, *La matematica e la sua didattica*, 1995, 4, 520-521, Pitagora, Bologna.

Bourbaki, N. (1966), *Eléments de mathématiques*, I, *Théorie des Ensembles*, Chapitre II, Hermann, Paris.

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Reidel, Dodrecht, Holland.

Fischbein, E., Nello, M.S. and Marino, M.S. (1991), Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 523-549.

Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.

Giusti, E. (1983), *Analisi Matematica 1*, Boringhieri, Torino.

Kahneman, D., Slovis, P. and Tversky, A. (1982), *Judgement under uncertainity, heuristic and biases*, Cambridge University Press, New York.

Peano, G. (1911), Sulla definizione di funzione, *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, 3-5.

Piaget, J. (1980), *Experiments in contradictions*, Chicago, The University of Chicago Press.

Prodi, G. (1970), *Analisi matematica*, Boringhieri, Torino.

Riccati, V. e Saladini, G. (1776), *Istituzioni Analitiche*, I, II, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna (compendio e versione italiana a cura di G. Saladini; la prima edizione, in latino, è del 1765-1767).

Strauss, S. and Bichler, E. (1988), The development of children's concepts of arithmetic average, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19, 64-80.

Swan, M. (1983), *Teaching decimal place value. A comparative study of "conflict" and "positive only" approaches*, University of Nottingham, Shell Centre of Mathematical Education, Nottingham.

Tall, D. (1990), Inconsistencies in the learning of calculus and analysis, *Focus on Learning Problems in Mahematics*, 12, 49-64.

Tirosh, D. (1990), Inconsistencies in students' mathematical constructs, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 111-129.

Tirosh, D. and Graeber, A. (1990), Inconsistencies in preservice elementary teachers' beliefs about multiplication and division, *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 12, 65-74.

Tsamir, P. e Tirosh, D. (1997), Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito, *La matematica e la sua didattica*, Bologna (in corso di stampa).

Villani, V. (1986), Notazioni e convenzioni in matematica, *Archimede*, XXXVIII, 67-70.

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics, Harel, G. and Dubinsky E. (eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, pp. 195-213, 1992.