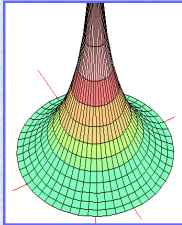


Udine, 26 settembre 2007

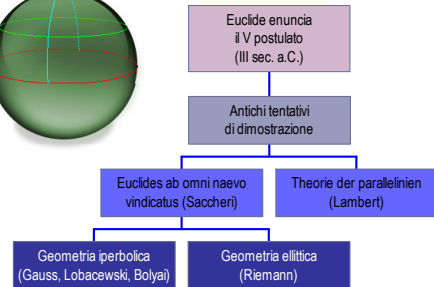
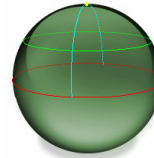
Geometrie non-euclidee



Giorgio T. Bagni

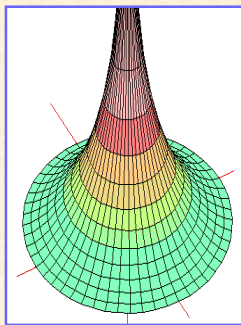
Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Pro e contro *Euclide*: più di due millenni di Storia



Sommario

- **Le radici storiche**
Euclide e il V postulato
- Innumerevoli tentativi (antichi e moderni)
- Le “altre” geometrie
Iperbolica, ellittica
- Modelli, coerenza
Matematiche e teoria
- Riflessioni conclusive
Matematiche e realtà

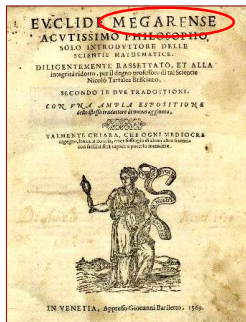


Euclide di Alessandria... una biografia misteriosa

- Tutti i suoi ritratti sono frutto di fantasia.
- Raffaello lo “identifica” in Bramante.

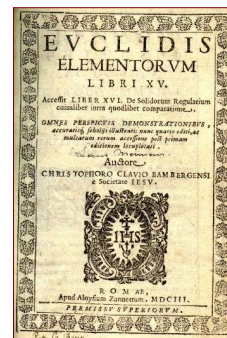


Euclide di Alessandria... una biografia misteriosa

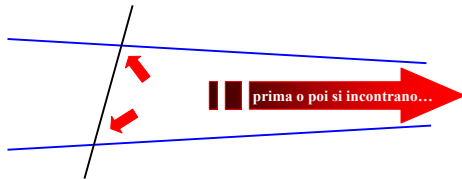


- La stessa indicazione geografica è incerta: a volte venne confuso con il filosofo **Euclide di Megara** (anche Tartaglia cade nell'errore!).
- Sappiamo solo che alcuni discepoli di Euclide operavano nel III sec. a.C. in Alessandria.

Le innumerevoli edizioni degli *Elementi* di Euclide

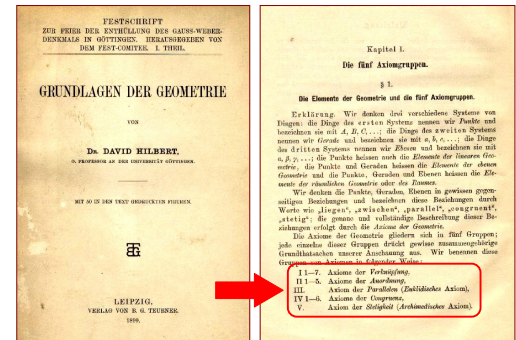


Il V postulato del I libro



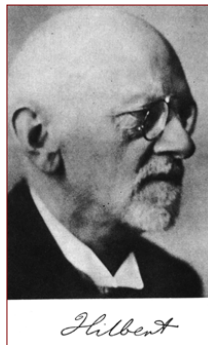
- “[Risulti postulato] che se una retta venendo a cadere su **due rette** forma gli **angoli interni** e dalla stessa parte **minori di due retti** le due rette prolungate illimitatamente verranno ad **incontrarsi** da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti”.

Da Euclide a David Hilbert



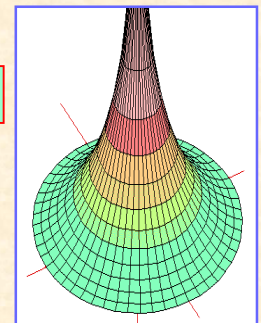
L'assioma (III o) IV-1 di Hilbert

- Il V postulato è spesso sostituito (John Playfair, 1795) con la moderna formulazione (**assioma III o IV-1 di Hilbert**):
- “Assegnati, nel piano, una retta ed un punto non appartenente ad essa, è **unica** la retta passante per il punto dato e parallela alla retta data”.



Sommario

- Le radici storiche
Euclide e il V postulato
- **Innumerevoli tentativi**
(antichi e moderni)
- Le “altre” geometrie
Iperbolica, ellittica
- Modelli, coerenza
Matematiche e teoria
- Riflessioni conclusive
Matematiche e realtà

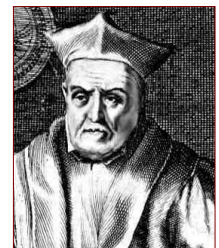


Tentativi antichi (e non solo)

- **Proclo** (410-485), autore di un *Commento al primo libro di Euclide*, cita **Posidonio** (I secolo a. C.), il quale affermò che “due rette sono parallele quando sono complanari ed equidistanti”.
- **Ma ammettere ciò equivale a...
...introdurre un nuovo postulato!**
- La “definizione” di parallelismo introdotta da Posidonio sarà ripresa da altri studiosi, tra i quali **Giordano Vitale** (1633-1711) e **Francesco Maria Franceschinis** (che nel 1787 pubblicò *La teoria delle parallele rigorosamente dimostrata*).

Una lunga rassegna...

- Ricordiamo i tentativi di:
- **Gemino** (I sec. a. C., citato dagli Arabi come **Aganis**);
- **Tolomeo** (II sec.);
- **Al-Nairizi** (IX-X sec.) e **Nasir-Ed-Din** (1201-1274);
- **Federigo Commandino** (1509-1575), che riprende Proclo;
- **Cristoforo Clavio** (1537-1612), **Francesco Patrici** (1529-1597) e **Pietro A. Cataldi** (1552-1626), attratti dalle idee di Nasir-Ed-Din.



Giovanni Alfonso Borelli

- Giovanni Alfonso Borelli (1608-1679) scrisse *Euclides restitutus*, in cui il quinto postulato veniva sostituito con l'assioma:

“se un segmento si muove in un semipiano di bordo una retta data, con un estremo su tale retta e mantenendosi perpendicolare a questa, allora l'altro estremo del segmento descrive una seconda retta”.

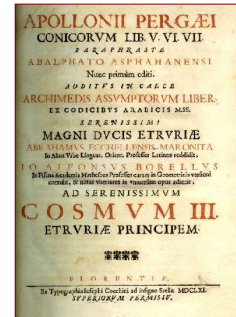
- Ancora lo stesso guaio:

per “dimostrare” un postulato...
...se ne introduce un altro!



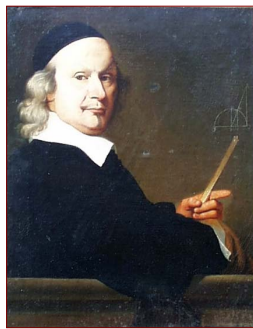
... e i matematici che abbiamo citato sono studiosi di valore!

- A Giovanni Alfonso Borelli, ad esempio, dobbiamo la prima edizione (1661) dei libri V-VI-VII (considerati “perduti”) delle *Coniche* di Apollonio.
- Una vera pietra miliare della storia della Geometria!



Anche John Wallis...

- Anche John Wallis (1617-1703) si occupò della dimostrabilità del quinto postulato: in due conferenze ad Oxford, ne tentò la dimostrazione proclamando che **per ogni figura, esiste una figura simile di grandezza arbitraria**.
- Anche il grande Wallis...
...fallì.



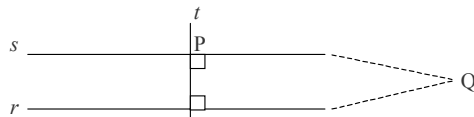
Il Settecento: l'accusa di d'Alembert

- “La definition et les propriétés de la ligne droite, ainsi que des lignes paralleles sont l'ecueil et pour ainsi dire le **scandale des Elements de Geometrie**”!
- Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783)



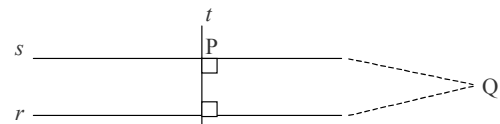
Del resto, “sbagliarsi” non è impossibile!

- Sappiamo che data una retta r e un punto qualsiasi P , **esiste ed è unica la perpendicolare t per P alla r** .



- Esiste ed è unica la perpendicolare s per P alla t .
- Si prova che s e r non possono avere un Q in comune (altrimenti per Q avremmo due perpendicolari alla t).
- Dunque... esiste **ed è unica** la parallela s per P alla r !

Ripercorriamo il nostro ragionamento



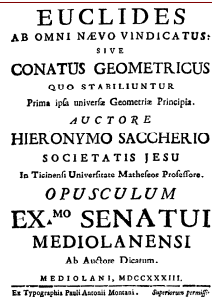
- Esiste ed è unica la perpendicolare t per P alla r .
- Esiste ed è unica la perpendicolare s per P alla t .
- Dunque **esiste ed è unica la parallela s per P alla r**
...costruita con questo metodo!
- Ma chi ci assicura che **questo metodo sia l'unico** per costruire una parallela da un punto ad una retta?

Geometria assoluta, Geometria euclidea

Nota terminologica.

Chiameremo:

- **Geometria assoluta** la parte della geometria che **prescinde** sia dal quinto postulato che dalle sue negazioni.
- **Geometria euclidea** (in senso stretto) la parte della geometria degli *Elementi* che richiede l'**accettazione del quinto postulato**.

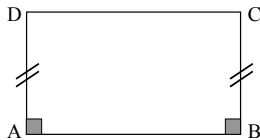


Saccheri, una figura chiave

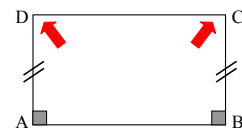
- Il gesuita **Giovanni Girolamo Saccheri** (San Remo 1667-Milano 1733), scrive *Euclides ab omni naevo vindicatus* (pubblicato a Milano nel 1733).
- Saccheri accetta **i primi quattro postulati e le prime ventotto proposizioni** del I libro degli *Elementi* (il corpus fondamentale della Geometria assoluta) e tenta di dimostrare **per assurdo** il V postulato: ne propone cioè la negazione, con la speranza di trovare, tra le conseguenze di essa, qualche risultato contraddittorio.
- Ciò proverebbe che la verità del V postulato è indispensabile **anche nell'ambito della Geometria assoluta**.

Il quadrilatero di Saccheri

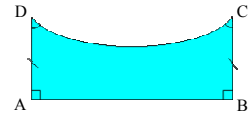
- Saccheri propone lo studio del **quadrilatero birettangolo isoscele**, un quadrilatero (oggi indicato come **quadrilatero di Saccheri**) con due lati opposti (AD e BC) **congruenti e perpendicolari ad uno degli altri lati (AB)**.



Tre possibilità per Saccheri



- **Ipotesi "dell'angolo retto"**: gli angoli C e D sono retti. Equivale all'accettazione del V postulato.
- **Ipotesi "dell'angolo ottuso"**: gli angoli C e D sono ottusi. Comporta una negazione del V postulato.
- **Ipotesi "dell'angolo acuto"**: gli angoli interni C e D risultano acuti. Comporta un'altra (importante!) negazione del V postulato euclideo.



Saccheri e "l'angolo ottuso"

- Saccheri cercò di confutare le ipotesi dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto, per rendere obbligatoria la scelta dell'ipotesi dell'angolo retto.
- Provò che l'ipotesi dell'angolo ottuso è contraddittoria **facendo uso del II postulato euclideo (del I libro degli Elementi)** che ammette che un segmento possa essere illimitatamente prolungato in una retta.
- Ma se sospendessimo anche questo II postulato (ad esempio se immaginassimo una retta... come una linea "chiusa") l'ipotesi dell'angolo ottuso non sarebbe da scartare. Riflettendo su questo, Riemann giunse ad elaborare la **geometria ellittica**.

Saccheri e "l'angolo acuto"

- Saccheri affrontò l'ipotesi dell'angolo acuto supponendo che le proprietà espresse per un punto proprio (collocato ad una distanza finita dalla retta considerata), siano valide anche per un punto "all'infinito".
- Ma questo rende **inaccettabile** la confutazione.
- La ricerca saccheriana si concluse in un insuccesso, anche se in essa sono evidenziabili **molte idee per la definitiva risoluzione della questione**.
- Saccheri non ebbe il coraggio di accettare quanto realmente emerso dal proprio studio: e cioè che **è possibile costruire una geometria logicamente valida anche senza accettare il quinto postulato** (o, addirittura, negandolo esplicitamente).

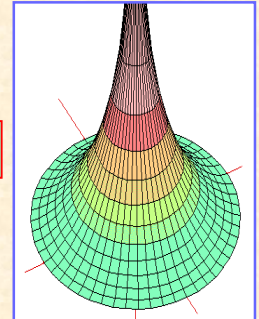
Lambert sulle orme di Saccheri

- Pochi anni dopo la pubblicazione dell'opera di Saccheri, **Johan Heinrich Lambert** (1728-1777) scrisse *Theorie der Parallelinien*, in cui veniva analizzato il **quadrilatero trirettangolo** (oggi noto come "quadrilatero di Lambert").



Sommario

- Le radici storiche**
Euclide e il V postulato
- Innumerevoli tentativi**
(antichi e moderni)
- Le "altre" geometrie**
Iperbolica, ellittica
- Modelli, coerenza**
Matematiche e teoria
- Riflessioni conclusive**
Matematiche e realtà



Nasce la geometria iperbolica

- Il grande **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), Princeps Mathematicorum, non pubblica i propri risultati per timore delle... *"strida dei beati!"*
- Pubblicano però **Janos Bolyai** (1802-1860) e **Nikolaj Ivanovic Lobacewskij** (1793-1857).



La geometria iperbolica

- La geometria non-euclidea "dell'angolo acuto" è basata sulla sostituzione del quinto postulato di Euclide con il postulato seguente:
- Postulato di Lobacewskij.** Assegnati in un piano una retta ed un punto non appartenente ad essa, **esistono almeno due rette passanti per tale punto e non aventi alcun punto in comune con la retta data.** (In effetti, si dimostra che in tale caso ne esistono infinite).
- Nella geometria iperbolica, la somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è **minore di un angolo piatto**.

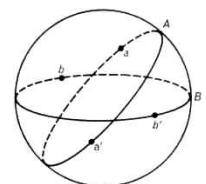
Nasce la geometria ellittica

- Bernhard Riemann** (1826-1866):
- "La geometria presuppone il concetto di spazio ed i primi concetti fondamentali per le costruzioni. Di essi dà soltanto definizioni nominali, mentre **le determinazioni essenziali compaiono come assiomi.**
- Si possono indicare vari sistemi di fatti semplici per determinare le relazioni metriche dello spazio; **il più importante, per gli scopi attuali, è quello di Euclide**".



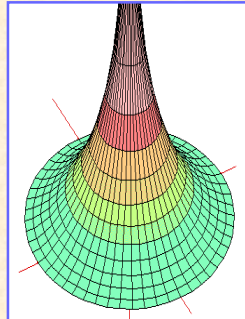
La geometria ellittica

- Postulato di Riemann.** Le rette sono **linee chiuse** e **non esistono coppie di rette complanari senza punti in comune.**
- Nella geometria ellittica, la somma degli angoli interni di un triangolo è **maggiore di un angolo piatto**.
- Questa possibilità era stata esclusa da Legendre, che accettava il postulato euclideo sulla retta illimitata (ma Riemann, come sopra notato, negò tale caratteristica).



Sommario

- **Le radici storiche**
Euclide e il V postulato
- **Innumerevoli tentativi**
(antichi e moderni)
- **Le “altre” geometrie**
Iperbolica, ellittica
- **Modelli, coerenza**
Matematiche e teoria
- **Riflessioni conclusive**
Matematiche e realtà



Geometrie su di una superficie

“Data una superficie, proponiamoci di vedere fino a che punto si possa fondare sopra di essa una geometria analoga a quella del piano. Per due punti A, B della superficie passa generalmente una linea ben determinata che le appartiene, la quale segna sulla superficie la minima distanza fra i due punti. Una tale linea è la *geodetica* congiungente i due punti dati... Volendo paragonare la geometria sopra una superficie con la geometria su di un piano, appare naturale di mettere a riscontro le geodetiche di quella, misuranti le distanze sopra la superficie, con le rette di questo”.

R. Bonola (1906)

Una nozione importante: la curvatura

“Rammentando che la curvatura d’una linea piana in un punto è l’inverso del raggio del cerchio osculatore in quel punto, ecco come può definirsi **la curvatura in un punto M d’una superficie**. Condotta per M la normale n alla superficie si consideri il fascio di piani per n e il relativo fascio di curve che esso sega sulla superficie. Fra le curve (piane) di tale fascio ne esistono due ortogonali fra loro, le cui curvature (sopra definite) godono delle proprietà di massimo o minimo. Il prodotto di tali curvature dà la curvatura della superficie nel punto M (Gauss)”.

R. Bonola (1906)

Superfici e curvatura

Intuitivamente: una corrispondenza tra superfici è un’applicabilità quando archi di curve corrispondenti **conservano la lunghezza**. Consideriamo tre superfici a curvatura costante, nei casi:

- curvatura $K = 0$
- curvatura $K = \frac{1}{a^2}$
- curvatura $K = -\frac{1}{a^2}$

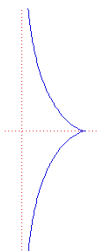
Nel primo caso le superfici sono applicabili su di un **piano** (sviluppabili); nel secondo, su di una **superficie sferica** di raggio $\sqrt{\frac{1}{K}} = a$; nel terzo, sulla superficie di una **pseudosfera**.

La pseudosfera

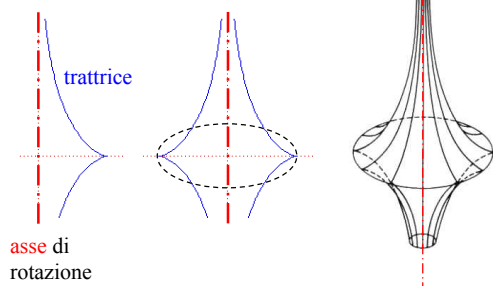
La **pseudosfera** è una superficie di rivoluzione ottenuta ruotando una **trattrice** intorno al suo asintoto; l’equazione della trattrice riferita all’asse di rotazione è:

$$z = a \cdot \log_e \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

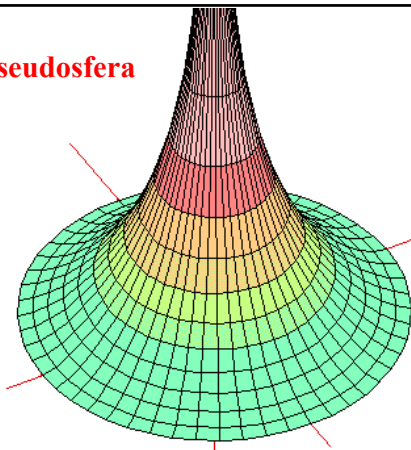
essendo, come sopra notato: $K = -\frac{1}{a^2}$.



La pseudosfera



La pseudosfera

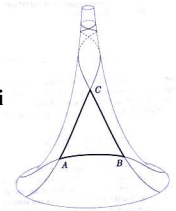


Dalle geometrie sulle superfici alle geometrie non-euclidee

Gauss provò che considerando un triangolo delimitato da geodetiche (*triangolo geodetico*) su di una superficie a curvatura K (costante o variabile) risulta:

$$\int_{ABC} K ds = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

essendo α, β, γ le misure degli **angoli** del triangolo geodetico considerato.



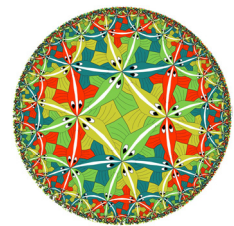
E ritroviamo la somma degli angoli interni di un triangolo

Nei tre casi considerati si ha (essendo S l'area di ABC):

- $K = 0 \Rightarrow \int_{ABC} K ds = 0 \Rightarrow 0 = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
 $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = \pi$
- $K = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \int_{ABC} K ds = \frac{1}{k^2} \int_{ABC} ds \Rightarrow \frac{S}{k^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
 $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > \pi$
- $K = -\frac{1}{k^2} \Rightarrow \int_{ABC} K ds = -\frac{1}{k^2} \int_{ABC} ds \Rightarrow -\frac{S}{k^2} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$
 $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma < \pi$

Fondamentale: modelli e coerenza

- L'esistenza dei **modelli** fu decisiva per risolvere il **problema della coerenza** delle geometrie presentate.
- Infatti eventuali contraddizioni in tali geometrie si rifletterebero in inevitabili **contraddizioni nella geometria del modello considerato**.
- Ad esempio, la coerenza della **geometria iperbolica**, **rappresentabile in un modello euclideo** è ricondotta alla coerenza della geometria euclidea.

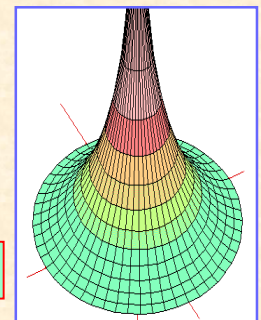


L'indipendenza degli assiomi euclidei

- La dimostrazione della coerenza della geometria iperbolica ha come immediata conseguenza **l'indipendenza dell'assioma delle parallele dagli altri assiomi euclidei**.
- Infatti se tale indipendenza fosse smentita, l'assioma delle parallele sarebbe uno dei teoremi della geometria generata dagli altri assiomi euclidei, e dunque sarebbe anche **un teorema della geometria iperbolica** (la quale accetta tali assiomi).
- Ma esso verrebbe a contraddire il postulato di Lobacevskij, e tutto ciò comporterebbe l'incoerenza della stessa geometria iperbolica.

Sommario

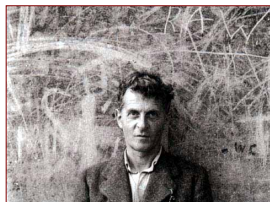
- **Le radici storiche**
Euclide e il V postulato
- **Innumerevoli tentativi**
(antichi e moderni)
- **Le "altre" geometrie**
Iperbolica, ellittica
- **Modelli, coerenza**
Matematiche e teoria
- **Riflessioni conclusive**
Matematiche e realtà



Qual è, allora, il “celebre” legame tra geometria e realtà?

- “Capire una frase –potremmo dire– è comprenderne l’uso. (...) **Tutti i calcoli della matematica**

- 1 **sono stati inventati per assecondare l’esperienza**
- 2 **e poi sono stati resi indipendenti dall’esperienza”**



Ludwig Wittgenstein
(Lezioni sui fondamenti della matematica: Cambridge 1939.
Cornell Univ. Press, Itacha 1986.
Boringhieri, Torino 1982)

Qual è, allora, il “celebre” legame tra geometria e realtà?

- Osservando che la geometria “funziona” (nella descrizione della realtà), potremmo essere indotti ad affermare che “esiste”...
- ...e magari che il lavoro del matematico si riduce a quello dello scopritore.
- Questa conclusione non ci sembra però giustificata: **il fatto che la matematica (ovvero la geometria) “funzioni” significa che... funziona, nulla di più.**
- Potremmo limitarci a dire che essa funziona in quanto è stata **concepita (ovvero “creata”) in un certo modo, con la compresenza di due aspetti:**

Qual è, allora, il “celebre” legame tra geometria e realtà?

(ispirandoci idealmente a Wittgenstein)

- 1 **un collegamento con il mondo reale** (sebbene tale connessione non possa essere ridotta ad un semplice “rispecchiamento”);
 - 2 **la scelta di alcune posizioni convenzionali, socialmente elaborate ed accettate,** le quali rendono possibile stabilire proprietà e analogie, con la conseguente costruzione di “oggetti matematici” astratti.
- “inventati per assecondare l’esperienza
e poi sono stati resi indipendenti dall’esperienza”**

A Voi tutti grazie dell’attenzione



Grazie
a Paolo Boero
e a Luis Radford

Per risorse, materiali e
indicazioni bibliografiche
si può consultare il sito:
www.syllogismos.it