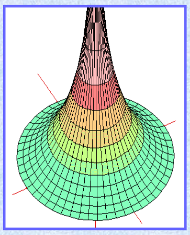
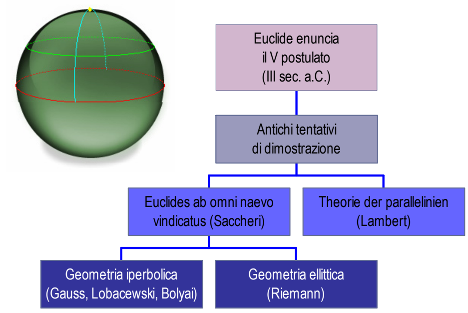
Progetto Lauree Scientificha
7 febbraio 2009
Liceo Scientifico "Leonardo da Vinci", Treviso

Geometrie non-euclidee



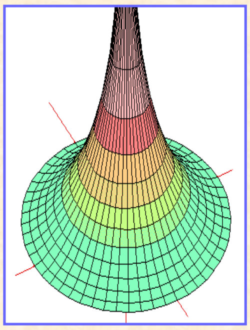
Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Pro e contro *Euclide*: più di due millenni di Storia

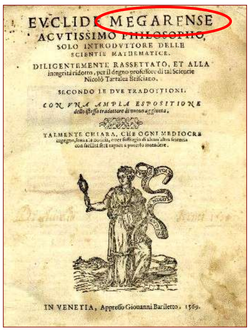


Sommario

- **Le radici storiche**
  Euclide e il V postulato
- **Innumerevoli tentativi**
  (antichi e moderni)
- **Le "altre" geometrie**
  Iperbolica, ellittica
- **Modelli, coerenza**
  Matematiche e teoria
- **Riflessioni conclusive**
  Matematiche e realtà

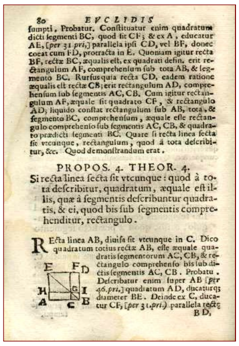


Euclide di Alessandria… una biografia misteriosa

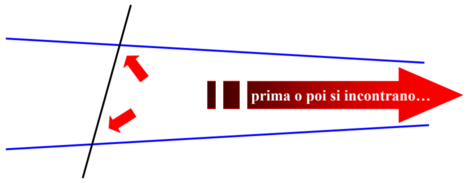


- La stessa indicazione geografica è incerta: a volte venne confuso con il filosofo **Euclide di Megara** (anche Tartaglia cade nell'errore!).
- Sappiamo solo che alcuni discepoli di Euclide operavano nel III sec. a.C. in Alessandria.

Le innumerevoli edizioni degli *Elementi* di Euclide

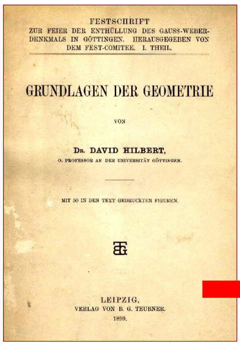


Il V postulato del I libro



- "[Risulti postulato] che se una retta venendo a cadere su due rette forma gli **angoli interni e dalla stessa parte** minori di due retti le due rette prolungate illimitatamente verranno ad incontrarsi **da quella parte in cui sono gli angoli minori di due retti**".

Da Euclide a David Hilbert


FESTSCHRIFT
ZUR FEIER DER ENTHÜLLUNG DES GAUSS-WEBER-DENKMALS IN GÖTTINGEN. HERAUSGEGEBEN VON DEM FEST-COMITEE. I. THEIL.

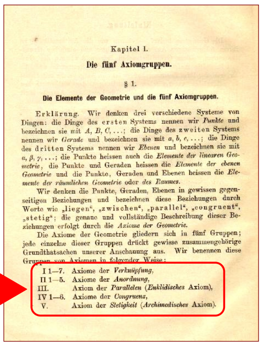
GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE

VON

DR. DAVID HILBERT,
O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 50 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1899.


Kapitel 1.

Die fünf Axiomgruppen.

§ 1.

Die Elemente der Geometrie und die fünf Axiomgruppen.

Erklärung. Wir denken drei verschiedene Systeme von Dingen: die Dinge des ersten Systems nennen wir *Punkte* und bezeichnen sie mit $A, B, C, \ldots$; die Dinge des zweiten Systems nennen wir *Gerade* und bezeichnen sie mit $a, b, c, \ldots$; die Dinge des dritten Systems nennen wir *Ebenen* und bezeichnen sie mit $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$; die Punkte heissen auch die *Elemente der linearen Geometrie*, die Punkte und Geraden heissen die *Elemente der ebenen Geometrie* und die Punkte, Geraden und Ebenen heissen die *Elemente der räumlichen Geometrie* oder *des Raumes*.

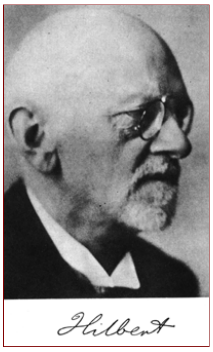
Wir denken die Punkte, Geraden, Ebenen in gewissen gegenseitigen Beziehungen und bezeichnen diese Beziehungen durch Worte wie „liegen", „zwischen", „parallel", „congruent", „stetig"; die genaue und vollständige Beschreibung dieser Beziehungen erfolgt durch die *Axiome der Geometrie*.

Die Axiome der Geometrie gliedern sich in fünf Gruppen; jede einzelne dieser Gruppen drückt gewisse zusammengehörige Grundthatsachen unserer Anschauung aus. Wir benennen diese Gruppen von Axiomen in folgender Weise:

I 1—7. Axiome der *Verknüpfung*,
II 1—5. Axiome der *Anordnung*,
III. Axiom der *Parallelen* (*Euklidisches* Axiom),
IV 1—6. Axiome der *Congruenz*,
V. Axiom der *Stetigkeit* (*Archimedisches* Axiom).

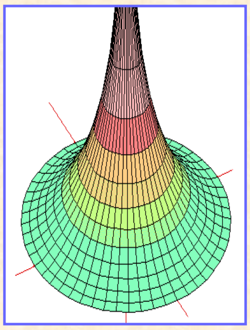
L'assioma (III o) IV-1 di Hilbert

- Il V postulato è spesso sostituito (John Playfair, 1795) con la moderna formulazione (**assioma III o IV-1 di Hilbert**):
- **"Assegnati, nel piano, una retta ed un punto non appartenente ad essa, è unica la retta passante per il punto dato e parallela alla retta data".**



Sommario

- **Le radici storiche**
  Euclide e il V postulato
- **Innumerevoli tentativi**
  (antichi e moderni)
- **Le "altre" geometrie**
  Iperbolica, ellittica
- **Modelli, coerenza**
  Matematiche e teoria
- **Riflessioni conclusive**
  Matematiche e realtà



Tentativi antichi (*e non solo*)

- **Proclo** (410-485), autore di un *Commento al primo libro di Euclide*, cita **Posidonio** (I secolo a. C.), il quale affermò che "due rette sono parallele quando sono complanari ed equidistanti".
- **Ma ammettere ciò equivale a…**
  …introdurre un nuovo postulato!
- La "definizione" di parallelismo introdotta da Posidonio sarà ripresa da altri studiosi, tra i quali **Giordano Vitale** (1633-1711) e **Francesco Maria Franceschinis** (che **nel 1787** pubblicò *La teoria delle parallele rigorosamente dimostrata*).

Una lunga rassegna…

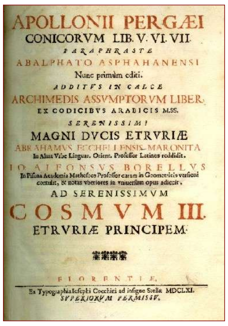
- Ricordiamo i tentativi di:
- **Gemino** (I sec. a. C., citato dagli Arabi come **Aganis**);
- **Tolomeo** (II sec.);
- **Al-Nairizi** (IX-X sec.) e **Nasir-Ed-Din** (1201-1274);
- **Federigo Commandino** (1509 -1575), che riprende Proclo;
- **Cristoforo Clavio** (1537-1612), **Francesco Patrici** (1529-1597) e **Pietro A. Cataldi** (1552-1626), attratti dalle idee di Nasir-Ed-Din.

Giovanni Alfonso Borelli

- **Giovanni Alfonso Borelli** (1608-1679) scrisse *Euclides restitutus*, in cui il quinto postulato veniva sostituito con l'assioma:
  "se un segmento si muove in un semipiano di bordo una retta data, con un estremo su tale retta e mantenendosi perpendicolare a questa, allora l'altro estremo del segmento descrive una seconda retta".
- **Ancora lo stesso guaio:**
  per "dimostrare" un postulato…
  …se ne introduce un altro!

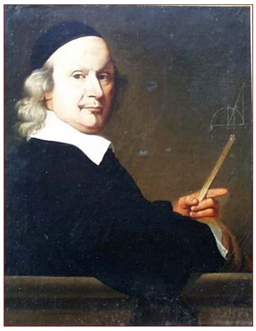
… e i matematici che abbiamo citato sono studiosi di valore!

- A Giovanni Alfonso Borelli, ad esempio, dobbiamo la prima edizione (1661) dei libri V-VI-VII (considerati "perduti") delle *Coniche* di **Apollonio**.
- **Una vera pietra miliare della storia della Geometria!**


APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.
PARAPHRASTE
ABALPHATO ASPHAHANENSI
Nunc primùm editi.
ADDITVS IN CALCE
ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER.
EX CODICIBVS ARABICIS M.SS.
SERENISSIMI
MAGNI DVCIS ETRVRIÆ
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA
In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit.
IO: ALFONSVS BORELLVS
In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.
AD SERENISSIMVM
COSMVM III.
ETRVRIÆ PRINCIPEM.
FLORENTIÆ,
Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI.
SVPERIORVM PERMISSV.

Anche John Wallis…

- Anche **John Wallis** (1617-1703) si occupò della dimostrabilità del quinto postulato: in due conferenze ad Oxford, ne tentò la dimostrazione proclamando che **per ogni figura, esiste una figura simile di grandezza arbitraria**.
- Anche il grande Wallis… …**fallì**.



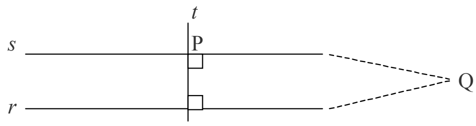
Il Settecento: l'accusa di d'Alembert

- "La definition et les proprietés de la ligne droite, ainsi que des lignes paralleles sont l'ecueil **et pour ainsi dire le scandale des Elements de Geometrie**"!

  Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783)

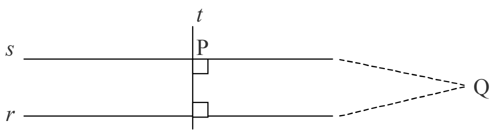
Del resto, "sbagliarsi" non è impossibile!

- Sappiamo che data una retta r e un punto qualsiasi P, **esiste ed è unica la perpendicolare** t per P alla r.



- **Esiste ed è unica la perpendicolare** s per P alla t.
- Si prova che s e r non possono avere un Q in comune (altrimenti per Q avremmo due perpendicolari alla t).
- Dunque… esiste **ed è *unica*** la parallela s per P alla r!

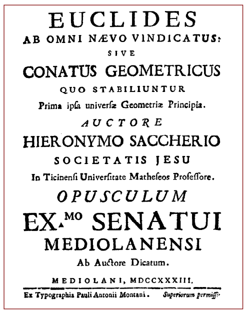
Ripercorriamo il nostro ragionamento



- **Esiste ed è unica** la perpendicolare t per P alla r.
- **Esiste ed è unica** la perpendicolare s per P alla t.
- Dunque **esiste ed è unica la parallela** s per P alla r

  …costruita con questo metodo!
- **Ma chi ci assicura che questo metodo sia l'unico** per costruire una parallela da un punto ad una retta?

Geometria assoluta, Geometria euclidea


EUCLIDES
AB OMNI NÆVO VINDICATUS:
SIVE
CONATUS GEOMETRICUS
QUO STABILIUNTUR
Prima ipsa universæ Geometriæ Principia.
AUCTORE
HIERONYMO SACCHERIO
SOCIETATIS JESU
In Ticinensi Universitate Matheseos Professore.
OPUSCULUM
EX.MO SENATUI
MEDIOLANENSI
Ab Auctore Dicatum.
MEDIOLANI, MDCCXXXIII.
Ex Typographia Pauli Antonii Montani. Superiorum permissu

Nota terminologica.

Chiameremo:

- **Geometria assoluta** la parte della geometria che **prescinde** sia dal quinto postulato che dalle sue negazioni.
- **Geometria euclidea** (in senso stretto) la parte della geometria degli *Elementi* che richiede **l'accettazione del quinto postulato**.

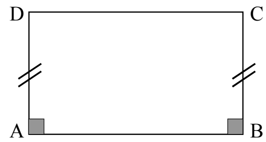
Saccheri, una figura chiave

- Il gesuita **Giovanni Girolamo Saccheri** (San Remo 1667-Milano 1733), scrive *Euclides ab omni naevo vindicatus* (pubblicato a Milano nel 1733).
- Saccheri accetta **i primi quattro postulati e le prime ventotto proposizioni** del I libro degli *Elementi* (il corpus fondamentale della Geometria assoluta) e tenta di dimostrare **per assurdo** il V postulato: ne propone cioè la negazione, con la speranza di trovare, tra le conseguenze di essa, qualche risultato contraddittorio.
- Ciò proverebbe che la verità del V postulato è indispensabile **anche nell'ambito della Geometria assoluta**.

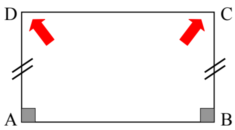
Il quadrilatero di Saccheri

- Saccheri propone lo studio del **quadrilatero birettangolo isoscele**, un quadrilatero (oggi indicato come **quadrilatero di Saccheri**)

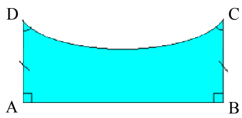
  con due lati opposti (AD e BC) **congruenti e perpendicolari ad uno degli altri lati** (AB).



Tre possibilità per Saccheri



- **Ipotesi "dell'angolo retto"**: gli angoli C e D sono retti. Equivale all'accettazione del V postulato.
- **Ipotesi "dell'angolo ottuso"**: gli angoli C e D sono ottusi. Comporta una negazione del V postulato.
- **Ipotesi "dell'angolo acuto"**: gli angoli interni C e D risultano acuti. Comporta un'altra (importante!) negazione del V postulato euclideo.



Saccheri e "l'angolo ottuso"

- Saccheri cercò di confutare le ipotesi dell'angolo ottuso e dell'angolo acuto, per rendere obbligatoria la scelta dell'ipotesi dell'angolo retto.
- Provò che l'ipotesi dell'angolo ottuso è contraddittoria **facendo uso del II postulato euclideo (del I libro degli *Elementi*)** che ammette che un segmento possa essere illimitatamente prolungato in una retta.
- Ma se "sospendessimo" anche questo II postulato (ad esempio se immaginassimo una retta… come una linea "chiusa") l'ipotesi dell'angolo ottuso non sarebbe da scartare. Riflettendo su questo, Riemann giunse ad elaborare la **geometria ellittica**.

Saccheri e "l'angolo acuto"

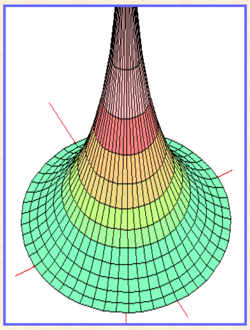
- Saccheri affrontò l'ipotesi dell'angolo acuto supponendo che le proprietà espresse per un punto proprio (collocato ad una distanza finita da una retta), siano valide anche per un punto "all'infinito".
- Ma questo rende **inaccettabile** la confutazione.
- La ricerca saccheriana si concluse in un insuccesso, anche se in essa sono evidenziabili **molte idee per la definitiva risoluzione della questione**.
- Saccheri non ebbe il coraggio di accettare quanto realmente emerso dal proprio studio: e cioè che **è possibile costruire una geometria logicamente valida anche senza accettare il quinto postulato** (o, addirittura, negandolo esplicitamente).

Lambert sulle orme di Saccheri

- Pochi anni dopo la pubblicazione dell'opera di Saccheri, **Johan Heinrich Lambert** (1728-1777) scrisse *Theorie der Parallellinien*, in cui veniva analizzato il **quadrilatero trirettangolo** (oggi noto come "quadrilatero di Lambert").

Sommario

- **Le radici storiche**
  Euclide e il V postulato
- **Innumerevoli tentativi**
  (antichi e moderni)
- **Le “altre” geometrie**
  Iperbolica, ellittica
- **Modelli, coerenza**
  Matematiche e teoria
- **Riflessioni conclusive**
  Matematiche e realtà



Nasce la geometria iperbolica

- Il grande **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), Princeps Mathematicorum,

  non pubblica i propri risultati per timore delle…
  “strida dei beoti”!

- Pubblicano però **Janos Bolyai** (1802-1860) e **Nikolaj Ivanovic Lobacewskij** (1793-1857).

La geometria iperbolica

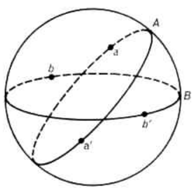
- La geometria non-euclidea “dell’angolo acuto” è basata sulla sostituzione del quinto postulato di Euclide con il postulato seguente:
- **Postulato di Lobacewskij.** Assegnati in un piano una retta ed un punto non appartenente ad essa, **esistono almeno due rette passanti per tale punto e non aventi alcun punto in comune con la retta data**.
  (In effetti, si dimostra che in tale caso ne esistono infinite).
- Nella geometria iperbolica, la somma degli angoli interni di un triangolo qualsiasi è **minore di un angolo piatto**.

Nasce la geometria ellittica

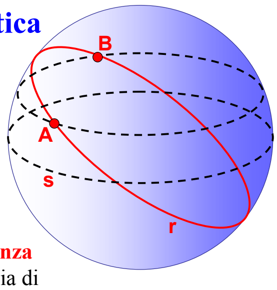
- **Bernhard Riemann** (1826-1866):
- “La geometria presuppone il concetto di spazio ed i primi concetti fondamentali per le costruzioni. Di essi dà **soltanto definizioni nominali,** mentre **le determinazioni essenziali compaiono come assiomi**.
- Si possono indicare vari sistemi di fatti semplici per determinare le relazioni metriche dello spazio; **il più importante, per gli scopi attuali, è quello di Euclide**”.

La geometria ellittica

- **Postulato di Riemann.** Le rette sono **linee chiuse** e **non esistono coppie di rette complanari senza punti in comune**.
- Nella geometria ellittica, la somma degli angoli interni di un triangolo è **maggiore di un angolo piatto**.
- Questa possibilità era stata esclusa da Legendre, che accettava il postulato euclideo sulla retta illimitata (ma Riemann, come sopra notato, negò tale caratteristica).



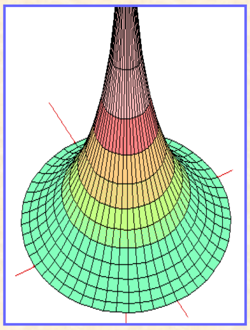
La geometria ellittica



- La geometria ellittica mantiene quanto era espresso in geometria assoluta: ad esempio, **per due punti passa una e una sola “retta”.**
- Se **“retta” = circonferenza massima**, per ogni coppia di punti **(non agli antipodi)** passa una e una sola “retta”.
- Dati i punti A e B non si può considerare “retta” la circonferenza per A, B (che sarebbe “parallela” alla *s*)
- …come “retta” AB c’è già la *r* (non “parallela” alla *s*).

Sommario

- **Le radici storiche**
  Euclide e il V postulato
- **Innumerevoli tentativi**
  (antichi e moderni)
- **Le “altre” geometrie**
  Iperbolica, ellittica
- **Modelli, coerenza**
  Matematiche e teoria
- **Riflessioni conclusive**
  Matematiche e realtà



Geometrie su di una superficie

“Data una superficie, proponiamoci di vedere fino a che punto si possa fondare sopra di essa una geometria analoga a quella del piano. Per due punti A, B della superficie passa generalmente una linea ben determinata che le appartiene, la quale segna sulla superficie la minima distanza fra i due punti. Una tale linea è la *geodetica* congiungente i due punti dati... Volendo paragonare la geometria sopra una superficie con la geometria su di un piano, appare naturale di mettere a riscontro le geodetiche di quella, misuranti le distanze sopra la superficie, con le rette di questo”.

R. Bonola (1906)

Una nozione importante: la curvatura

“Rammentando che la curvatura d’una linea piana in un punto è l’inverso del raggio del cerchio osculatore in quel punto, ecco come può definirsi **la curvatura in un punto M d’una superficie**. Condotta per M la normale n alla superficie si consideri il fascio di piani per n e il relativo fascio di curve che esso sega sulla superficie. Fra le curve (piane) di tale fascio ne esistono due ortogonali fra loro, le cui curvature (sopra definite) godono delle proprietà di massimo o minimo. Il prodotto di tali curvature dà la curvatura della superficie nel punto M (Gauss)”.

R. Bonola (1906)

Superfici e curvatura

Intuitivamente: una corrispondenza tra superfici è un’applicabilità quando archi di curve corrispondenti **conservano la lunghezza**. Consideriamo tre superfici a curvatura costante, nei casi:

- curvatura $K = 0$
- curvatura $K = \frac{1}{a^2}$
- curvatura $K = -\frac{1}{a^2}$

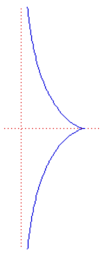
Nel primo caso le superfici sono applicabili su di un **piano** (sviluppabili); nel secondo, su di una **superficie sferica** di raggio $\sqrt{\frac{1}{K}} = a$; nel terzo, sulla superficie di una **pseudosfera**.

La pseudosfera

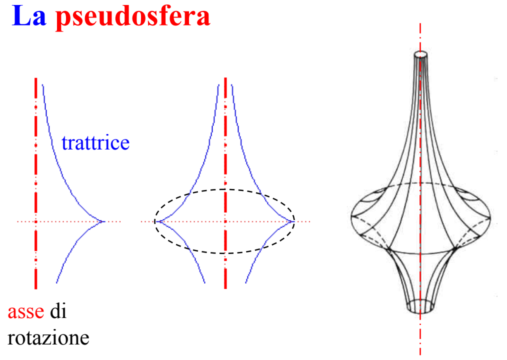
La **pseudosfera** è una superficie di rivoluzione ottenuta ruotando una **trattrice** intorno al suo asintoto; l’equazione della trattrice riferita all’asse di rotazione è:

$$z = a \cdot \log_e \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

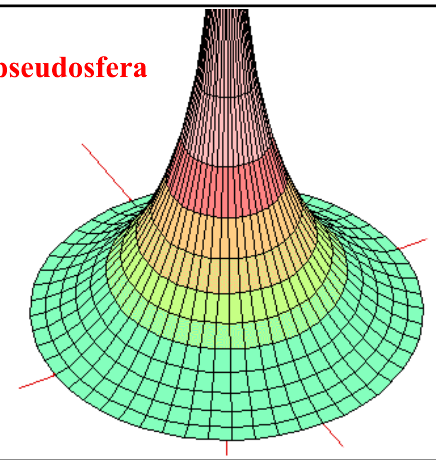
essendo, come sopra notato: $K = -\frac{1}{a^2}$.



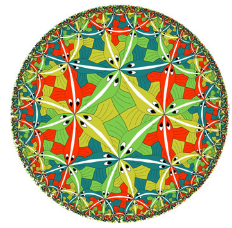
La pseudosfera



La pseudosfera



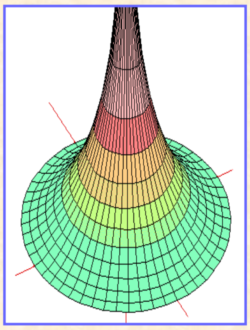
Fondamentale: modelli e coerenza



- L'esistenza dei **modelli** fu decisiva per risolvere il **problema della coerenza** delle geometrie presentate.
- Infatti eventuali contraddizioni in tali geometrie si rifletterebbero in inevitabili **contraddizioni nella geometria del modello considerato.**
- Ad esempio, la coerenza della **geometria iperbolica, rappresentabile in un modello euclideo** è ricondotta alla coerenza della geometria euclidea.

Sommario

- **Le radici storiche**
  Euclide e il V postulato
- **Innumerevoli tentativi**
  (antichi e moderni)
- **Le "altre" geometrie**
  Iperbolica, ellittica
- **Modelli, coerenza**
  Matematiche e teoria
- **Riflessioni conclusive**
  Matematiche e realtà



Riassumiamo…

- Fino all'inizio dell'Ottocento, i tentativi di dimostrare il Postulato delle Parallele presupponevano che esso fosse, in effetti, un teorema della Geometria Assoluta (coincidente, quindi, con la Geometria Euclidea).
- **Secondo tale approccio, ciò che mancava era una *dimostrazione*; ma i matematici di allora si erano concentrati sull'assenza sbagliata…**
- Il punto cruciale per l'ottenimento di una corretta impostazione della questione fu il riconoscimento della differenza tra Geometria Assoluta e Geometria Euclidea: la seconda accetta il Postulato delle Parallele nella forma data negli *Elementi*, la prima prescinde sia da esso che dalle sue negazioni.

Geometria assoluta

Primi 4 postulati e prime 28 proposizioni degli *Elementi* di Euclide

Postulato delle parallele

- Il "postulato delle parallele" era considerato un **teorema** della geometria euclidea e la sua dimostrazione veniva cercata applicando i primi 4 postulati e le prime 28 proposizioni degli *Elementi*.

~~Geometria assoluta~~

Primi 4 postulati e prime 28 proposizioni degli *Elementi* di Euclide

Geometria assoluta

Primi 4 postulati e prime 28 proposizioni degli *Elementi* di Euclide

(assenza…)

questa "assenza" consente diversi "riempimenti"…

Geometria euclidea (propriamente detta)

Primi 4 postulati e prime 28 proposizioni degli *Elementi* di Euclide	Postulato delle parallele

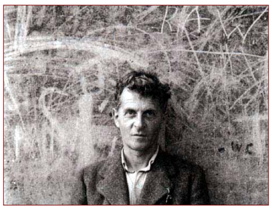
Geometria assoluta

Primi 4 postulati e prime 28 proposizioni degli *Elementi* di Euclide	Postulato di Lobacewskij

Geometria non–euclidea (iperbolica) di Lobacewskij

Riassumiamo…

- Scorporando il V Postulato di Euclide dalla Geometria Assoluta si è creato **un vuoto, un'assenza feconda.**
- **Tale vuoto ha infatti potuto essere colmato sia in senso euclideo che in senso non–euclideo!**
- C'è un radicale mutamento della prospettiva teorica collegato al passaggio dalla concezione di un'unica geometria (quella euclidea) all'accettazione delle prospettive non–euclidee…

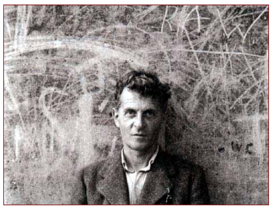


che dipende dall'uso!

Qual è, allora, il "celebre" legame tra geometria e realtà?

- "Capire una frase –potremmo dire– è comprenderne l'uso. (…) **Tutti i calcoli della matematica**

1. **sono stati inventati per assecondare l'esperienza**
2. **e poi sono stati resi indipendenti dall'esperienza"**



Ludwig Wittgenstein

(*Lezioni sui fondamenti della matematica: Cambridge 1939*. Cornell Univ. Press, Itacha 1986. Boringhieri, Torino 1982)

Qual è, allora, il "celebre" legame tra geometria e realtà?

- **Osservando che la geometria "funziona" (nella descrizione della realtà), potremmo essere indotti ad affermare che "esiste"…**
- …e magari che il lavoro del matematico si riduce a quello dello scopritore.
- Questa conclusione non ci sembra però giustificata: **il fatto che la matematica (ovvero la geometria) "funzioni" significa che… funziona, nulla di più.**
- Potremmo limitarci a dire che essa funziona in quanto è stata **concepita (ovvero "creata") in un certo modo, con la compresenza di due aspetti:**

Qual è, allora, il "celebre" legame tra geometria e realtà?

(ispirandoci idealmente a Wittgenstein)

1. **un collegamento con il mondo reale** (sebbene tale connessione non possa essere ridotta ad un semplice "rispecchiamento");
2. **la scelta di alcune posizioni convenzionali, socialmente elaborate ed accettate,** le quali rendono possibile stabilire proprietà e analogie, con la conseguente costruzione di "oggetti matematici" astratti.

"inventati per assecondare l'esperienza

e poi sono stati resi indipendenti dall'esperienza"

A Voi tutti grazie dell'attenzione

Grazie a Paolo Boero (Univ. Genova) e a Luis Radford (Univ. Sudbury, Canada)

Per risorse, materiali e indicazioni bibliografiche si può consultare il sito: www.syllogismos.it