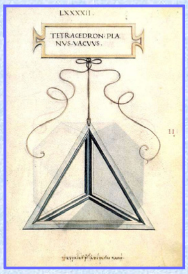
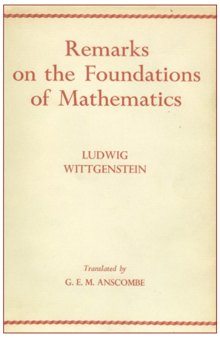
Laboratorio didattico informatico
Elementi di semiotica – 4

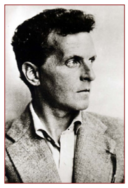


Giorgio T. Bagni
Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

g – In alcuni passi delle *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica…*



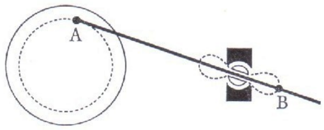
- …opera pubblicata (1956) postuma cinquantun anni fa, Ludwig Wittgenstein descrive un dispositivo meccanico
- **mediante il quale è possibile “suggerire” la dimostrazione di una proposizione.**



- Un primo accenno è nella III parte: «supponiamo che io abbia davanti a me le fasi del movimento di

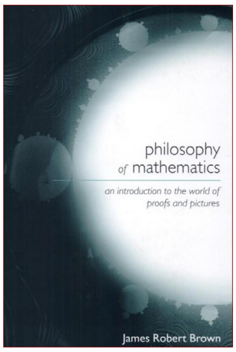
sotto forma di immagine. Questo mi aiuta a formulare una proposizione che io ricavo, per così dire, dalla lettura di quest’immagine. […] È strano che dalla lettura di un’*immagine* si debba poter ricavare una proposizione. Tuttavia la proposizione non tratta dell’immagine che io vedo. Non dice che in quest’immagine si può vedere questo e quest’altro. Ma non dice nemmeno che cosa farà il meccanismo reale, per quanto lo faccia capire».

- E nella V parte: «considera un meccanismo.



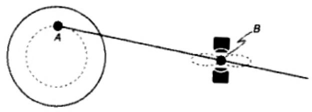
- Mentre A descrive un cerchio, B descrive una figura a forma di otto. Questa proposizione la scriviamo come una proposizione della cinematica. Mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta. La proposizione corrisponde, poniamo, a un’immagine del meccanismo in cui siano disegnate le traiettorie descritte da A e B. Per un certo aspetto la proposizione è immagine del movimento. Tien fermo ciò di cui la *prova* mi convince».

g – Ma non tutti hanno apprezzato il meccanismo di Wittgenstein…

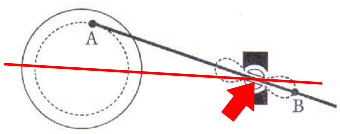


- Tra il funzionamento fisico e la proposizione matematica si colloca dunque **la mediazione della rappresentazione** visuale…
- e proprio questo collegamento può essere discusso in termini critici, come fa brillantemente **James Robert Brown.**

- **Una figura “corretta”** (per Brown) sarebbe simile a:

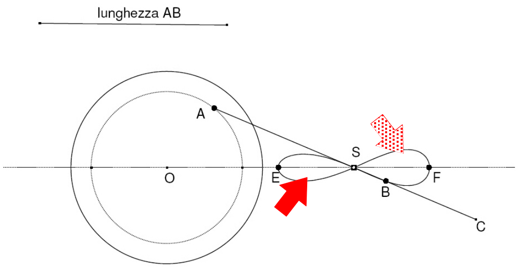


- – la figura descritta da B dovrebbe risultare **simmetrica** rispetto alla retta passante per il centro del cerchio e per il punto per il quale AB è vincolato a passare;



- – inoltre, quando A si trova nella posizione indicata, «B, invece di essere disegnato nella posizione a destra, dovrebbe trovarsi **al centro**» della figura “a otto”.

- Non possiamo ottenere una “figure-eight” **simmetrica** rispetto al punto S; una figura… quasi simmetrica è:



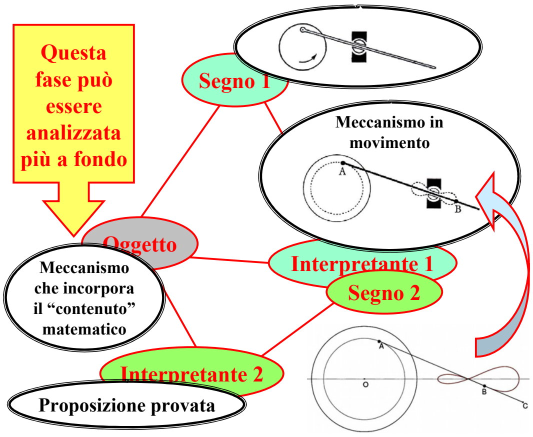
(dove ES=SF, ma la parte destra…
… è più estesa della sinistra).

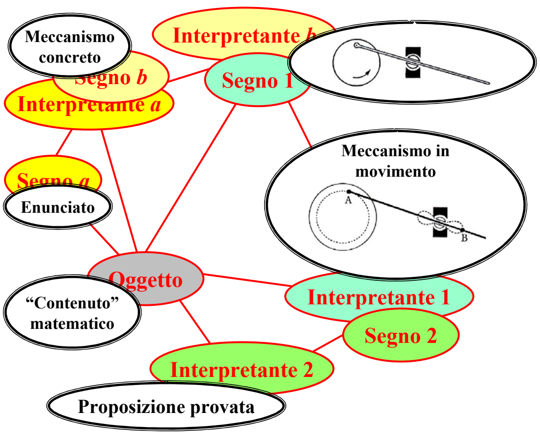
g – Le conclusioni di Brown (in chiave platonistica)

- Brown si chiede ora: «perché il diagramma è efficace, nonostante questi errori?»
- E nota che la figura in esame «è **un disegno scadente** in quanto rappresenta erroneamente un meccanismo reale. Ma è **un buon simbolo**, in quanto rappresenta l’importante caratterizzazione astratta; esso “mostra l’esistenza di una relazione interna”, nelle parole di Wittgenstein. In quest’ultimo senso è certamente efficace […] come un supporto alla comprensione».
- Brown conclude che **«non è necessario che il disegno sia accurato; esso deve solamente condurre al senso», platonisticamente inteso.**

La sintonia del funzionamento “fisico” e di quello “matematico” (la descrizione del moto mediante equazioni) non può ridursi ad un’analogia: è la *necessità* della natura fisica che si rispecchia nella matematica mediante la quale il movimento è descritto in termini di indice (e questo aspetto può rivelarsi molto importante per la didattica)

- Ma nell’ultima parte si passa **dal suggerimento dato dall’immagine all’esecuzione del movimento del meccanismo**: «mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta». Se l’importanza della “costruzione sulla carta” non è accantonata, **si ricorre ad una pratica “esecuzione”.**

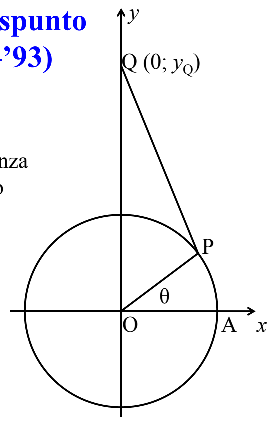




g – Problema (uno spunto dalla maturità ’92–’93)

Prima versione

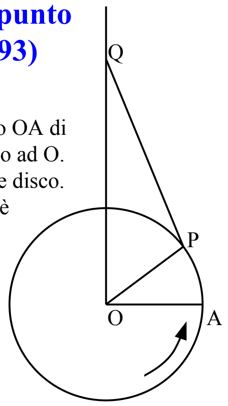
- Il punto P (cosθ; senθ) appartiene alla circonferenza di centro O (0; 0) e raggio OA con A (1; 0). Il punto Q (0; y_Q) appartiene al semiasse maggiore delle ordinate e PQ è il doppio del raggio. **Determinare il massimo e il minimo assunti da y_Q al variare di θ.**



g – Problema (uno spunto dalla maturità ’92–’93)

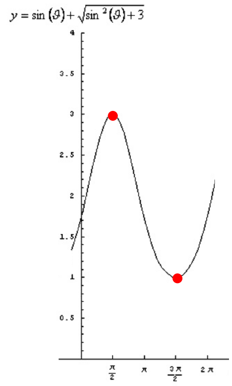
Seconda versione

- Il disco di centro O e raggio OA di misura unitaria ruota intorno ad O. P appartiene al bordo di tale disco. Una semiretta di origine O è perpendicolare a OA. Una sbarra PQ è lunga il doppio del raggio e Q è vincolato a muoversi sulla semiretta data. **Trovare i valori massimo e minimo assunti da OQ.**



g – Qual è il comportamento degli allievi?

- Risolvendo il problema nella prima versione, gli allievi (studenti di 5° anno del Liceo Scientifico) tendono **a ricavare e a studiare la funzione** $y = \sin\theta + (\sin^2\theta+3)^{1/2}$
- Tale funzione è:
  – massima per $\theta = \pi/2$ e in tale caso risulta $y = 3$
  – minima per $\theta = 3\pi/2$ e in tale caso risulta $y = 1$



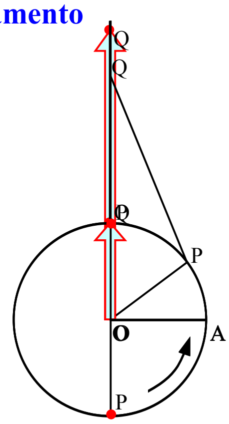
g – Qual è il comportamento degli allievi?

- Il precedente procedimento viene spesso eluso quando la risoluzione si riferisce alla seconda versione della traccia.
- In tale caso molti allievi danno le risposte:

  $y_{max} = 3$

  $y_{min} = 1$

  senza **ricorrere allo studio di funzione.**



g – Qual è il comportamento degli allievi?

- Naturalmente è importante considerare l’influenza del **contratto didattico**: nella prima versione, la presenza di un riferimento cartesiano, l’indicazione della variabile θ e della funzione $f(\theta)$ inducono gli allievi a inquadrare il problema come un tradizionale “studio di funzione”.
- È peraltro interessante osservare che il riferimento ad un “disco” rotante, dunque ad un meccanismo concreto, svincola gli allievi dall’applicazione di **una procedura sostanzialmente non necessaria.**
- **La secondità si rivela didatticamente utile…**

Il ruolo dell’“oggetto”: che cosa rappresentano i segni?

- Ci resta da capire cos’è l’“oggetto” che sta alla base delle rappresentazioni (segni) della matematica.
- Consideriamo la **definizione euclidea di cerchio** (*Elementi*, I, Def. XV) come figura piana racchiusa da una linea (circonferenza) tale che i segmenti tirati da un punto interno ad essa siano tutti uguali:
- «Cerchio è una figura piana compresa da un’unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro».

Il ruolo dell’“oggetto”: che cosa rappresentano i segni?

- Essa è vicina alla moderna nozione di luogo geometrico e può apparire sensibilmente diversa dalla **definizione euclidea di sfera** (*Elementi*, XI, Def. XIV) che si riferisce alla figura solida generata da un semicerchio quando questa ruota attorno al proprio diametro:
- «Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere».

Il ruolo dell'"oggetto": che cosa rappresentano i segni?

- Quest'ultima descrizione, nota Enrico Giusti (1999, p. 23), «evoca più il tornio dell'operaio che il compasso del geometra» (avremmo potuto attenderci un riferimento alla proprietà dei punti della superficie sferica che hanno distanza fissa dal centro).
- Ma un esame dell'**introduzione euclidea della linea retta** (Libro I, primi tre postulati) è significativo:
- «Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto; e che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta; e che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza».

Il ruolo dell'"oggetto": che cosa rappresentano i segni?

- Questi postulati (Giusti, 1999, p. 25) «riproducono quasi esattamente le operazioni dell'agrimensore»: condurre una linea retta tra due punti dati, prolungare un segmento, tracciare una circonferenza. Sulla base di ciò avanziamo un'ipotesi importante per interpretare le definizioni euclidee…
- … che gli oggetti matematici provengano non dall'astrazione di oggetti reali, dei quali essi descriverebbero le caratteristiche, bensì **da un processo di oggettualizzazione di procedure.**

Il linguaggio (i linguaggi) nella matematica e nella didattica

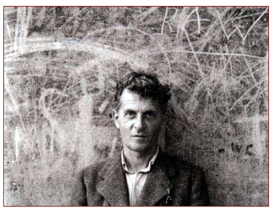
- L'analisi semiotica mostra che non solo il diagramma è in grado di fungere da collegamento (iconico) tra due fasi simboliche generali.
- Anche l'aspetto indicale può avere un ruolo didatticamente rilevante!
- La ricchezza dei linguaggi della matematica non può essere imbrigliata in un unico schema.
- **Nella storia e nella geografia della matematica le diverse tradizioni culturali hanno dato peso a diversi tipi di segni.**
- **La didattica può tenere conto di questa ricchezza.**

Il linguaggio (i linguaggi) nella matematica e nella didattica

- "I matematici sono una specie di **francesi**: se si parla con loro, **traducono tutto nella loro lingua, e allora tutto diventa subito qualcosa di completamente diverso**" (Goethe, *Massime e Riflessioni*, nr. 1279 – grazie a T. Pellegrino e a L. Zuccheri).
- Anche nella didattica della matematica utilizziamo una lingua…
- …e si tratta di evitare che la nostra "traduzione" finisca per allontanare troppo la matematica dalle sue radici, dall'esperienza, dalla realtà.

Possiamo pensare ad una matematica che faccia a meno di "strumenti"?

- "Capire una frase –potremmo dire– è comprenderne l'uso. (…) **Tutti i calcoli della matematica**
1 **sono stati inventati per assecondare l'esperienza**
2 **e poi sono stati resi indipendenti dall'esperienza"**



Ludwig Wittgenstein (*Lezioni sui fondamenti della matematica: Cambridge 1939*. Cornell Univ. Press, Itacha 1986. Boringhieri, Torino 1982)

Possiamo pensare ad una matematica che faccia a meno di "strumenti"?

- Con il celebre *cogito ergo sum* Cartesio affermava: penso, dunque esisto.
- **Osservando che la matematica "funziona", potremmo essere indotti ad affermare che essa "esiste"** e magari che il lavoro del matematico si riduce a quello dello scopritore.
- Questa conclusione non ci sembra però giustificata: **il fatto che la matematica funzioni significa che… funziona, nulla di più.**
- Potremmo limitarci a dire che essa funziona in quanto è stata **concepita (ovvero "creata") in un certo modo, con la compresenza di due aspetti:**

Possiamo pensare ad una matematica che faccia a meno di “strumenti”?

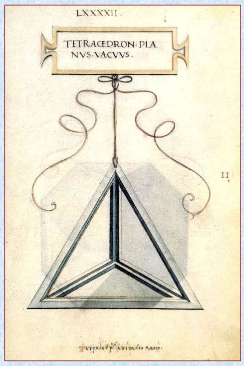
(ispirandoci idealmente a Wittgenstein)

1. **un collegamento con il mondo reale** (sebbene tale connessione non possa essere ridotta ad un semplice “rispecchiamento”);
2. **la scelta di alcune posizioni convenzionali, socialmente elaborate ed accettate,** le quali rendono possibile stabilire proprietà e analogie, con la conseguente costruzione di “oggetti matematici” astratti.

“inventati per assecondare l’esperienza

e poi sono stati resi indipendenti dall’esperienza”

A tutti grazie dell’attenzione



Grazie a Paolo Boero e a Giampaolo Chiappini