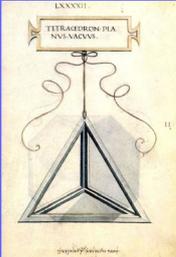


**Laboratorio didattico informatico**  
**Elementi di semiotica – 3**



**Giorgio T. Bagni**  
Facoltà di Scienze della Formazione  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Udine  
[bagni@dimi.uniud.it](mailto:bagni@dimi.uniud.it)  
[www.syllogismos.it](http://www.syllogismos.it)

**f – Insiemi e diagrammi**

- La presentazione didattica dei primi elementi della teoria intuitiva degli insiemi propone situazioni interessanti. Vengono utilizzati più registri:
  - verbali** “insieme, elemento, appartenenza, sottoinsieme, inclusione” etc.
  - simbolici** lettere,  $\in$ ,  $\subseteq$ ,  $\cap$ ,  $\cup$ ,  $\emptyset$  etc.
  - visuali** diagrammi di Eulero-Venn etc.
- Seguendo Peirce, l'uso di simboli o di termini generali può essere vicino al segno **simbolico**.
- Un diagramma di Eulero ha una componente **iconica**.
- Un esempio concreto (un sacchetto contenente alcuni oggetti) può evocare una componente **indicale**.

**f – Introduciamo il problema**

- La presenza di **diversi registri** è fondamentale: «Il funzionamento cognitivo della mente umana è inseparabile dall'esistenza di una varietà di registri semiotici di rappresentazione» (R. Duval).
- «I diagrammi possono avere un **ruolo evocativo** notevole, ma non sono né il concetto di insieme né quello di collezione né una loro approssimazione. [...]
- Come proporre la situazione se l'elemento indicato dal punto è a sua volta una collezione? L'idea di indicare **un elemento con una regione interna** non va bene perché **fa confondere l'appartenenza con la relazione di sottocollezione**, che è tutt'altra cosa» (R. Ferro; si veda anche: Freudenthal, 1983).



Ciò è accaduto anche nella didattica: ad esempio, negli anni Settanta l'influenza del gruppo Bourbaki ha portato a privilegiare alcune rappresentazioni a scapito di altre (come quelle visuali), favorendo un approccio simbolico alla matematica e quindi un “pensare analiticamente” a scapito del “pensare per immagini”...

**f – Un primo esempio**

- Alcuni concetti fondamentali della teoria degli insiemi hanno per i bambini un significato intuitivo che sarà **precisato in una fase più avanzata** (è una delle caratteristiche dei concetti scientifici per Vygotskij).
- Fischbein e Baltsan (1999) notano che gli studenti a volte generalizzano spunti derivanti dall'insegnamento ben prima di sviluppare delle complete capacità critiche: **i bambini ai quali sia stata presentata una qualche attività tendono a costruire uno schema che più tardi sarà sostituito da schemi alternativi**; ma quel vecchio schema può diventare un **modello che tacitamente influenza il ragionamento** degli studenti, nonostante la presenza di schemi più avanzati (Linchevski & Livneh, 2002).

**f – Un primo esempio**

- I diagrammi di Eulero-Venn *geometrizzano* la struttura predicativa delle espressioni fondamentali delle relazioni insiemistiche.
- Sono uno strumento didattico assai importante, ma possono completamente “rimpiazzare” tale struttura predicativa?
- I sistemi semiotici sono culturalmente collegati agli “oggetti” matematici in modo diverso, specifico** (Radford): partendo da queste considerazioni esamineremo due case studies mediante i quali avremo la possibilità di riflettere su alcune difficoltà incontrate dagli studenti nella distinzione dei concetti di inclusione e di appartenenza.

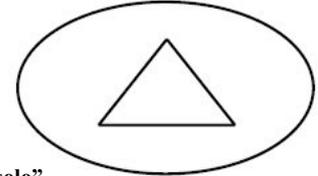
### f – Un primo esempio

- Presenteremo il primo case study mediante la trascrizione di un breve estratto registrato (1 minuto e 30 secondi). Due allieve della prima classe di una Scuola Media a Treviso, S. e G. (11 anni), vengono invitate dall'insegnante a **rappresentare un insieme mediante un diagramma di Eulero-Venn**.
- Al momento dell'esperienza (avvenuta in classe, durante un'ora di lezione, ma in un'occasione non valutativa), gli allievi conoscevano le nozioni fondamentali di insieme, appartenenza, sottoinsieme nonché le rappresentazioni con i diagrammi di Eulero-Venn.
- L'insegnante scrive alla lavagna...



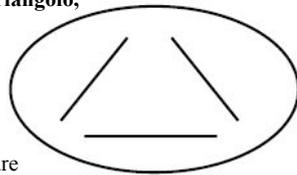
### f – Un primo esempio

- **Rappresentare mediante una figura l'insieme dei lati di un triangolo**
- Le due allieve, S. e G., sono alla lavagna; la prima cercherà due volte di eseguire l'esercizio, mentre G. proporrà alcuni commenti.
- S. (*disegna*): "Ecco!"
- Insegnante: "Non è sbagliato, hai fatto un bel disegno. Però potrebbe essere **un insieme con un elemento solo**".



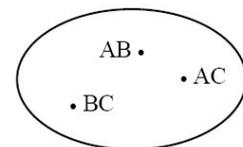
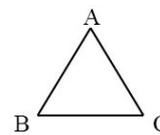
### f – Un primo esempio

- S.: "Perché uno? Ho fatto tre lati".
- Ins.: "Sì, ma fanno parte del triangolo: è un triangolo che ti viene in mente, tutta la figura, non i tre lati".
- G.: "Eh, anch'io ci vedo il triangolo e no i tre lati!"
- S.: "E cosa devo fare? Devo romperlo?" (*Disegna*).
- G.: "**No, non è un triangolo, l'esercizio diceva triangolo**".
- Ins.: "Andava bene se si interpreta bene la figura. Provi a pensare a un'altra rappresentazione?"



### f – Un primo esempio

- S.: "Ancora con quei disegni lì?"
- Ins.: "Sì, coi diagrammi di Eulero-Venn".
- S. (*dopo qualche istante*): "Mm, no".
- Insegnante: "Senti, cerco di darti un'idea. Ti ricordi che quando facciamo geometria usiamo le lettere per dare i nomi ai punti e ai lati? Proviamo anche qui. Eh, ti va?" (*Disegna le figure*).



### Rappresentare mediante una figura l'insieme dei lati di un triangolo

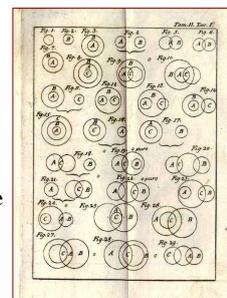
**Ad un insieme appartengono elementi "singoli", ma i lati di un triangolo sono "geometricamente collegati"**

- nella I, gli elementi dell'insieme sono **riprodotti** come **segmenti** e come **lati di un (particolare) triangolo**;
- nella II, gli elementi restano **segmenti**, ma vengono disegnati in una posizione che non corrisponde completamente a quella dei lati di un triangolo;
- nella III, gli elementi sono rappresentati da punti singoli, isolati. La loro interpretazione come segmenti e come lati di un triangolo richiede una figura esplicativa, esterna alla rappresentazione.



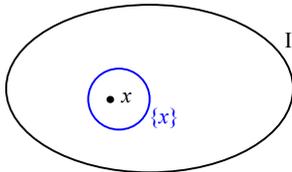
### f – Un primo esempio

- I diagrammi di Eulero-Venn non sono solamente contenitori nei quali collocare gli elementi: ridurre tale rappresentazione a frasi come "l'elemento *a* è nell'insieme *A*", suggerite dalla rappresentazione, può essere semplicistico.
- Inoltre si noti l'affermazione dell'insegnante secondo la quale **una rappresentazione va interpretata** ("La tua risposta andava bene se si interpreta bene la figura").



### f – Verso il secondo esempio...

- In generale è fondamentale considerare la differenza tra:
- appartenenza:**  $x \in I$
- inclusione:**  $\{x\} \subseteq I$
- appartenenza all'insieme delle parti:**  $\{x\} \in \wp(I)$



- L'appartenenza coinvolge oggetti di diverso genere; l'inclusione si definisce tra oggetti dello stesso tipo.

### f – Termini “delicati”

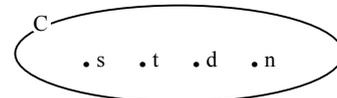
- Parlando di “insiemi e linguaggio”, C. Marchini osserva:
- «I concetti matematici, spesso frutto di precisazioni e di analisi approfondite, essendo **ispirati da situazioni esperienziali**, [hanno] conservato nomi ed appellativi di uso comune; ma interpretarli in modo intuitivo può dar luogo ad errori o incomprensioni».
- Un termine potenzialmente **ambiguo**: “**contiene**”.
- Inoltre, attenzione agli esempi:** “*la cartella è un insieme di oggetti?*” (esempio tratto da una pubblicazione per la Scuola Primaria) ... può essere fuorviante!

### f – Un secondo esempio: il caso di K.

- K.**, 15 anni, frequenta il primo anno del corso di Ginnasio-Liceo Classico (IV ginnasio, Treviso, Italia). Il suo profitto è medio-alto in tutte le materie. A K. erano stati introdotti (con definizioni e simboli):
- insiemi, elementi:** «Si usa la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una raccolta, una collezione di *elementi*: questi possono essere oggetti, individui, simboli, numeri, figure geometriche etc. Riterremo che gli elementi di un insieme siano ben definiti e distinti tra loro. [...] Generalmente gli insiemi si indicano con lettere maiuscole; gli elementi di un insieme si indicano con minuscole. La scrittura  $a \in A$  si legge a appartiene ad A» (**dal libro di K.**)

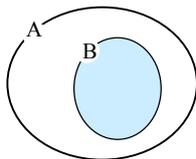
### f – Il libro di K.

- i diagrammi di Eulero-Venn:** «Si dà una rappresentazione geometrica : si delimita con una linea chiusa una regione del piano e si rappresentano gli elementi dell'insieme mediante punti all'interno di tale regione (eventualmente indicando il nome di ciascun elemento accanto al punto che lo rappresenta)».
- Riportiamo inoltre l'esempio indicato, riguardante l'insieme C delle consonanti della parola *studente*:



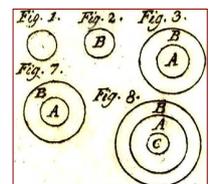
### f – Il libro di K.

- sottoinsiemi:** «Considerati due insiemi A e B si dice che B è un *sottoinsieme* di A quando ogni elemento di B appartiene anche ad A. In simboli si scrive  $B \subseteq A$  che si legge B è contenuto in A o è uguale ad A o B è incluso in A o è uguale ad A» [disegno riportato].
- insieme delle parti:** «Dato un insieme A si definisce *insieme delle parti* di A quell'insieme, indicato con  $\wp(A)$ , che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di A. [...] In generale, se A contiene n elementi,  $\wp(A)$  ha  $2^n$  elementi».



### f – Il libro di K.

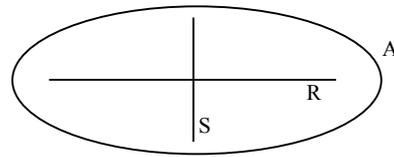
- Oltre all'uso ambiguo di *contiene*, si noti il ricorso diverso ai diagrammi di Eulero-Venn nei due esempi: nel primo, gli elementi sono indicati da **singoli punti**; nel secondo, **tutti i punti** della parte interna sono considerati elementi (come in Eulero).
- Nelle lezioni erano stati visti esempi con insiemi di numeri.
- Presenteremo la trascrizione di due brevi estratti registrati: nel primo (1'.30"), a K. viene richiesto di risolvere, alla lavagna, un esercizio. Nel secondo (1'.30"), K. riconsidererà la propria risoluzione.



### f – Il caso di K.

- Durante un'esercitazione orale in classe (non in un'occasione di valutazione), a K. viene proposto l'esercizio seguente:  
*I è l'insieme dei punti del piano. R è l'insieme dei punti di una retta data nel piano. S è l'insieme dei punti di una retta data nel piano perpendicolare alla precedente. A è l'insieme che ha per elementi R e S.  
 A appartiene all'insieme delle parti di I?*
- La traccia dell'esercizio, dettata dallo sperimentatore (che non era l'insegnante di matematica nella classe di K.), è stata scritta sulla lavagna dall'allieva, che è stata poi lasciata libera di procedere per la sua risoluzione.

### f – Il caso di K.



I sistemi di rappresentazione si legano all'esperienza (spaziale e temporale) in molti modi. **Importanti sono le azioni mediante le quali gli elementi vengono "raggruppati" con una linea.** La connessione tra azioni e concetti è evidenziata dall'uso di termini deittici e di gesti.

### f – Il caso di K.

- K.: "Questo è l'insieme A". (Rilegge velocemente la traccia dell'esercizio). "Devo vedere se A appartiene all'insieme delle parti di I".
- K. (dopo aver guardato lo sperimentatore): "L'insieme delle parti di I contiene i sottoinsiemi di I. Le figure che posso disegnare sono fatte di punti, cioè tutte le figure del piano sono degli elementi dell'insieme delle parti di I".
- K. (dopo una decina di secondi): "A contiene le due rette (indica le rette) ed è una figura del piano".
- K. (fissa lo sperimentatore): "Dunque A è un elemento dell'insieme delle parti di I".

### f – Il... sillogismo di K.

["L'insieme delle parti di I **contiene** i sottoinsiemi di I"].

K. sembra interpretare:  
 $J \in \emptyset(I)$

- "Tutte le figure del piano sono degli elementi dell'insieme delle parti di I".
- "A **contiene** le due rette ed è una figura del piano".
- "Dunque A è un elemento dell'insieme delle parti di I".

K. sembra interpretare:  
 $R \subseteq A, S \subseteq A$

Il ragionamento sembra funzionare...

### f – Note sul comportamento di K.

- In una prima fase, K. ha utilizzato il termine "contiene" con riferimento all'**appartenenza**.
- In una seconda fase, K. ha utilizzato il termine "contiene" con riferimento all'**inclusione**.
- **Perché?**  
 Ripercorriamo la "risoluzione" **icona, alla Peirce** con riferimento ai registri rappresentativi coinvolti: **simbolo, alla Peirce**
- l'esercizio dato è **espresso verbalmente**
- subito K. traduce la situazione in **un registro visuale**
- quindi continua a riferirsi a quanto ha tracciato e parla dell'insieme A dicendo "**le due rette**".

### f – Note sul comportamento di K.

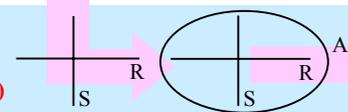
Registro **simbolico** (simbolo, P.)

$A = \{R; S\}$  (sarebbe giusto)  $A = R \cup S$  (sbagliato!)

Registro **verbale** (simbolo, P.)

R (dato) S (dato)  $A$  insieme che ha per elementi R e S

Registro **visuale** (icona, P.)



- Nota bene: K. **non** utilizza i simboli insiemistici.

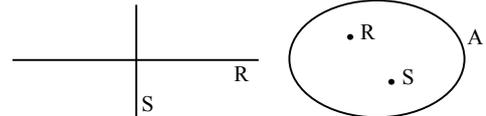
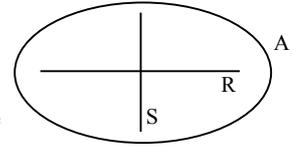
### f – Note sul comportamento di K.

- L'uso di **un** registro visuale (segni iconici) sembra impedire a K. di apprezzare la sfumatura chiave: A è l'insieme che ha per elementi **i due oggetti R e S.**
- Invece K. considera la "figura"  $A = R \cup S$ : le due rette perpendicolari considerate hanno indotto **la considerazione di una "figura unica"**.
- Sottolineiamo che si tratta di **un** uso del registro visuale (diverso da quello corretto dei diagrammi di Eulero-Venn!).
- In un certo senso, può essere la componente iconica a indurre una qualche difficoltà interpretativa.



### f – Note sul comportamento di K.

- Questa situazione (alla quale si riferisce K.) ha erroneamente indotto l'allieva a considerare R, S come sottoinsiemi di A.
- La seguente, **in cui il diagramma viene utilizzato con una minore componente iconica**, suggerirebbe invece l'appartenenza.



### f – Dopo la diagnosi, la terapia...

- Non ci sembra opportuno ricorrere a impostazioni concettuali particolari.
- È necessario il **controllo delle componenti iconica, indicale e simbolica dei segni impiegati.**
- Nel caso esaminato, l'uso di espressioni simboliche, se il loro significato è correttamente compreso, può risultare incisivo. Ad esempio:
- per definizione:  $\{R; S\} \in \wp(I)$  significa  $\{R; S\} \subseteq I$
- cioè:  $R \in I$  e  $S \in I$
- nel nostro caso: ciò non è vero
- dunque:  $\{R; S\} \notin \wp(I)$ .



### f – Reazioni di K. alla terapia

- Sperim.: "Torniamo alle definizioni che conosci". (Cancella il disegno alla lavagna e scrive):  $\{R; S\} \in \wp(I)$  significa  $\{R; S\} \subseteq I$  cioè  $R \in I$  e  $S \in I$
- Sperim.: "Adesso pensa a  $R \in I$  e  $S \in I$ : è vero o non è vero?"
- K.: "I è il piano, R e S sono le rette" (sta per disegnarle ancora).
- Sperim.: "Non disegnare, stavolta, pensaci su. Hai detto che I è il piano: non puoi essere più precisa?"
- K. (dopo alcuni secondi, rilegge la traccia): Cioè I è l'insieme dei punti del piano. Non è una cosa sola, è un insieme, scritto con la maiuscola".



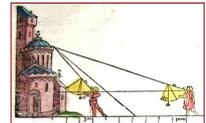
### f – Reazioni di K. alla terapia

- Sperim.: "Ed è un insieme di che cosa?"
- K.: "Di punti. Di punti del piano".
- Sperim.: "Dunque rispondi: R, S sono elementi di I?"
- K. (un po' incerta): "No, R e S sono insiemi, non elementi. Sono scritti con le maiuscole".
- L'argomentazione di K. non è convincente: sembra basata su di un'alternativa tra "insiemi" ed "elementi".
- L'uso tradizionale delle lettere **minuscole** (per gli elementi) e delle lettere **maiuscole** (per gli insiemi) può avere alcune controindicazioni importanti.
- Si rischia di "suddividere" gli "oggetti matematici" in **due categorie ben separate.**



### f – Registri visuali e icone

- L'allieva non si trova a proprio agio nell'applicare le definizioni formalmente. Anche dopo che lo Sperim. ha forzato l'uso del registro simbolico, K. **tende a riprendere il registro visuale.**
- I registri visuali rassicurano, aderiscono all'**esempio**: la **geometria**, uno dei settori associati all'icona.
- I registri simbolici richiedono l'astrazione, sono generali (anche se a volte i simboli hanno valore implicito:  $x$  non è  $x_0$ ,  $n$  è un naturale,  $p$  è primo etc.).
- Non c'è **un** registro di un tipo dato, ma **più registri visuali con diverse componenti (ad es. simboliche).**



### f – Registri visuali e icone

- È essenziale un **chiarimento** di ogni mezzo attraverso cui insegnante e allievi esprimono i concetti.
- Spesso però le stesse notazioni si chiariscono (anche) attraverso il loro uso; dunque preferiamo una **negoiazione** all'**introduzione preliminare**.
- Devono essere negoziati esplicitamente i significati di: **termini** introdotti (evitando ambiguità) **rappresentazioni visuali** (diagrammi di Eulero-Venn con **diverse componenti iconiche**) **simboli** usati (maiuscole/minuscole)
- Un uso non chiaro di termini, rappresentazioni visuali e simboli può portare alla formazione di ostacoli.

### f – Registri visuali e icone

- Qualche considerazione riassuntiva...
- Il **ragionamento diagrammatico** (iconico) può risultare “delicato” (o fuorviante) in quanto:
  - ▶ fa riferimento a un **caso particolare** e richiede quindi una generalizzazione talvolta non banale;
  - ▶ può contribuire a porre l'accento su **elementi non rilevanti** rispetto al contenuto matematico in gioco.
- Eppure operativamente è:
  - ▶ **utile** per sviluppare un'argomentazione;
  - ▶ **spontaneo**, ovvero tale da indurre l'allievo a ricorrere ad esso (ad esempio per la geometria).
- È **necessario controllare la componente iconica**.

*A tutti grazie  
dell'attenzione*

Grazie a Paolo Boero e  
a Giampaolo Chiappini

