



**Laboratorio didattico informatico**  
**Elementi di semiotica – 2**



**Giorgio T. Bagni**  
Facoltà di Scienze della Formazione  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Udine  
[bagni@dimi.uniud.it](mailto:bagni@dimi.uniud.it)  
[www.syllogismos.it](http://www.syllogismos.it)



**e – Che cos'è l'algebra?**  
**Algebra cinese e carattere posizionale**

- La disciplina che consente la risoluzione di **equazioni espresse mediante simboli specifici** risale al XVI sec. (a partire da Viète c'è la possibilità di parametrizzare, dunque di considerare non più un singolo problema ma una classe di problemi).
- Ma una disciplina espressa meno tecnicamente (algebra **sincopata**) può risalire al III secolo.
- L'espressione di problemi in forma **geometrica** risale al III sec. a.C. (algebra **geometrica**).
- E i problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti a partire dal **II millennio a.C.**



**e – Che cos'è l'algebra?**  
**Algebra cinese e carattere posizionale**

- In **Cina** l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e operazioni) con un importante **"carattere posizionale"** (Needham 1959, p. 112).
- La **tavola da calcolo algebrica** cinese era impostata in modo che **determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze** (incognite, potenze etc.)
- e tale convenzione può considerarsi un importante **artefatto secondario** (secondo Wartofsky) da abbinare all'artefatto primario, lo strumento vero e proprio.



**e – Che cos'è l'algebra?**  
**Algebra cinese e carattere posizionale**

- Il carattere posizionale dell'algebra cinese ha avuto conseguenze diverse:
- ha posto l'accento sull'importanza dell'**impostazione matriciale** (ma il determinante fu sviluppato piuttosto tardi, nel 1683, dal giapponese Seki Kowa; ricordiamo che la prima formulazione occidentale risale a Leibniz, nel 1693);
- parallelamente, però, ha causato l'**inibizione dello sviluppo di un simbolismo algebrico** (ad esempio, mancano segni specifici per indicare l'uguaglianza o per le potenze).



**e – Le formule algebriche e la classificazione peirceana**

- Secondo **Peirce**, una formula algebrica «è un'icona, ed è resa tale dalle regole di commutazione, associazione e distribuzione dei simboli».
- Ciò « può sembrare a prima vista una classificazione arbitraria; perché potrebbe [...] essere considerata come un segno convenzionale composto. Ma non è così: perché una proprietà altamente distintiva dell'icona è che **attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa**» (Peirce, 2.279, MS 787).



**e – Le formule algebriche e la classificazione peirceana**

- Pensiamo ad esempio all'equazione:  $x^2+8x = 105$
- La **"trattiamo" come un segno simbolico?**
- Pensiamo sempre ai singoli simboli ("il quadrato dell'incognita aumentato dell'incognita moltiplicata per 8 deve dare 105")? Pensiamo che ai simboli corrisponda, ad esempio, una "realtà" geometrica?
- Oppure **la trattiamo iconicamente**, applicando regole evocate dalla semplice "osservazione" della scrittura?

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{(-8)^2 + 4 \cdot 105}}{2} = \frac{-8 \pm 22}{2} = \begin{cases} 7 \\ -15 \end{cases}$$

### e – Torniamo all'algebra cinese e al suo carattere posizionale



termine noto  
coeff.  $x$   
coeff.  $x^2$

Nel presente studio esamineremo un esempio significativo di "calcolo mediante tabelle"

E si noti l'uso di bacchette...

- Ad esempio, questa tabella (*sangi*) indica l'equazione:  $851x^2 - 3450x + 2691 = 0$  (si osservino i diversi colori e l'assenza dello zero).

### e – Calcolo e tabelle: Chiu Chang, "nove capitoli sulle arti matematiche"

- Consideriamo il **problema** seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (*Fang Cheng*) del *Chiu Chang* (precedente al I sec.):
- Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?
- Oggi indicheremo rispettivamente con  $x$  e con  $y$  (in sheng) i rendimenti di un covone di tipo A e di un covone di tipo B ed imposteremo un sistema...

### e – Il problema del Chiu Chang porta ad un sistema lineare

- Consideriamo il sistema di equazioni lineari costituito da:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- Riportiamo in una tabella i coefficienti e i termini noti.

5	3	19
3	2	12

- Operiamo ora per modificare la tabella sapendo che:

**Regole:** (1) si possono variare in proporzione tutti i termini delle righe e (2) a una riga si può sostituire la riga ottenuta sommando o sottraendo i termini corrispondenti di due righe.

### e – Il problema del Chiu Chang porta ad un sistema lineare

Una possibilità è operare sulle righe per rendere uguali i primi elementi:

- moltiplichiamo la prima riga per 3,
- e la seconda per 5.
- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima,
- moltiplichiamo questa seconda riga per 9
- e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine si divide la prima riga per 15 e la seconda per 9.

1	0	2
mcm=15	1	3
0		

### e – Il problema del Chiu Chang porta ad un sistema lineare

- Eravamo partiti da un sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- e siamo pervenuti alla sua soluzione:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

- Un'esperienza didattica è stata realizzata nella Scuola Media (2005).

1	0	2
0	1	3
coeff. di $x$	coeff. di $y$	rendim. (sheng)

### e – Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Descriveremo sinteticamente alcuni risultati di un'esperienza didattica condotta in una **classe I media** (allievi di 11-12 anni) a Treviso alla fine del 2004.
- Al momento dell'esperienza gli allievi **non avevano trattato i numeri negativi né le equazioni**. Solo alcuni di essi avevano qualche esperienza (risalente alla scuola primaria) con esercizi del tipo: "indovina un numero sapendo che..."
- L'esperienza si è svolta in aula, durante un'ora di lezione, alla presenza dell'insegnante di matematica e dello sperimentatore (che non è mai intervenuto).

### e – Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Era stata precedentemente introdotta alla classe la **rappresentazione dei numeri con le bacchette**; gli allievi hanno avuto occasione di esercitarsi.
- In una **tabella corredata con etichette**, realizzata su di un banco, era stato poi rappresentato il problema: “due pacchetti uguali contengono, in tutto, quattro biscotti. Quanti biscotti ci sono in ciascun pacchetto?”
- Era stato poi mostrato che dividendo per 2 i numeri in tutte le caselle della tabella si ottiene la soluzione.

pacchetti	biscotti

### e – Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Gli allievi sono stati suddivisi in sei gruppi di tre.
- Durante la risoluzione, il ruolo dell’insegnante è stato di controllo (passando tra i vari gruppi): ha segnalato eventuali errori, ma non ha dato suggerimenti.

#### Problema, ispirato al Chiu Chang

Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng.  
Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng.  
Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

### e – Una verifica sperimentale nella Scuola Media

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

- Significativi sono alcuni **ampi gesti con le mani**: “**adesso posso fare questi meno quelli**” (indicando le righe).
- Indicativa, inoltre, è una frase pronunciata da F. (l’allieva che ha più attivamente collaborato con S.): “**Si riesce quando due diventano uguali**”.

covoni tipo A	covoni tipo B	grano

### e – Una verifica sperimentale nella Scuola Media

- Dunque S. e F. hanno utilizzato solamente la **regola che consente di sottrarre una riga dall’altra**.
- Ma tale modo di procedere **non è sempre applicabile** (gli allievi **non** avevano trattato i numeri negativi).
- Allo stesso gruppo è stato proposto **un altro problema**:
- Quattro covoni di grano di tipo A aggiunti a un covone di grano di tipo B hanno il rendimento di 6 sheng. Due covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 8 sheng.  
Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

### e – Una verifica sperimentale nella Scuola Media

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

- Dopo una fase di perplessità (“**non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza**”), S. applicherà la regola che consente di moltiplicare gli elementi di una riga per  $k > 0$  (in questo caso: la prima riga per  $k = 3$ ).
- F. ribadisce: “**Si, si, bisogna far diventare questo... uguale a questi!**” e il procedimento può proseguire.

covoni tipo A	covoni tipo B	grano

C’è l’aspetto **iconico**, ma anche la componente **indicale**

Una componente **indicale**, legata alla **concretezza**, in questo caso è prevalente

- L’uso frequente di **espressioni deittiche** (“questi”, “quelli”) accompagnato dalla **marcata fase gestuale** ci sembra interessante (come evidenziato ad esempio in: Steinbring, 2002).
- Le allieve hanno preferito la “regola” (artefatto secondario) più direttamente **legata alla presenza fisica dei bastoncini** (“**fare questi meno quelli**”).
- Il ricorso all’altra “regola” è stato suggerito dalla possibilità di applicare la “regola della sottrazione” (infatti “**si riesce quando due diventano uguali**”).

### e – Riflessioni sull'algebra cinese Diagrammi e gioco

- La rappresentazione ottenuta con le bacchette sulla tavola da calcolo è costituita da un complesso di segni, relazioni spaziali, regole incorporate.
- È qualcosa che porta a costruire il (un) **linguaggio algebrico**?
- Il linguaggio algebrico è specifico e difficilmente può essere costruito in modo “spontaneo”: ha richiesto millenni, nella storia della nostra disciplina... (P. Boero, intervento a Rimini 2008).



### e – Riflessioni sull'algebra cinese Diagrammi e gioco

- Gli allievi si accostano alla rappresentazione ottenuta come ad un **gioco**.
- Dunque potrebbe essere il **gioco stesso** (che, per l'allievo, è dotato di significato in quanto “gioco nuovo”) a conferire significato al procedimento.
- Del resto “per esprimere le relazioni algebriche non sono sempre indispensabili i tipici segni dell'algebra” (Steinbring, 2002, p. 20).



### e – Riflessioni sull'algebra cinese Diagrammi e gioco

- L'aspetto fondamentale è l'approccio alle regole di elaborazione delle tabelle.
- Gli allievi applicano delle regole “grafiche”, **fortemente legate alla disposizione (iconica)** degli elementi nello spazio della tavola da calcolo.
- Con Peirce ripetiamo: «una proprietà altamente distintiva dell'icona è che **attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa**».
- E non dimentichiamo la concretezza dell'indice: nel contesto cinese i numeri erano espressi da **bacchette!**

### e – Segni e interpreti Ricordiamo quanto sopra notato

- ▶ **Uno stesso segno può essere interpretato** in modi diversi: può essere attribuita maggiore o minore importanza agli aspetti iconici, indicali, simbolici.
- ▶ **Ciò dipende dal segno, ma anche da chi è chiamato a interpretare**, dai contesti socio-culturali che hanno alle spalle i nostri allievi.
- ▶ **Da ciò dipende il comportamento degli allievi**, il loro apprendimento.
- Osservazioni come queste non devono essere trascurate ad esempio (ma non soltanto) in relazione a situazioni di interculturalità: potrebbe essere **un'occasione perduta per tutti** gli studenti...

*A tutti grazie dell'attenzione*

Grazie a Paolo Boero e a Giampaolo Chiappini

