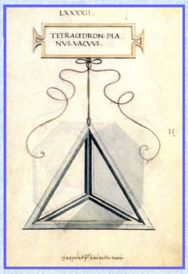
Laboratorio didattico informatico
Elementi di semiotica – 1



Giorgio T. Bagni

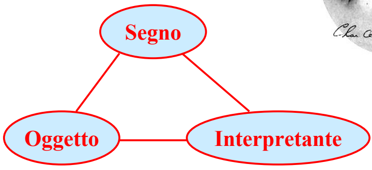
Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Riflettiamo sugli artefatti

- **Vygotskij** riconosce funzioni di mediazione agli strumenti tecnici e psicologici (**segni** o **strumenti di mediazione semiotica**).
- Per **Wartofsky** gli strumenti tecnici sono artefatti **primari**; gli artefatti **secondari** fissano modalità interpretative e di azione (la manipolazione è anche in accordo con **Lakoff, Johnson, Núñez**); una teoria matematica è un **artefatto terziario** che organizza i modelli costruiti come artefatti secondari (si tenga conto anche di **Rabardel**).
- **Studieremo i segni seguendo Peirce; vedremo che un segno va interpretato e manipolato.**

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

- Il **triangolo semiotico** è alla base dell'approccio peirceano:



- L'**oggetto** è rappresentato da un **segno** (***icona***, ***indice*** **o** ***simbolo*** a seconda che si abbia una rassomiglianza, una connessione causale o una convenzione) e suscita un **interpretante**, cioè una reazione in chi interpreta.

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

- Per Peirce il segno non fa conoscere direttamente un (nuovo) oggetto; quest'ultimo deve essere già in qualche modo accessibile all'interprete, in modo che il segno porti ulteriore informazione su di esso e susciti un interpretante.
- L'interpretante non è dunque una sorta di realtà da contemplare per comprendere il segno e quindi per conoscere l'oggetto.
- Fondamentale è **l'aspetto attivo, inferenziale**: Peirce introduce il segno come **mediazione fra l'oggetto e l'interpretante.**

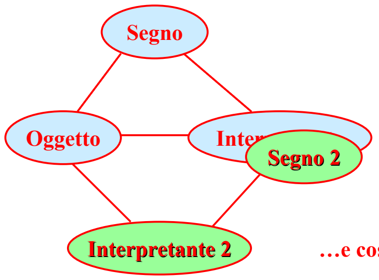
Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

- Ad esempio:

- Non si confonda l'**interprete** (chi percepisce il segno, in questo caso chi sente abbaiare il cane) con l'**interpretante**, cioè la sua reazione (lo spavento, il grido "attenti al cane").

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre "triangolo"

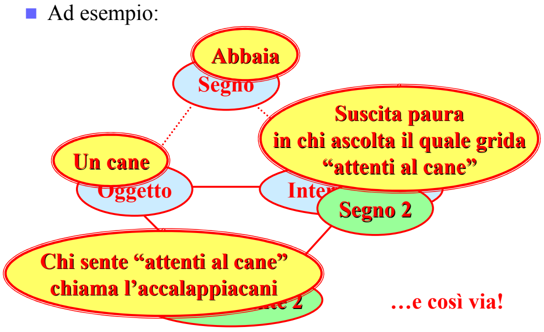
- Ma l'interpretante è a sua volta un segno e può essere interpretato:



…e così via!

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre “triangolo”

- Ad esempio:



…e così via!

Tre categorie “faneroscopiche”
(o fenomenologiche – da φανερóν)

- Peirce introduce le categorie della **primità, secondità** e **terzità** che riprendono le categorie kantiane
  della possibilità,
  dell’esistenza,
  della necessità,
  anche se assumono una portata più vasta.
- In Peirce sono nello stesso tempo **modalità in cui si organizza la nostra attività conoscitiva e categorie della realtà.**
- Sono categorie che ritroviamo a ogni livello del reale, della nostra esperienza e delle scienze.

Tre categorie “faneroscopiche”
(o fenomenologiche – da φανερóν)

- La **Primità** come categoria dell’esperienza è un *feeling*, non ancora individuato come appartenente a un ben preciso esistente. È la categoria del presente immediato, dell’immediatamente dato.
- La **Secondità** è collegata a ciò che accade e che quasi vincola il soggetto. È la categoria dell’appena percepito, dunque del passato.
- La **Terzità** riprende la mediazione, l’interpretazione, la ragione; sintetizza gli aspetti precedenti (pura qualità e fatto), ma non si riduce ad essi. Può collegarsi al futuro, in quanto una finalità influisce sull’azione con la mediazione della coscienza.

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- **L’icona si collega alla primità, l’indice alla secondità, il simbolo alla terzità.**
- **Il simbolo ha un ruolo molto importante: è un segno convenzionale che denota l’oggetto in virtù di una relazione di carattere mentale.** Esso si collega al contesto culturale in cui è elaborato (e interpretato) e possiede un’intrinseca significazione cognitiva di cui le icone e gli indici sono privi.
- **Il simbolo si basa però essenzialmente sull’aspetto convenzionale**, che non rispecchia l’**universalità** e dalla **certezza** dell’**inferenza matematica.**

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- «**Pure icone – così come puri indici o puri simboli – non si danno nella realtà attuale.** Esse rimangono un limite del pensiero-segno, carattere più o meno predominante in un oggetto effettivo, ma mai del tutto privo di mescolanza con le altre due entità della partizione semiotica. […] Un diagramma matematico è essenzialmente iconico nel suo rappresentare la configurazione relazionale degli elementi in questione, ma necessita tuttavia di indici per ancorarsi agli elementi raffigurati, e non può prescindere da un carattere simbolico che gli permetta di proporsi quale garante di una legge generale» (Marietti, 2001, p. 36).

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- «Le parole, sebbene indubitabilmente necessarie al pensiero già sviluppato, giocano un ruolo solo secondario nel processo; mentre il **diagramma**, o icona, che può venire manipolato e sul quale si possono fare esperimenti, è importantissimo. […] A cosa servono questi diagrammi? Servono per compierci sopra esperimenti. […] **Non esiste ragionamento che non abbia la natura del ragionamento diagrammatico o matematico**; e dunque non dobbiamo ammettere alcun concetto che non sia suscettibile di venire rappresentato in forma diagrammatica» (Peirce, MS 956).

Diagramma e individualità
Attenzione alle dimostrazioni…

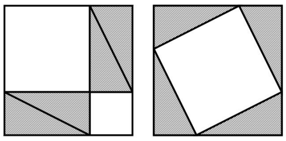
- Il **diagramma** rappresenta iconicamente la relazione matematica: l'icona costituita dal diagramma trasmette una caratteristica generale, pur essendo un soggetto individuale e osservabile (sul quale il matematico può operare per ottenere ulteriori caratteristiche generali del diagramma stesso).
- Rimane tuttavia **il problema dell'individualità dell'oggetto sul quale si sviluppa la dimostrazione contrapposta all'universalità delle conclusioni.**
- Una dimostrazione matematica, con la sua fondamentale universalità, non può ridursi a un diagramma iconico.

Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

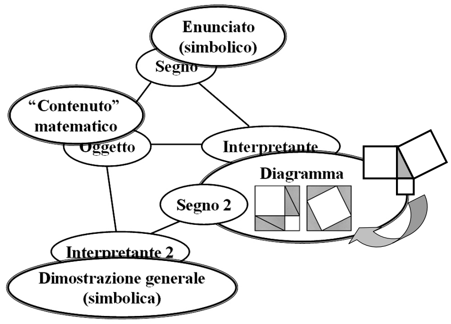
- Il diagramma ha le caratteristiche di un'icona, ma **dovrà associarsi (come ogni segno) a un interpretante** e questo è **simbolico ed è generale**:
- Il diagramma-icona **è interpretante dell'enunciato simbolico** che traduce secondo alcune convenzioni (un'intenzione, dice Peirce).
- Questo diagamma-icona **determina infine un nuovo interpretante simbolico e universale** quando è recepito alla luce della stessa intenzione.
- L'aspetto didattico può collocarsi in questo quadro teorico con caratteristiche specifiche: **il ruolo dell'indice potrà essere rivalutato didatticamente**

Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

- Consideriamo il teorema di Pitagora:
- **Enunciato** (universale): in **ogni** triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
- Da qui passiamo ad un **interpretante iconico…**
- **Diagramma:** il quadrato a sinistra e il quadrato a destra sono congruenti e il confronto delle loro scomposizioni verificare il teorema **(per questo caso).**



Una fase iconica
tra due momenti simbolici?



Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

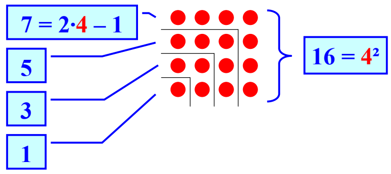
- Anticipiamo delle considerazioni che riprenderemo:
  - **Uno stesso segno può essere interpretato** in modi diversi: può essere attribuita maggiore o minore importanza agli aspetti iconici, indicali, simbolici.
  - **Ciò dipende dal segno, ma anche da chi è chiamato a interpretare,** dai contesti socio– –culturali che hanno alle spalle i nostri allievi (problema che supera l'ambiente scolastico).
  - **Da ciò dipende il comportamento degli allievi,** il loro apprendimento.
- Vedremo alcuni esempi e l'analisi semiotica di una situazione di insegnamento–apprendimento .

c – Analisi semiotica
di qualche "dimostrazione"

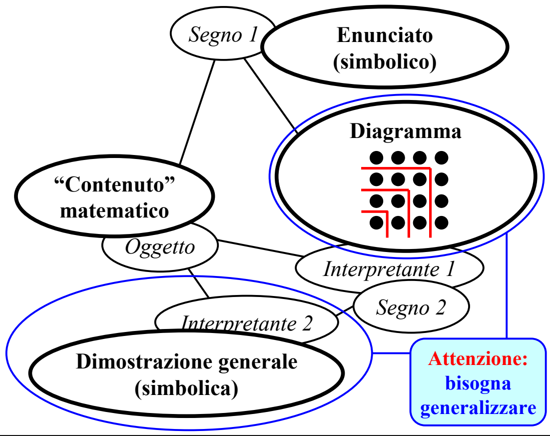
- La somma dei numeri naturali dispari da 1 a $2n–1$ (per n intero positivo qualsiasi) è n^2.
- Approccio simbolico: **dimostrazione per induzione**
  – per $n = 1$ si ha: $1 = 1^2$
  – dalla $1+3+…+(2n–1) = n^2$ si ricava:
  $1+3+…+(2n–1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$
- Nonostante le formule algebriche, per Peirce, abbiano una componente iconica, l'aspetto simbolico è legato ad esempio alla generalità.
- Alternativamente: **un approccio iconico**
  un approccio "misto"

c – Analisi semiotica
di qualche “dimostrazione”

- Un classico esempio (a volte detto “pitagorico”):



- **L’aspetto iconico è senz’altro prevalente!**
- Il punto da discutere è: in che modo si generalizza il procedimento a un intero positivo **qualsiasi?**
- Sulla base della stessa “intenzione convenzionale”…

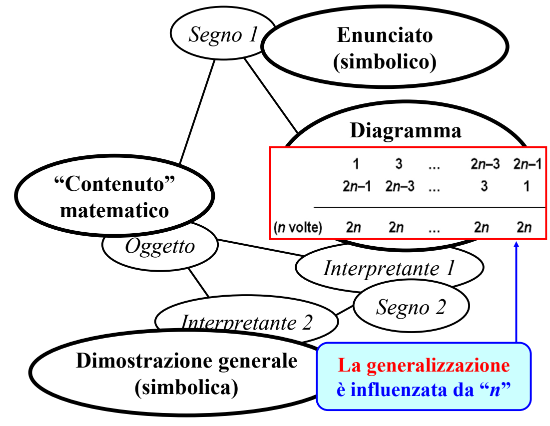


c – Analisi semiotica
di qualche “dimostrazione”

- **Un’altra possibilità** (vicina al “piccolo Gauss”):

	1	3	…	$2n-3$	$2n-1$
	$2n-1$	$2n-3$	…	3	1
(n volte)	$2n$	$2n$	…	$2n$	$2n$

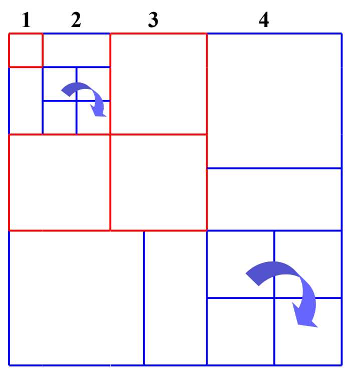
- Sotto la linea c’è “il doppio” di **1+3+…+2*n*–1** e il totale dei numeri sotto la linea è **$2n\cdot n = 2\cdot n^2$**
- **La componente iconica è ancora forte.**
- Il ricorso a **“…”** elude la dimostrazione per induzione.



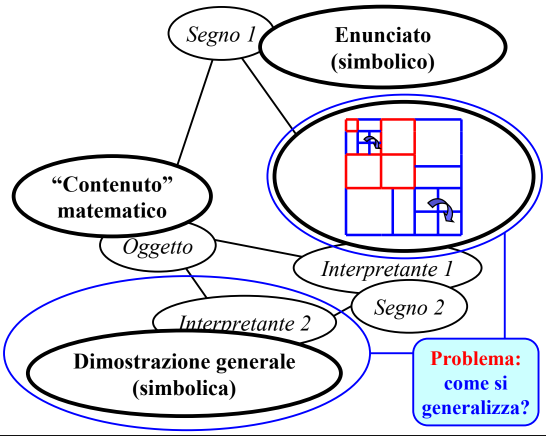
c – Analisi semiotica
di qualche “dimostrazione”

- Abbiamo visto alcune argomentazioni per provare che la somma dei primi n interi positivi dispari è n^2. Il ricorso a diagrammi agevola l’approccio ma richiede un’attività di generalizzazione.
- Occupiamoci ora di: **$(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$**
- La dimostrazione per induzione è **più impegnativa:**
  - per $n = 1$ si ha: $1^2 = 1^3$
  - dalla $(1+2+\ldots+n)^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3$ si ricava: $[1+2+\ldots+n+(n+1)]^2 = 1^3+2^3+\ldots+n^3+(n+1)^3$ utilizzando l’identità: $1+2+\ldots+n = n(n+1)/2$
- Come si potrebbe procedere iconicamente?

- **$1\cdot1^2 = 1^3$** →
- **$2\cdot2^2 = 2^3$** →
- **$3\cdot3^2 = 3^3$** →
- **$4\cdot4^2 = 4^3$** →



- **Totale: $(1+2+3+4)^2$** (analogamente per casi successivi)



c – Analisi semiotica di qualche "dimostrazione"

- Per quest'ultimo caso, come notato, la dimostrazione per induzione è impegnativa. **Può quindi essere utile, didatticamente, il ricorso al diagramma.**
- Si tratta dunque di esplicitare quella "intenzione convenzionale" che Peirce individua nei passaggi **enunciato** (simbolico) → **diagramma** (iconico) → **dimostrazione** (simbolica)
- È necessario indurre lo studente a comprendere che il diagramma particolare può essere "ripetuto" per ogni altro caso (ogni scelta di n), dunque **generalizzato.**
- Una generalizzazione del diagramma è più ostica rispetto al caso precedente, ma non impossibile.

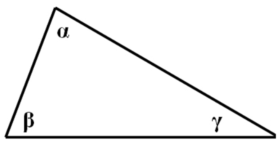
d – Aristotele e i teoremi geometrici

- **Aristotele** afferma (*Metafisica* Θ 9, 1051 a 21-24):
  «I teoremi di geometria si dimostrano per mezzo dell'atto, infatti si dimostrano operando delle divisioni nelle figure. Se queste divisioni fossero già operate, quei teoremi sarebbero immediatamente evidenti; invece sono contenute nelle figure solo in potenza».
- Ancora Aristotele (*Metafisica* Θ 9, 1051 a 25-27):
  «Perché gli angoli del triangolo assommano a due retti? Perché gli angoli intorno a un punto su di una retta sono due retti. Se, infatti, fosse già tracciata la parallela ad un lato del triangolo, alla semplice visione la cosa risulterebbe immediatamente evidente».

d – Aristotele e i teoremi geometrici

Prova 1

- Aristotele fa riferimento a questa figura:

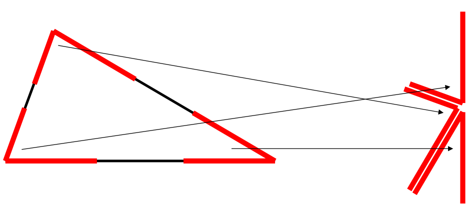


- **Intervenendo creativamente** la dimostrazione risulta semplice, ricordando le congruenze degli angoli alterni interni e degli angoli corrispondenti formati da una coppia di parallele tagliate da una trasversale.

d – Aristotele nella pratica didattica

Prova 2

- Ma torniamo al triangolo e operiamo qualche taglio…

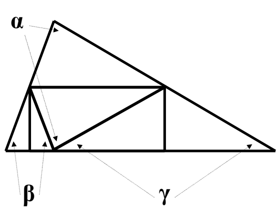


- Dopo aver ritagliato i tre angoli del triangolo (riprodotto ad esempio in cartoncino) possiamo **collocarli in modo di formare un angolo piatto.**

d – Aristotele nella pratica didattica

Prova 3

- In alternativa, eseguiamo alcune **piegature**:

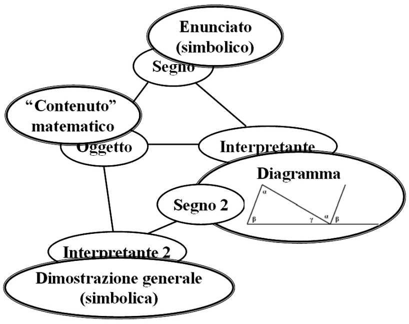


possiamo parlare, in questo caso e nel caso precedente, di una vera e propria "dimostrazione"? Oppure si tratta di verifiche di "casi particolari"?

- Esamineremo ora i due procedimenti schematizzati **in un'ottica peirceana:** quali sono, ad esempio, le differenze?

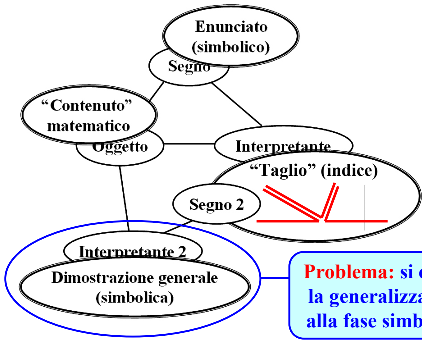
d – Un’analisi semiotica nella pratica didattica

Prova 1



d – Un’analisi semiotica nella pratica didattica

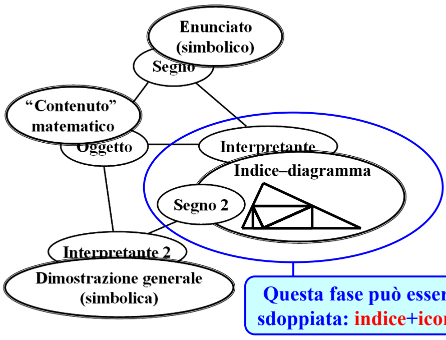
Prova 2



Problema: si ottiene la generalizzazione alla fase simbolica?

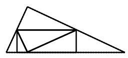
d – Un’analisi semiotica nella pratica didattica

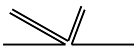
Prova 3



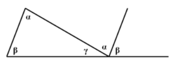
Questa fase può essere sdoppiata: indice+icona

Ma a quali allievi ci rivolgiamo? In quali famiglie, in quali contesti socio–culturali (anche fuori dalla scuola) vivono?

- Diverse strategie risolutive, basate su diverse impostazioni semiotiche, fanno diversamente ricorso al “coinvolgimento creativo” dell’allievo (P. Boero, intervento a Rimini 2008).
- Ad esempio, la dimostrazione “mista” 

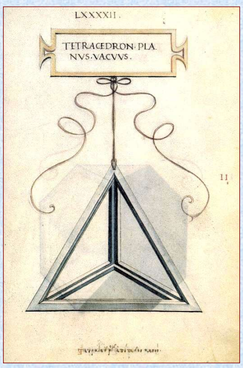
  e più ancora quella indicale 

  “coinvolgono” l’allievo in termini ben diversi di quanto non faccia la dimostrazione “aristotelica”

  che appare dunque **impositiva,** non “critica” ma calata dall’alto.

A tutti grazie dell’attenzione



Grazie a Paolo Boero e a Giampaolo Chiappini