Strumenti per la matematica

Giorgio T. Bagni

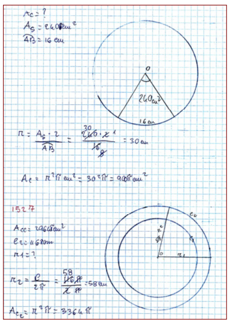
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Introduzione: per “fare matematica”…
… *serve qualcosa?*

“Give us enough chalk”
(André Weil)

Geometria e strumenti, un abbinamento… naturale!

- Potremmo confondere, a prima vista, il “quaderno di italiano” e il “quaderno di storia”, o scambiare gli appunti di letteratura latina con quelli di filosofia: **ma i disegni del quaderno di geometria sono inconfondibili.**
- E ovviamente per realizzare tali disegni servono degli **strumenti!**



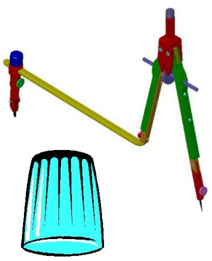
Riflettiamo sugli **artefatti**

- Vygotskij riconosce funzioni di mediazione agli strumenti **tecnici** e **psicologici** (segni o **strumenti di mediazione semiotica**).
- Wartofsky identifica gli strumenti tecnici come **artefatti primari**; gli **artefatti secondari** sono usati per fissare e trasmettere le modalità di azione.
- Una teoria matematica è un **artefatto terziario** che organizza i modelli costruiti come artefatti secondari.
- Didatticamente significativo è che l’uso degli artefatti primari richieda la loro **manipolazione** (ciò si accorda con i recenti lavori di Lakoff, Johnson e Núñez).

Il cerchio, il compasso, il bicchiere…

- Fin dai tempi più antichi l’uomo avrà individuato una figura “interessante” (un cerchio) ad esempio nella sezione di un tronco d’albero (un cilindro può rotolare facilmente).
- Oggi, i nostri allievi chiamati a tracciare una circonferenza possono usare sia il compasso…

  che, ad esempio, un (meno nobile) bicchiere.



Ma che differenza c’è tra l’uso del *compasso* e l’uso del *bicchiere?*

- Il bicchiere è più facile da utilizzare, non si buca il foglio, si può usare la penna. Ma con un bicchiere si può tracciare una sola circonferenza (della quale peraltro non si identifica facilmente il centro); il compasso è uno strumento più generale.
- La principale differenza tra i due modi di procedere, e tra i due strumenti da utilizzare, è così riassumibile:
- **il compasso “incorpora” la definizione euclidea di circonferenza,**
- **mentre accarezzando il bordo rotondo di un bicchiere possiamo solo percepire una curvatura “regolare”: il bicchiere, insomma, incorpora soltanto quella che si può definire, in un approccio elementare, una caratteristica** (Chassapis, 1999).

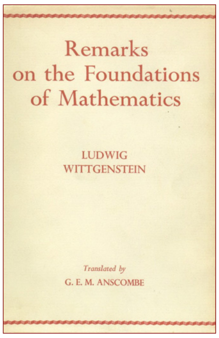
Artefatti e strumenti
Non si tratta di sinonimi…

- Il **compasso** è un artefatto primario; ma non basta averlo in mano per disegnare un cerchio: si potrebbe usare un tale artefatto per scrivere, come se fosse una semplice matita, oppure in altri modi non significativi geometricamente.
- Un **bicchiere** viene in generale utilizzato non per tracciare una circonferenza, ma per altri scopi (come fa Hans Georg Gadamer in questa foto).

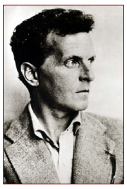
Artefatti e strumenti
Non si tratta di sinonimi…

- Per utilizzare uno strumento bisogna conoscere le "istruzioni per l'uso" (e darsene una giustificazione).
- La presenza di un artefatto secondario è indispensabile perché l'artefatto primario possa funzionare "bene", dunque "esistere", in particolare, come *strumento*.
- Nell'approccio strumentale di **Pierre Rabardel** (1995), per poter considerare un artefatto alla stregua di un vero e proprio "strumento" è necessaria infatti **un'attività costruttiva da parte del soggetto**, attività che dipende da vari aspetti concettuali e sociali.
- Anche una semplice figura va interpretata…

In alcuni passi delle *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica…*



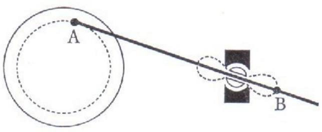
- …opera pubblicata (1956) postuma cinquantun anni fa, Ludwig Wittgenstein descrive un dispositivo meccanico
- **mediante il quale è possibile "suggerire" la dimostrazione di una proposizione.**



- Un primo accenno è nella III parte: «supponiamo che io abbia davanti a me le fasi del movimento di

sotto forma di immagine. Questo mi aiuta a formulare una proposizione che io ricavo, per così dire, dalla lettura di quest'immagine. […] È strano che dalla lettura di un'*immagine* si debba poter ricavare una proposizione. Tuttavia la proposizione non tratta dell'immagine che io vedo. Non dice che in quest'immagine si può vedere questo e quest'altro. Ma non dice nemmeno che cosa farà il meccanismo reale, per quanto lo faccia capire».

- E nella V parte: «considera un meccanismo.

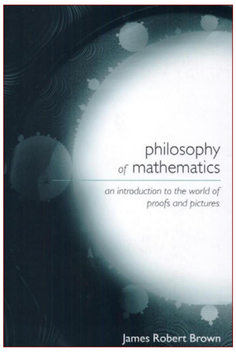


- Mentre il punto A descrive un cerchio, B descrive una figura a forma di otto. Questa proposizione la scriviamo come una proposizione della cinematica. Mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta. La proposizione corrisponde, poniamo, a un'immagine del meccanismo in cui siano disegnate le traiettorie descritte dai punti A e B. Dunque, per un certo aspetto, la proposizione è un'immagine di quel movimento. Tien fermo ciò di cui la *prova* mi convince».

Due diverse impostazioni
dalla terza alla quinta

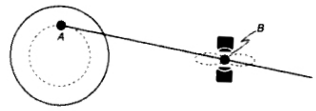
- L'enfasi, ora, non è più sulla possibilità che la raffigurazione del meccanismo avrebbe di "suggerire" la proposizione, ma sul fatto che "la proposizione è un'immagine di quel movimento".
- E, prosegue Wittgenstein, «se la prova registra il procedere secondo la regola allora, così facendo, produce un nuovo concetto». La conclusione è importante: «la prova deve mostrare il sussistere di una relazione interna perché la relazione interna è l'operazione che produce una struttura dall'altra […] – così che il passaggio conforme a questa successione di immagini è, *eo ipso*, un passaggio conforme a quelle regole di operazione».

Ma non tutti hanno apprezzato il meccanismo di Wittgenstein…

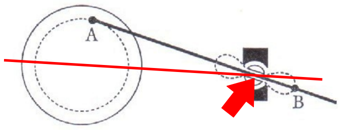


- Tra il funzionamento fisico e la proposizione matematica si colloca dunque **la mediazione della rappresentazione** visuale…
- e proprio questo collegamento può essere discusso in termini critici, come fa brillantemente **James Robert Brown.**

- **Una figura “corretta”** (per Brown) sarebbe simile a:

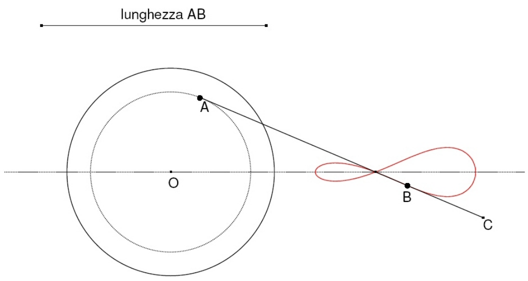


- – la figura descritta da B dovrebbe risultare **simmetrica** rispetto alla retta passante per il centro del cerchio e per il punto per il quale AB è vincolato a passare;

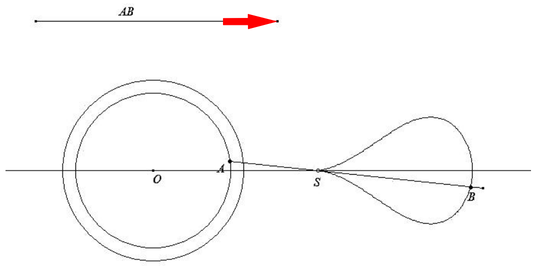


- – inoltre, quando A si trova nella posizione indicata, «B, invece di essere disegnato nella posizione a destra, dovrebbe trovarsi **al centro**» della figura “a otto”.

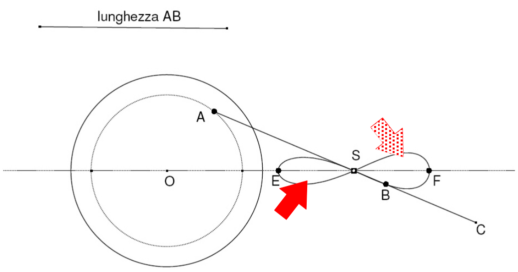
- In effetti la figura (realizzata con **Cabri**) che rispetta i dati originariamente forniti da Wittgenstein è:



- Con **Cabri** possiamo variare (ad esempio aumentare) la lunghezza di AB in modo da ottenere figure completamente diverse da quella indicata da Wittgenstein. Ad esempio:



- Non possiamo ottenere una “figure-eight” **simmetrica** rispetto al punto S; una figura… quasi simmetrica è:



(dove ES=SF, ma la parte destra…

… è più estesa della sinistra).

Le conclusioni di Brown (in chiave platonistica)

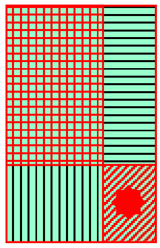
- Brown si chiede ora: «perché il diagramma è efficace, nonostante questi errori?»
- Dopo una lunga dissertazione conclude che la figura in esame «è **un disegno scadente** in quanto rappresenta erroneamente un meccanismo reale. Ma è **un buon simbolo**, in quanto rappresenta l’importante caratterizzazione astratta; esso “mostra l’esistenza di una relazione interna”, nelle parole di Wittgenstein. In quest’ultimo senso è certamente efficace […] come un supporto alla comprensione».
- Brown conclude che **«non è necessario che il disegno sia accurato; esso deve solamente condurre al senso», platonisticamente inteso.**

La sintonia del funzionamento “fisico” e di quello “matematico” (la descrizione del moto mediante equazioni) non può ridursi ad un’analogia: è la *necessità* della natura fisica che si rispecchia nella matematica mediante la quale il movimento è descritto in termini di indice (e questo aspetto può rivelarsi molto importante per la didattica… si pensi a Cabri!)

- Ma nell’ultima parte si passa **dal suggerimento dato dall’immagine all’esecuzione del movimento del meccanismo**: «mettendo in moto il meccanismo, il suo movimento mi prova la proposizione, proprio come farebbe una costruzione disegnata sulla carta». Se l’importanza della “costruzione sulla carta” non è accantonata, **si ricorre ad una pratica “esecuzione”.**

Geometria (e in generale matematica) tra concretezza e convenzioni

- Alcuni aspetti della matematica risentono di posizioni non del tutto collegate alla realtà.
- Perché ***meno per meno fa più?***
- Seguiamo idealmente l’approccio di **Muhammed ibn-Musa al-Kuwarizmi** (IX secolo).
- Visualizziamo:
  $(a-b)(c-d) = ac-bc-ad+bd$
- Dal rettangolo ac togliamo i rettangoli bc e ad…



…e **aggiungiamo *bd*** (che avremmo tolto due volte).

Euclide: davvero la geometria greca rinuncia agli “strumenti”?

- Ci resta da capire che cos’è l’“oggetto” che sta alla base delle rappresentazioni (segni) della matematica.
- Consideriamo la **definizione euclidea di cerchio** (*Elementi*, I, Def. XV) come figura piana racchiusa da una linea (circonferenza) tale che i segmenti tirati da un punto interno ad essa siano tutti uguali:
- «Cerchio è una figura piana compresa da un’unica linea [che si chiama circonferenza] tale che tutte le rette, le quali cadano sulla [stessa] linea [, cioè sulla circonferenza del cerchio,] a partire da un punto fra quelli che giacciono internamente alla figura, sono uguali fra loro».

Euclide: davvero la geometria greca rinuncia agli “strumenti”?

- Essa è molto vicina alla moderna nozione di luogo geometrico e può apparire diversa dalla **definizione euclidea di sfera** (*Elementi*, Libro XI, Definizione XIV) che si riferisce alla figura solida generata da un semicerchio quando questa ruota attorno al proprio diametro:
- «Sfera è la figura che viene compresa quando, restando immobile il diametro di un semicerchio, si faccia ruotare il semicerchio intorno al diametro finché non ritorni nuovamente nella stessa posizione da cui si cominciò a farlo muovere».

Euclide: davvero la geometria greca rinuncia agli “strumenti”?

- Quest’ultima descrizione, nota Enrico Giusti (1999, p. 23), «evoca più il tornio dell’operaio che il compasso del geometra» (avremmo potuto attenderci un riferimento alla proprietà dei punti della superficie sferica che hanno distanza fissa dal centro).
- Ma un esame dell’**introduzione euclidea della linea retta** (Libro I, primi tre postulati) è significativo:
- «Risulti postulato: che si possa condurre una linea retta da un qualsiasi punto ad ogni altro punto; e che una retta terminata si possa prolungare continuamente in linea retta; e che si possa descrivere un cerchio con qualsiasi centro ed ogni distanza».

Euclide: davvero la geometria greca rinuncia agli “strumenti”?

- Questi postulati (Giusti, 1999, p. 25) «riproducono quasi esattamente le operazioni dell’agrimensore»: condurre una linea retta tra due punti dati, prolungare un segmento, tracciare una circonferenza. Sulla base di ciò avanziamo un’ipotesi importante per interpretare le definizioni euclidee…
- … che gli oggetti matematici provengano non dall’astrazione di oggetti reali, dei quali essi descriverebbero le caratteristiche, bensì **da un processo di oggettualizzazione di procedure.**

Verso una “conclusione”

- Tuttavia, a nostro avviso, considerazioni come queste non devono e non possono avere la pretesa di essere conclusive…
- Chiudiamo dunque la nostra riflessione citando la serena espressione con cui **Hans-Georg Gadamer** chiuse il poscritto all’edizione 1972 di *Verità e metodo*:

«un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l’ultima parola»

Grazie
a Paolo Boero,
a Willibald Dörfler
e a Luigi Tomasi

Per risorse, materiali e indicazioni bibliografiche si può consultare il sito: www.syllogismos.it

A tutti Voi grazie dell’attenzione