Roma, UMI–CIIM, 23 ottobre 2008

La preparazione metodologico–didattica di chi insegna matematica

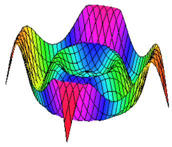
Quale preparazione, come si valuta, quale ruolo degli insegnanti in servizio

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario. La preparazione metodologico–didattica di chi insegna matematica

- **Storia,**
  ma anche **geografia**
- **Epistemologia,**
  ma anche **ermeneutica**
- **Didattica,**
  ma anche **didattiche**
- **Segni,**
  ma anche **artefatti**
- Verso una **conclusione**



La matematica e la sua storia: una presenza e molte questioni

- **La storia è molto importante nella didattica. Ma:**
- è corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti **alla sistemazione moderna**?
- Possiamo cioè riferire l'intera evoluzione storica della matematica alle nostre attuali concezioni?
- Quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali**?
- Le fasi che consideriamo come momenti di passaggio verso la formazione della matematica "compiuta" (la nostra), costituivano **la matematica "compiuta" dell'epoca, in base a concezioni culturali precise**.

Le moderne concezioni del passato

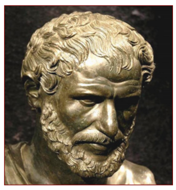
- Qualsiasi "sforzo di rinunciare alle nostre conoscenze nel tentativo di vedere l'evento storico nella sua purezza non avrebbe successo: **siamo condannati a portarci dietro le nostre moderne concezioni del passato**" (L. Radford, 1997).
- Ma se siamo obbligati a guardare il passato attraverso **una lente non del tutto trasparente**, non ci resta che scegliere tra le due opzioni: o rinunciare ad osservare il passato, per non snaturarlo…
- …oppure **accettare la presenza di tale lente** e le distorsioni che introduce, tenendo presente che attraverso essa poniamo in contatto **due culture "diverse ma non incommensurabili"** (P. Boero, L. Radford, C. Vasco, 2000).

Ma la matematica è creata nelle singole culture: la geografia

- La storia della matematica **può non essere vista come "scoperta" di contenuti pre-esistenti, ma come elemento della evoluzione sociale e culturale.**
- La storia deve dunque essere abbinata alla **geografia.**
- Spesso "vediamo" il mondo in una prospettiva eurocentrica…

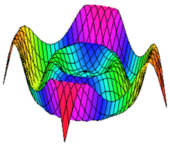
Ogni forma di linguaggio richiede un'interpretazione: anche i linguaggi apparentemente più oggettivi…

- *Il linguaggio e la logica arcaica* è un'opera fondamentale (1925) di Ernst Hoffmann (1880–1952) il cui viene esaminata l'iniziale contrapposizione tra il λόγος e gli 'έπεα (Eraclito, Parmenide).
- I singoli 'έπεα non devono essere considerati isolatamente, in quanto ciò può causare contraddizioni. Essi vanno interpretati nel linguaggio, all'interno del λόγος: questa corretta interpretazione **ci consente di dare un senso non contraddittorio alla parola e di comprendere il discorso.**



Sommario. La preparazione metodologico–didattica di chi insegna matematica

- **Storia,**
  ma anche **geografia**
- **Epistemologia,**
  ma anche ermeneutica
- **Didattica,**
  ma anche **didattiche**
- **Segni,**
  ma anche **artefatti**
- Verso una **conclusione**



Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Iniziamo con una provocazione…
- L'indiano **Bhaskara** (1114-1185), si occupa del *kha-hara*, frazione con denominatore 0. Scrisse in *Bijaganita*:
- «Una quantità divisa per zero diventa *kha-hara*. Questa frazione è denominata **quantità infinita.** In questa **quantità con zero come divisore non c'è alcuna alterazione, sebbene molti possano essere aggiunti o tolti,** così come nessun cambiamento può aver luogo nella divinità immutabile quando i mondi vengono creati o distrutti, anche se numerosi ordini di esseri vengono assorbiti o creati».

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Come possiamo esprimere tali considerazioni mediante una scrittura moderna?
- Una **prima** ipotesi può essere:

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

  scrittura "matematicamente scorretta" ma che esprime (in termini non del tutto banali) la visione di Bhaskara.
- Prima di archiviare **con il giusto sdegno** la scrittura precedente, occupiamoci ancora un po' del suo significato. **Cerchiamo di interpretarla…**

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

Il "guaio" è che 1/0 non "esiste" – se esistesse…

- L'insolita "addizione" di "1/0" e di 5 si basa sulle **"nostre" regole** usuali dell'addizione di razionali.
- Quando si scrive

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

  si portano "1/0" e "5" allo stesso denominatore (li si rende, in qualche modo, "analoghi") e li si somma.
- Per una scrittura corretta dovremmo ricorrere al **concetto di limite** e sostituire al "reciproco di zero":

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$$

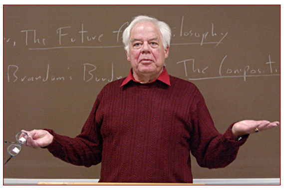
Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Tuttavia sarebbe **lecito (in che senso, con quali accorgimenti) interpretare Bhaskara alla luce di Cauchy e di Weierstrass?**
- Non sembra plausibile ipotizzare un consapevole tentativo di Bhaskara di introdurre l'"infinito" nel sistema numerico (un simile tentativo comporterebbe peraltro evidenti problemi, in quanto finirebbe per suggerire che 0 moltiplicato per "infinito" potrebbe essere uguagliato a ogni numero n, implicando così un'imbarazzante… uguaglianza di tutti i numeri).

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

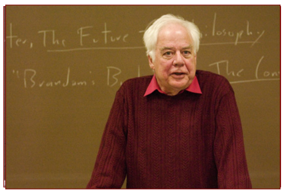
- In effetti non potremmo far riferimento agli stessi "principi generali" nell'accostare **l'argomentazione di un indiano che descrive le caratteristiche del reciproco di 0 pensando all'immensità della divinità** alle considerazioni di un moderno matematico che introduce (con la definizione "dell'ε-δ" o topologicamente) il concetto di limite.
- Il moderno matematico occidentale comprenderebbe l'argomentazione dell'indiano (e forse viceversa), la considererebbe curiosa, magari divertente. **Tra i due, dunque, non è inibito il dialogo; tuttavia non potrebbe essere raggiunto un accordo razionale.**

Richard Rorty (1931–2007): discorso normale, discorso anormale



- Secondo Rorty, **due contributi si dicono commensurabili quando possono essere considerati nell'ambito di uno stesso quadro che consente un "accordo razionale"** e indica ai partecipanti alla discussione la via per raggiungere l'accordo. Tra contributi incommensurabili allo stesso discorso non è possibile impostare un confronto **sul piano dell'epistemologia.**

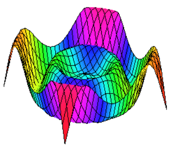
Richard Rorty (1931–2007): discorso normale, discorso anormale



- Subentra allora, per Rorty, **la possibilità dell'*ermeneutica*,** che «non è il nome di una disciplina, né un modo di conseguire i risultati che l'epistemologia non ha raggiunto. Al contrario, nell'ermeneutica si esprime la speranza che lo spazio culturale lasciato dall'abbandono dell'epistemologia non venga riempito – che la nostra cultura diventi tale che in essa non si avverta più l'esigenza di cogenze definitive e ultime».

Sommario. La preparazione metodologico–didattica di chi insegna matematica

- **Storia,**
  ma anche **geografia**
- **Epistemologia,**
  ma anche **ermeneutica**
- **Didattica,**
  ma anche **didattiche**
- **Segni,**
  ma anche **artefatti**
- Verso una **conclusione**



Torniamo alla didattica (e allo spunto cornito dalla matematica indiana)

- Seguiamo Rorty e operiamo «in una cultura diversa», **nella cultura del matematico indiano.** Possiamo cercare «un'epistemologia scritta all'interno di quella cultura».
- Ciò sarebbe utile «per determinare se i detentori di quella cultura abbiano espresso qualche verità interessante» secondo i modelli «del discorso normale del nostro tempo e dei nostri luoghi».
- Ma un accostamento **epistemologico** alla matematica indiana non pare possibile (per le mie capacità!).
- È spesso inutile cercare l'argomentazione originale pensando che sia "confrontabile" con la nostra…

Torniamo alla didattica (e allo spunto cornito dalla matematica indiana)

- Allora possiamo (dobbiamo) interpretare il discorso per noi incommensurabile in modo da "tradurlo" senza farlo «sembrare delle stupidaggini».
- Abbiamo visto che la scrittura

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

non appare una traduzione corretta dal punto di vista della "nostra" matematica.

- Inoltre questa traduzione appare povera rispetto alla ricchezza della fonte originale – che bisognerebbe peraltro valutare anche al di là del semplice testo.

Torniamo alla didattica (e allo spunto cornito dalla matematica indiana)

- Abbiamo ottenuto l'espressione sopra riportata con le **"nostre" regole** per addizionale i razionali…
- … secondo un'impostazione didatticamente utile (per **Peirce,** l'iconicità delle espressioni algebriche).

$$\frac{1}{2}+5=\frac{1+5\cdot 2}{2}=\frac{1+10}{2}=\frac{11}{2}$$

$$\frac{1}{0}+5=\frac{1+5\cdot 0}{0}=\frac{1+0}{0}=\frac{1}{0}$$

Torniamo alla didattica (e allo spunto cornito dalla matematica indiana)

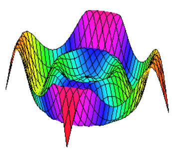
- Ciò **(1)** è **estraneo allo spirito originale e (2) per noi, non "salva" la correttezza della scrittura in esame.**
- Se interpretiamo "1/0" attraverso il limite di $1/x$ possiamo sistemare la nostra espressione:
$$\frac{1}{0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}+5=\lim_{x\to 0}\frac{1\text{ - }0}{x}\,)=\frac{1}{0}$$
non scandalizzerebbe alcun matematico (insegnante, studente) dei giorni nostri.
- Ma quest'ultima scrittura **non** si accorda con lo spunto indiano. Abbiamo imposto «i modelli del discorso normale del nostro tempo e dei nostri luoghi» (Rorty).

Un approccio ermeneutico: dialogo, non sovrapposizione…

- L'antica cultura matematica indiana ha una ricchezza che non può essere condensata in poche formule.
- La nostra reazione nell'accostarci ad essa non deve puntare ad una sua "normalizzazione".
- Da un lato non possiamo guardare a una tradizione diversa cercando di "comprenderne" il vocabolario (sulla base del nostro)…
- **…ma incommensurabilità non significa irriducibilità!**
- E ciò rivaluta anche didatticamente un (attualissimo) **aspetto interculturale.**

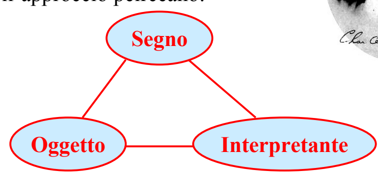
Sommario. La preparazione metodologico–didattica di chi insegna matematica

- **Storia,** ma anche **geografia**
- **Epistemologia,** ma anche **ermeneutica**
- **Didattica,** ma anche **didattiche**
- **Segni,** ma anche **artefatti**
- Verso una **conclusione**



Peirce e la semiosi illimitata Un celebre "triangolo"

- Il **triangolo semiotico** è alla base dell'approccio peirceano:



- L'**oggetto** è rappresentato da un **segno** (***icona*, *indice* o *simbolo*** a seconda che si abbia una rassomiglianza, una connessione causale o una convenzione) e suscita un **interpretante**, cioè una reazione in chi interpreta.

Peirce e la semiosi illimitata Un celebre "triangolo"

- Per Peirce il segno non fa conoscere direttamente un (nuovo) oggetto; quest'ultimo deve essere già in qualche modo accessibile all'interprete, in modo che il segno porti ulteriore informazione su di esso e susciti un interpretante.
- L'interpretante non è dunque una sorta di realtà da contemplare per comprendere il segno e quindi per conoscere l'oggetto.
- Fondamentale è **l'aspetto attivo, inferenziale**: Peirce introduce il segno come **mediazione fra l'oggetto e l'interpretante.**

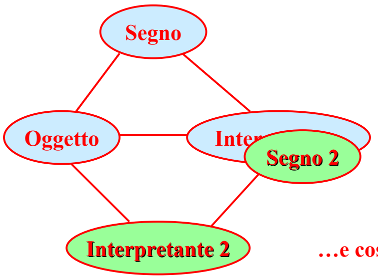
Peirce e la semiosi illimitata Un celebre "triangolo"

- Ad esempio:

- Non si confonda l'**interprete** (chi percepisce il segno, in questo caso chi sente abbaiare il cane) con l'**interpretante**, cioè la sua reazione (lo spavento, il grido "attenti al cane").

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre “triangolo”

- Ma l’interpretante è a sua volta un segno e può essere interpretato:



…e così via!

Peirce e la semiosi illimitata
Un celebre “triangolo”

- Ad esempio:

…e così via!

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- **«Pure icone – così come puri indici o puri simboli – non si danno nella realtà attuale.** Esse rimangono un limite del pensiero-segno, carattere più o meno predominante in un oggetto effettivo, ma mai del tutto privo di mescolanza con le altre due entità della partizione semiotica. […] Un diagramma matematico è essenzialmente iconico nel suo rappresentare la configurazione relazionale degli elementi in questione, ma necessita tuttavia di indici per ancorarsi agli elementi raffigurati, e non può prescindere da un carattere simbolico che gli permetta di proporsi quale garante di una legge generale» (Marietti, 2001, p. 36).

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- Il segnale di passaggio a livello: **icona, indice o simbolo?**
- **componente iconica:**
  – il cancelletto raffigurato ricorda un tratto di recinzione ferroviaria
- **componente indicale:**
  – è realizzato in materiale riflettente
- **componente simbolica:**
  – tutti i segnali di pericolo sono convenzionalmente triangolari
  – in generale, l’apparato semiotico è previsto dal Codice della Strada

Registri visuali e icone

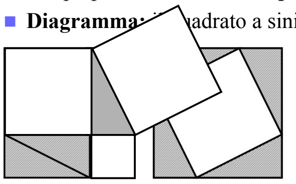
- Qualche iniziale considerazione:
- Un approccio iconico (ragionamento diagrammatico) può risultare “delicato” in quanto:
  - fa riferimento a un **caso particolare** e richiede quindi una generalizzazione talvolta non banale;
  - può contribuire a porre l’accento su **elementi non rilevanti** rispetto al contenuto matematico in gioco.
- Eppure operativamente è:
  - **utile** per sviluppare un’argomentazione;
  - **spontaneo**, ovvero tale da indurre **i nostri** allievi a ricorrere ad esso (ad esempio per la geometria).
- **È necessario controllare la componente iconica.**

Una fase iconica
tra due momenti simbolici?

- Il diagramma ha le caratteristiche di un’icona, ma **dovrà associarsi (come ogni segno) a un interpretante** e questo è **simbolico ed è generale**:
- Il diagramma-icona **è interpretante dell’enunciato simbolico** che traduce secondo alcune convenzioni (un’intenzione, dice Peirce).
- Questo diagamma-icona **determina infine un nuovo interpretante simbolico e universale** quando è recepito alla luce della stessa intenzione.
- L’aspetto didattico può collocarsi in questo quadro teorico con caratteristiche specifiche: **il ruolo dell’indice potrà essere rivalutato didatticamente.**

Una fase iconica tra due momenti simbolici?

- Consideriamo il teorema di Pitagora:
- **Enunciato** (universale): in **ogni** triangolo rettangolo il quadrato costruito sull'ipotenusa è equivalente alla somma dei quadrati costruiti sui cateti.
- Da qui passiamo ad un **interpretante iconico…**
- **Diagramma:** il quadrato a sinistra e il quadrato a destra sono congruenti e il confronto delle loro scomposizioni verificare il teorema **(per questo caso).**



Una fase iconica tra due momenti simbolici?

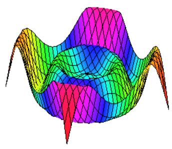
- Ma questo interpretante iconico è a sua volta un segno, e induce **un (nuovo) interpretante di carattere generale**, la dimostrazione del teorema. (Peirce non spiega le modalità di questo passaggio).
- Possiamo notare che:
- **un segno porta a utilmente considerare altri segni** mediante i quali viene ottenuta la dimostrazione;
- **il contenuto matematico rappresentato si lega in termini decisivi con i segni** (icone o simboli).
- Non si trascuri **l'indice, collegato alla secondità**!
- Questo ci porta a considerare il ruolo degli **artefatti.**

Una fase iconica tra due momenti simbolici?

- Ogni insegnante, dunque, dovrà tenere presente alcune considerazioni generali:
  - **Uno stesso segno può essere interpretato** in modi diversi: può essere attribuita maggiore o minore importanza agli aspetti iconici, indicali, simbolici.
  - **Ciò dipende dal segno, ma anche da chi è chiamato a interpretare,** dai contesti socio–culturali che hanno alle spalle i nostri allievi (problema che supera l'ambiente scolastico).
  - **Da ciò dipende il comportamento degli allievi,** il loro apprendimento.

Sommario. La preparazione metodologico–didattica di chi insegna matematica

- **Storia,** ma anche **geografia**
- **Epistemologia,** ma anche **ermeneutica**
- **Didattica,** ma anche **didattiche**
- **Segni,** ma anche **artefatti**
- Verso una **conclusione**

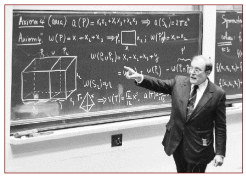


La matematica e le persone

- L. Radford e H. Empey, dopo aver sottolineato che «gli oggetti matematici non sono entità preesistenti, ma piuttosto oggetti concettuali generati nel corso dell'attività umana», osservano che «la matematica è molto più di una forma di produzione del sapere – una pratica di teorizzazione.
- Se è vero che le persone creano la matematica, non è meno vero che, viceversa, **la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone».**
- Dunque «la matematica crea le condizioni per il sorgere di certe forme di soggettività e di comprensione».

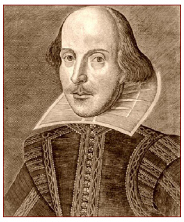
La matematica e la certezza

- La riflessione nella e sulla matematica sta rivedendo le concezioni del passato sull'assoluta certezza, sulla precisione, sul rigore.
- Gian–Carlo Rota (1932–1999) ha notato che «forse sono le nostre idee vittoriane sulla necessità della certezza di assiomatizzazione che sono ingenue e non realistiche. Forse il nostro compito consiste nel vivere rigorosamente con l'incertezza».



- E lo stesso Rota non esita a puntare l'indice contro l'«attuale **follia** per la precisione».

Matematica, didattica e linguaggio del passato



- Non vogliamo sostenere che la matematica possa pensarsi ridotta a una qualche “follia”… Una matematica intesa come una follia ci porterebbe almeno ad affermare, con il Bardo, ***Though this be madness, yet there is method in ’t*** (*Hamlet*, Atto II).
- Ma in un momento in cui la matematica sta riflettendo sulla propria natura interna, **la sua didattica non può ostinarsi a parlare «il linguaggio del passato»** (riprendendo un’osservazione di Angelo Melucci).
- **Sarebbe questa la vera follia.**

a tutti Voi grazie dell’attenzione

«Superare un esame rende forse colti? Che cos’è propriamente la cultura? Mi sia concesso di citare a questo proposito uno dei grandi. Sono le parole di Hegel: cultura vuol dire poter guardare le cose dal punto di vista di un altro»

(Hans–Georg, Gadamer, 1990, concludendo la propria conferenza *La diversità delle lingue e la comprensione del mondo* all’Università di Heidelberg)