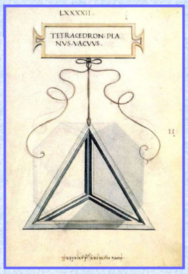
Sfida–31, Torino, 22 maggio 2009

Incognite e parametri nella storia dell'algebra



Giorgio T. Bagni

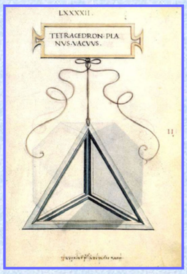
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

L'algebra deriva da ciò che Ehrlich e Raven (1964) chiamano *coevoluzione...*

- …che coinvolge i tipi di problemi, i linguaggi, gli ambiti numerici, le strutture.
  Scrive **Jean–Philippe Drouhard** (2007, p. 11):
- **"I concetti si evolvono insieme con i sistemi di rappresentazione semiotica, gli strumenti** […], **le regole del gioco (il modo di fare matematica) e la denominazione stessa di matematica** […]. Bisogna descrivere questa coevoluzione analogamente a quanto accade per i fiori e per le farfalle, la cui evoluzione non può essere compresa se non nei termini di **coevoluzione."**

Sommario

Incognite e parametri nella storia dell'algebra



- **Didattica dell'algebra:** tra incognite e parametri
- **Equazioni nella storia:** la "Regola d'Algebra"
- **Sincopata o simbolica:** le fasi di Nesselmann
- **Prima di Viète:** parametri in Bombelli
- **Verso una "conclusione":** matematica, segni, cultura

Una chiarificazione terminologica?

- Alcune questioni collegate e alla distinzione tra variabili, incognite e parametri e, segnatamente, all'uso dei parametri sono da tempo trattate nella didattica della matematica.
- Spesso è stata segnalata l'opportunità di una chiarificazione terminologica. A. Schoenfeld e A. Arcavi (1988) elencano molte parole talvolta usate come **sinonimi del termine "variabile":** **indeterminata, incognita, parametro, costante, simbolo, segnaposto, argomento, puntatore, nome, spazio vuoto, riferimento, indice, quantità, lettera, grandezza…**

Quantificatori "nascosti"

- Da un punto di vista epistemologico e didattico (ma, come vedremo, anche per quanto riguarda alcuni aspetti storici), **un punto chiave è la presenza "tacita" di quantificatori**, come notato da F. Arzarello (1988, p. 116):
- "Risolvere un'equazione vuol dire verificare se un enunciato esistenziale puro è vero; trovare che è vero il corrispondente enunciato universale significa scoprire che l'equazione è un'identità; **introdurre parametri nelle equazioni vuol dire passare a formule più complesse, con un quantificatore universale seguito da uno esistenziale".**

Alcuni esempi introduttivi

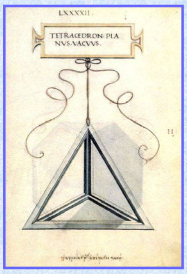
- ***Problema A* (numerico):** 35 è un numero primo?
- Una possibile risoluzione (non certo l'unica!) che porta alla risposta negativa potrebbe essere data notando che $35 = 36–1 = 6^2–1^2 = (6+1)(6–1)$.
- ***Problema B* (con una variabile – parametro?):** il precedente di n^2 (n naturale $n>2$) è primo?
- L'approccio potrebbe essere lo stesso, basato sulla constatazione: $n^2–1 = n^2–1^2 = (n+1)(n–1)$.
- Passando dal problema A al B si generalizza. Le "cose da fare" sono però collegate da un'analogia e **un'implicita quantificazione universale "estende" il procedimento.**

Alcuni esempi introduttivi

- ***Problema C* (con parametro):** il precedente di m (m naturale) è primo?
- Questo problema *non* è sempre risolubile: m determina sia la possibilità di risolvere il problema con un certo metodo (si noti che non tutti i numeri primi hanno per successivo un quadrato) che, ovviamente, la risposta al quesito.
- **Epistemologicamente non sembrano esserci differenze tali da suggerire diverse classificazioni** per n (problema B) e m (problema C): entrambi possono considerarsi "parametri". **Tuttavia, dal punto di vista didattico i loro ruoli sono diversi.**

Sommario

Incognite e parametri nella storia dell'algebra



- **Didattica dell'algebra:** tra incognite e parametri
- **Equazioni nella storia:** la "Regola d'Algebra"
- **Sincopata o simbolica:** le fasi di Nesselmann
- **Prima di Viète:** parametri in Bombelli
- **Verso una "conclusione":** matematica, segni, cultura

Equazioni dall'Antichità

- I procedimenti algebrici dei Babilonesi, seppure espressi da esempi, riflettono spesso approcci generali.
- Non esisteva alcuno strumento simbolico completo presso i babilonesi: però le quantità incognite erano indicate dai termini *lunghezza* (primo grado), *area* (secondo grado), *volume* terzo grado).
- I matematici babilonesi sembrano consapevoli del valore soltanto indicativo: **infatti addizionavano lunghezze, aree e volumi (a differenza di quanto farà, ad esempio, Viète con il suo principio di omogeneità).**

L'incognita: dal "mucchio" alla "*x*"

- L'incognita (*aha* = "mucchio", per gli Egizi) sarà più tardi indicata dal termine arabo *šay'* شَيْء = "cosa".
- **In Spagna tale termine veniva pronunciato "šei" e quindi scritto *xei*, da cui deriva la consueta abbreviazione in *x*.**
- La risoluzione di equazioni di secondo grado e di sistemi algebrici lineari con il metodo di trasporto e semplificazione viene fatta risalire a Muhammad ibn Mūsa al–Khwārizmī (intorno al 830).

الخوارزمي

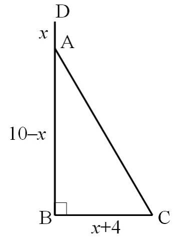
La "Regola d'Algebra"

- Solo con l'introduzione della **"Regola d'Algebra"** (inizialmente in ambiente arabo, quindi ripresa nell'Europa tardo –medievale e rinascimentale) si può parlare di risoluzione di equazioni in senso moderno.
- La "Regola d'algebra" era il **procedimento per la risoluzione di problemi aritmetici** consistente:
  - nella messa in equazione,
  - nella riduzione dell'equazione in forma canonica e
  - nell'effettiva risoluzione dell'equazione ottenuta.

La "Regola d'Algebra"

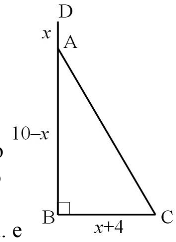
- Con l'algebra si determinano quindi le grandezze incognite **anticipando il loro valore e operando su di esse come se fossero note.**
- Tale "anticipazione di valore con richiesta di solvibilità" induce a un **confronto con quanto accade nel credito** e suggerisce analogie tra la matematica e l'ambiente sociale e culturale (a destra un documento notarile genovese del XII–XIII secolo con annotazioni in arabo).

La “Regola d’Algebra”



- Esempi di applicazioni della “Regola d’Algebra” sono in alcuni problemi dal *Tractatus geometrie. Summa de Arithmetica et Geometria, Proportioni et Proportionalita* (1494) di **Luca Pacioli (1445–1517).** Proponiamo (II, f. 54v):
- E gli é una scala che acosto al muro d’iguali altezza […] .10.bracia. Discostola di sotto in modo che quello che la vetta venne in verso terra tratto di quello si discostó dal pie’, rimangono .4. Adimando quanto si discostó da pie’ e quanto da capo.

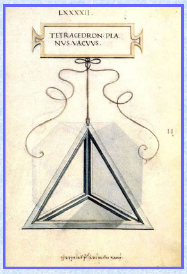
Adunque dal .a. al .b. sia .10.bracia. meno .1a. cosa. Onde è da sapere quanto è dal .a. al .c. Mulitiplicarai .ab. in sé, cioé .10. men .1a. cosa, fará .100. men .20.cose. e piú .1o.censo. E moltiplica .bc. in sé, fanno .1o. censo e .8.cose. e .16. Agiongni al .1o. Censo e .100. men .20.cose., fanno .2. censi e .116. meno .12.cose. e la .R. di .2.censi. e .116. men .12.cose. è .ab. E noi dicemo era .10. Adonca .10. è iguali ala radice di .2.censi. e .116. meno .12.cose. Dove multiplica ogni parte in sé e haremo .100. essere iguali a .2.censi. e .116. meno .12. cose. Dove, da ogni parte, leva .100. e, a ogni parte, darai .12.cose. e haremo che .2.censi. e .16. sonno iguali a .12.cose.



Dove, secondo la regola, la cosa vale .2.

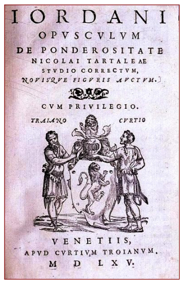
Sommario

Incognite e parametri nella storia dell’algebra



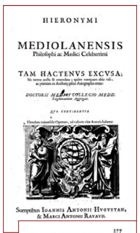
- **Didattica dell’algebra:** tra incognite e parametri
- **Equazioni nella storia:** la “Regola d’Algebra”
- **Sincopata o simbolica:** le fasi di Nesselmann
- **Prima di Viète:** parametri in Bombelli
- **Verso una “conclusione”:** matematica, segni, cultura

Parole e lettere per gli “oggetti” dell’algebra



- La risoluzione di Pacioli è in **un linguaggio verbale con alcune espressioni convenzionali** come “cosa” per l’incognita e “censo” per il suo quadrato. Le operazioni sono espresse verbalmente (ad es. si usa “e” per “+”, “men” per “–”).
- La distinzione fra algebra (*logistica speciosa*) e aritmetica (*logistica numerosa*) viene fatta risalire all’introduzione del calcolo letterale. Già nel XIII secolo **Giordano Nemorario** in *De numeris datis* (1225) esprimeva quantità numeriche con lettere.

Parole e lettere per gli “oggetti” dell’algebra



- **Girolamo Cardano (1501–1576)** usò a volte delle lettere per esprimere regole numeriche generali. Ad esempio la scrittura (tratta dall’*Opera Omnia* pubblicata a Lione, 1663, LVII, p. 433):

  “sit ergo ut velim **R a/b** capio **R numeratoris & denominatoris, & est R b & R a”**

  corrispondeva a:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Parole e lettere per gli “oggetti” dell’algebra

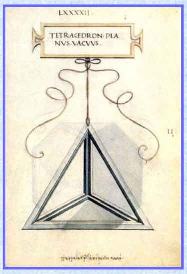
- Le esperienze ricordate non sono ancora riconducibili allo sviluppo di algoritmi generali coinvolgenti grandezze note e incognite.
- Spesso, a tale riguardo, si cita **François Viète (1540–1603)** e la sua celebre opera ***Isagoge in artem analyticam*** (1591).
- Tale citazione può essere discussa, anche perché anche prima di Viète troviamo non soltanto il ricorso a lettere in procedimenti generali, ma anche, come vedremo, **l’uso di parametri.**

Parole e lettere per gli “oggetti” dell’algebra

- Viète è dunque considerato al confine tra l’algebra sincopata (Pacioli) e quella simbolica.
- Tuttavia **Nesselmann lo inquadra nell’ambito dell’algebra sincopata,** «sebbene nei suoi scritti Viète abbia già lasciato trasparire il seme dell’algebra moderna che germinerà, tuttavia, soltanto dopo di lui» (Nesselmann, 1842, p. 302).
- Per Nesselmann, caratteristica essenziale del linguaggio simbolico non è tanto nell’uso di lettere per rappresentare quantità, ma nella possibilità di **escludere il ricorso alle parole:** questa impostazione può non tener conto di alcuni elementi significativi.

Sommario

Incognite e parametri nella storia dell’algebra



- **Didattica dell’algebra:** tra incognite e parametri
- **Equazioni nella storia:** la “Regola d’Algebra”
- **Sincopata o simbolica:** le fasi di Nesselmann
- **Prima di Viète:** parametri in Bombelli
- **Verso una “conclusione”:** matematica, segni, cultura

Parametri prima di Viète: l’*Algebra* di Bombelli (1572)

- Torniamo alla distinzione tra incognita e parametro con un esempio che risale ad alcuni decenni prima dell’*Isagoge in artem analyticam.*
- **L’*Algebra* di Rafael Bombelli (1526–1572) è stata scritta nel 1550** in cinque libri.
- Di essi, i primi tre vennero pubblicati a stampa nel 1572 e 1579 (in due edizioni identiche), mentre i restanti due libri, manoscritti, vennero pubblicati da E. Bortolotti nel 1929.

Parametri prima di Viète: l’*Algebra* di Bombelli (1572)

- Andremo a occuparci del problema XLIX dal terzo libro dell’*Algebra.*
- **Faccisi di 10 due parti tali che moltiplicate l’una via l’altra faccino 16.**
- Bombelli considera due parti indicate con $\overset{1}{\smile}$ (che oggi scriveremmo x) e con 12– $\overset{1}{\smile}$ (cioè $12–x$); le moltiplica ottenendo 10$\overset{1}{\smile}$ –1$\overset{2}{\smile}$ (cioè $10x–x^2$) che pone uguale a 16. Risolve l’equazione e afferma:
- Ponghisi che l’una di dette parti sia 1$\overset{1}{\smile}$, l’altra sarà 10–1$\overset{1}{\smile}$, che moltiplicate l’una via l’altra fanno 10$\overset{1}{\smile}$ –1$\overset{2}{\smile}$ e questo è eguale a 16, che levato il meno si haverà 1$\overset{2}{\smile}$ +16 eguale a 10$\overset{1}{\smile}$.

Parametri prima di Viète: l’*Algebra* di Bombelli (1572)

$$\boxed{\frac{Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2-P}}$$

- Piglisi la metà delli Tanti, ch’è 5, e si quadri, fa 25 e se ne cavi 16, resta 9, che il suo lato è 3, il quale si cava di 5, metà delli Tanti, resta 2 e due vale il Tanto e questa è una delle parti; l’altra sarà 8 e da simili domande nasce al seguente regola.
- Se si haverà a dividere una quantità in due parti che moltiplicata l’una via l’altra faccino un terminato numero, piglisi il mezzo della quantità che si deve dividere e quadrisi e del prodotto se ne cavi il terminato numero e del restante se ne pigli il lato e si aggioghi alla metà di detta quantità, che la somma sarà una delle parti addomandate.

Parametri prima di Viète: l’*Algebra* di Bombelli (1572)

$$\boxed{\frac{Q}{2}+\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2-P}}$$

- Poi l’Autore applica le regola alla risoluzione del problema:

$$\boxed{\frac{12+t}{2}+\sqrt{\left(\frac{12+t}{2}\right)^2-20}}$$

- Faccisi di 12+1$\overset{1}{\smile}$ due parti tali che moltiplicata l’una via l’altra faccino 20.
- Per la sopradetta regola piglisi la metà della quantità, ch’è 6+1/2$\overset{1}{\smile}$, che il suo quadrato sarà 36+6$\overset{1}{\smile}$+1/4$\overset{2}{\smile}$ che cavatone il terminato numero, cioè 20, resta 16+6$\overset{1}{\smile}$+1/4$\overset{2}{\smile}$ e di questo se ne pigli il lato e si aggioghi alla metà della quantità, fa
R.q. L16+6$\overset{1}{\smile}$+1/4$\overset{2}{\smile}$⅃+6+1/2$\overset{1}{\smile}$3
e questa è una delle due parti; l’altra sarà lo restante sino a 12+1$\overset{1}{\smile}$, cioè 6+1/2$\overset{1}{\smile}$–R.q. L16+6$\overset{1}{\smile}$+1/4$\overset{2}{\smile}$⅃.

Parametri prima di Viète: l'*Algebra* di Bombelli (1572)

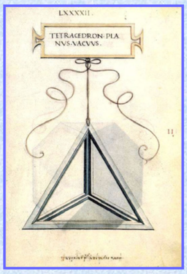
- Pertanto qui Bombelli **si occupa di una classe di problemi**, dipendenti dal parametro ⅃ (che oggi indicheremmo con t, per evitare il ricorso alla x con la quale si indica l'incognita: questo sarà un punto importante per valutare alcune scelte di Bombelli).
- Ripercorriamo il procedimento nella simbologia moderna, distinguendo due fasi:
- ***Fase A: ricavo della "regola"***
  - ***A1. L'esempio***
  - ***A2. La regola***
- ***Fase B: applicazione al caso parametrico***

Parametri prima di Viète: l'*Algebra* di Bombelli (1572)

- Per Bortolotti (1966, p. LVIII) ciò è «un gran passo, che nessun algebrista aveva ancor fatto e che di tanto accosta il Bombelli al Vieta, che fu considerato come creatore dell'algebra letterale moderna».
- **Ma la generalizzazione al caso parametrico non avviene considerando l'equazione, bensì la regola ricavata.** Questo è determinato dal fatto che nella notazione bombelliana il simbolo per indicare una quantità variabile era **unico:** l'indicazione del solo esponente, senza una lettera per la base, rende impossibile distinguere tra diverse variabili in una stessa scrittura (un'incognita x e un parametro t).

Sommario

Incognite e parametri nella storia dell'algebra



- **Didattica dell'algebra:** tra incognite e parametri
- **Equazioni nella storia:** la "Regola d'Algebra"
- **Sincopata o simbolica:** le fasi di Nesselmann
- **Prima di Viète:** parametri in Bombelli
- **Verso una "conclusione":** matematica, segni, cultura

Viète e la distinzione "grafica" tra incognite e parametro

- Abbiamo dunque potuto osservare che nell'*Algebra* di Bombelli c'è già **la considerazione di una classe di problemi** e tale innovazione è agevolata in termini decisivi dalla disponibilità di un simbolo per indicare una quantità variabile e le sue potenze.
- Il simbolo in questione si usa però sia per indicare un'incognita che un parametro e ciò rende necessarie alcune cautele.
- **La possibilità di distinguere tra lettere per le incognite e lettere (diverse) per i parametri si ha, come abbiamo ricordato, soltanto con Viète.**

Viète e la distinzione "grafica" tra incognita e parametro

- Un (ultimo) esempio di risoluzione da Viète:
- **Sia B la differenza dei due lati e D la loro somma. È richiesto di trovare i lati.** Sia A il lato minore; allora il maggiore sarà A+B. Dunque la somma dei due lati sarà A2+B. Ma la somma dei lati è data come D. Allora A2+B = D e per antitesi A2 sarà uguale a D–B e se essi sono dimezzati, A sarà uguale a D½+ B½.


IN ARTEM ANALYTICEN ISAGOGE.

CAPUT I.

De Definitione & Partitione Analyseos, & de iis quæ juvant Zeteticen.

CAPUT II.

De Symbolis æqualitatum & proportionum.

1 Totum suis partibus æquari.
2 Quæ eidem æquantur, inter se esse æqualia.
3 Si æqualia æqualibus adjiciantur, tota esse æqualia.
4 Si æqualia æqualibus auferantur, residua esse æqualia.
5 Si æqualia per æqualia multiplicentur, facta esse æqualia.
6 Si æqualia per æqualia dividantur, orta esse æqualia.

Viète e la distinzione "grafica" tra incognita e parametro

- O[ppure] sia E il lato maggiore. Allora il minore sarà E–B. Dunque la somma dei alti sarà E2–B. Ma la stessa somma è data come D. Dunque E2–B uguaglia D e per antitesi E2 uguaglia D+B, se essi sono dimezzati, E sarà uguale a D½+B½.
- Dunque, con la differenza e la somma di due lati data, i lati sono trovati. Infatti, metà somma dei lati meno metà della loro differenza è uguale al lato minore, e metà della loro somma più metà della loro differenza è uguale al maggiore.
- […] **Sia B 40 e D 100. Allora A diventa 30 e E diventa 70.**

Viète e la distinzione “grafica” tra incognita e parametro

- Proprio grazie alla scelta di Viète di **differenziare l’uso di vocali (nell’esempio A, E) e consonanti (B, D),** il ruolo del parametro può risultare più significativo.
- Anche nell’ambito dell’algebra sincopata si manifesta la **coevoluzione** che porta a una reciproca influenza:

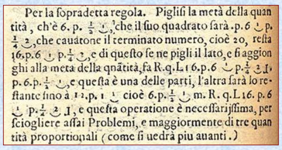
  la disponibilità di un sistema semiotico organico e versatile (influenzata anche dall’introduzione della stampa a caratteri mobili) determina ed è determinata da esigenze nuove per gli algebristi rinascimentali, tra le quali quella di considerare una classe parametrizzata di problemi.

Considerazioni conclusive

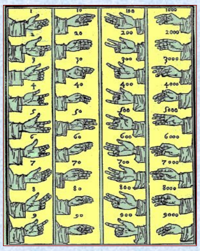
- L’influenza tra i vari aspetti “matematici” dei procedimenti algebrici e il contesto sociale e culturale del Rinascimento è interessante e conferma che **sia la creazione di nuova matematica che l’atto di apprendere non possono essere riassunti soltanto in una costruzione di nuovi “oggetti matematici” (L. Radford).**
- Non è un caso che l’evoluzione da Cardano a Pacioli, Bombelli e Viète si abbia **parallelamente allo sviluppo della stampa a caratteri mobili.**

Considerazioni conclusive

- **«La matematica è più di una forma di produzione di conoscenza – un esercizio di teorizzazione.** Se è vero che gli individui creano la matematica, non è meno vero che, reciprocamente, la matematica influenza il modo in cui gli individui sono, vivono e pensano» (Radford & Empey, 2007, p. 250).
- Gli “oggetti matematici” concepiti dai matematici nella storia e oggi ripresi dagli studenti influenzano **«tutti, e non solo chi pratica la matematica professionalmente»** (Radford & Empey, 2007, p. 251).



Per la sopradetta regola. Piglisi la metà della quantità, ch’è 6. p. $\frac{1}{2}$ $\overset{1}{\smile}$, che il suo quadrato sarà .p.6 $\overset{1}{\smile}$ p. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$, che cauatone il terminato numero, cioè 20, resta 16.p.6 $\overset{1}{\smile}$ p. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$, e di questo se ne pigli il lato, e si aggionghi alla meta della quãtità, fa R.q.L16.p.6 $\overset{1}{\smile}$ p. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$ J. p.6.p. $\frac{1}{2}$ $\overset{1}{\smile}$, e questa è una delle parti, l’altra sarà lo restante fino à 12.p.1 $\overset{1}{\smile}$ cioè 6.p. $\frac{1}{2}$ $\overset{1}{\smile}$ m. R. q.L16. p.6 $\overset{1}{\smile}$ p. $\frac{1}{4}$ $\overset{2}{\smile}$ J, e questa operatione è necessarijssima, per sciogliere assai Problemi, e maggiormente di tre quantità proportionali (come si uedrà piu auanti.)



a tutti grazie dell’attenzione

Grazie a
Nadia Douek (Nice, Francia)
Jean–Philippe Drouhard (Nice, Francia)
Luis Puig (Valencia, Spagna)
Luis Radford (Sudbury, Canada)