

Macerata, 4 aprile 2009

## Dati e giustificazioni nell'apprendimento della matematica



**Giorgio T. Bagni**  
Dipartimento di Matematica e Informatica  
Università di Udine  
bagni@dimi.uniud.it  
www.syllogismos.it

**UNIVERSITAS  
STUDIORUM  
UTINENSIS**

## Nel nostro titolo... manca qualcosa?

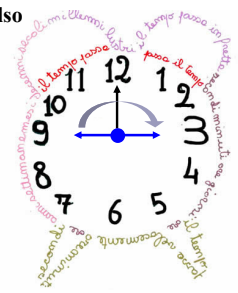
- “Apprendimento” della matematica oppure...
- ...insegnamento-apprendimento?
- Un vecchio problema: ma questi due essenziali momenti possono essere separati?
- L'apprendimento si abbina naturalmente all'insegnamento!
- Tuttavia questa nostra riflessione privilegerà, per alcuni versi, il secondo momento.
- Insomma cercheremo di “guardare” ciò che viene insegnato e appreso a scuola, naturalmente con gli occhi di chi è chiamato ad apprendere.

## Ancora il titolo: dati e giustificazioni

- Dunque ci metteremo dal punto di vista dell'allievo.
- Analizziamo i contenuti che l'allievo è chiamato ad apprendere:
- **Dati** che cosa (x) gli allievi devono imparare
- **Giustificazioni** perché si deve imparare x?  
Perché x è utile e soprattutto...  
**perché x è “vero”!**
- Quindi sintetizziamo così il nostro titolo:
- **Dati** ciò che l'allievo deve imparare
- **Giustificazioni** perché ciò che l'allievo è chiamato ad imparare è “vero”


## Un dato e la sua verità...

- La nozione di verità è la base della matematica e, dunque, della sua didattica. Tutti sanno che:  
 $9+6 = 15$  è vero  
 $9+6 = n$  (con  $n \neq 15$ ) è falso
- Ma...
- se alle 9 dico “ci vediamo tra 6 ore...”
- per essere puntuale dovrò arrivare... alle 3!
- Quindi:  
 $9+6 = 3$  ???



## Un dato e la sua verità...

- Una riflessione sulla verità avrebbe radici antiche, a partire, ad esempio, dai principi aristotelici.
- Secondo **Baruch Spinoza** (1632-1677), «poiché il volgo inventa per primo i vocaboli che poi vengono usati dai filosofi, ci appare necessario che colui che cerca il primo significato di un qualche vocabolo debba ricercare che cosa esso abbia significato dapprima presso il volgo [...]. Dunque mi pare che il primo significato di *vero* e *falso* abbia avuto origine nei racconti: fu detto vero quel racconto che riferiva un fatto realmente accaduto».



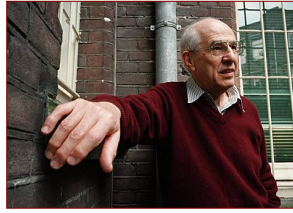
## Un dato e la sua verità...

- Una revisione della nozione di “verità” può essere fatta risalire a **Charles S. Peirce** (1839-1914).
- Anche se, nota **Richard Rorty**, «l'identificazione da parte di Peirce de “la verità” e “l'opinione destinata a essere sottoscritta da tutti” fa sembrare che l'esistenza medesima della verità e della realtà dipenda da fatti casuali come la continuazione della razza e della nozione illuminista di ricerca» (Rorty, 2004).



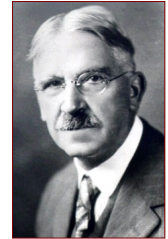

## Quale “verità”?

- Una posizione pragmatista non si può liquidare in poche parole: in tempi più vicini a noi **Hilary Putnam** difende le idee dei pragmatisti e nota che troppo spesso la nozione di verità è stata considerata “non problematica” in quanto auto-evidente.
- Ma «dire che la verità è soltanto una “corrispondenza alla realtà” **non è falso, bensì vuoto**, finché non viene detto nulla su ciò che è la “corrispondenza”» (Putnam, 2003).



## Quale “verità”?

- **John Dewey** (1859-1952) osserva che «l'avverbio “veramente” è più fondamentale dell'aggettivo vero o del sostantivo verità, perché esprime una modalità di azione. Un'idea [...] è un piano per agire in modo da arrivare a chiarire una certa situazione. Quando si agisce in base ad essa, *ci guida veramente o falsamente*; ci porta al nostro fine o lontano da esso». Dunque «la verità come utilità significa che funziona e dà proprio quel contributo alla riorganizzazione dell'esperienza che l'idea o la teoria rivendicano di poter dare» (Dewey, 2002).



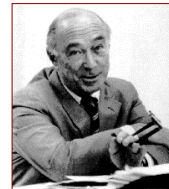
## Verità e realtà

- Per **Jerome Bruner**, «conosciamo il mondo in diversi modi e da posizioni diverse; e ciascuno dei modi in cui lo conosciamo produce rappresentazioni e strutture diverse, anzi “realtà” diverse».
- Alla base della nostra conoscenza del mondo c'è, ovviamente, l'esperienza che abbiamo di esso, ed è da questa che facciamo derivare la “realtà”: «alle esperienze che elaboriamo sulla scorta dei nostri incontri così variamente atteggiati con il mondo», noi attribuiamo «degli “status” di realtà tra loro diversi».



## Verità e realtà

- A certe posizioni, da cui sorgono «certe forme di conoscenza, certi mondi possibili, attribuiamo valore canonico: è il caso dell'atteggiamento “scientifico”, “razionale”, “logico”».
- Dunque «siamo portati a vedere nelle posizioni che qualificiamo come razionali qualcosa che trascende posizioni e punti di vista particolari, quasi che esse fossero l'espressione [della] “retta ragione”» (Bruner, 2005). Ma tale processo verso la “retta ragione” va correttamente inteso.



## Razionalità e verità

- Alcuni approcci teorici recenti riguardanti la razionalità e la verità dovuti a **Karl Otto Apel**



e a **Jürgen Habermas** ci consentiranno di approfondire la questione e di evidenziare alcuni elementi che potranno essere di notevole importanza anche in una riflessione didattica.



## Razionalità e verità

- **Che significa, ad esempio, riconoscere che un'affermazione è razionale?** Significa supporre che essa è “vera”? Ovvero garantirne la plausibilità?
- Habermas rileva che il fatto che un giudizio sia considerato razionale non implica la sua “verità”, bensì soltanto **la sua accettabilità (motivata) in un contesto** (Habermas, 2001).
- Prima di riprendere questa posizione, che riteniamo molto importante per la nostra riflessione, sottolineiamo che ogni affermazione, naturalmente, viene **espressa in un linguaggio**: dunque potrà essere utile mettere a fuoco alcune caratteristiche dell'espressione verbale.

## Razionalità e verità

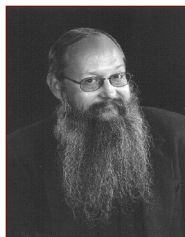
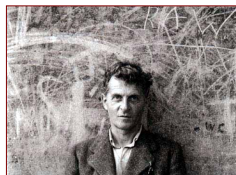
- Secondo Apel (1987), ogni parlante fa riferimento, implicitamente, a condizioni di:
- **comprensibilità** (rispetto delle regole grammaticali)
- **verità** (rapporto semantico tra il detto e la realtà)
- **veridicità** (espressione corretta dello stato del parlante)
- **giustizia**, rispetto delle norme della comunità.
- Ciò caratterizza la **comunicazione “ideale”** che, pur non realizzandosi nella pratica, assume il ruolo di principio regolativo: **l'imparzialità della discussione e il raggiungimento di un'intesa dipendono da tali condizioni.**

## Razionalità e verità

- Con la teoria «consensuale» della verità, Habermas riprende l'impostazione di Apel per sottolineare la possibilità di partecipazione ad un discorso «ideale»:
- “Possiamo **intendere la «giustizia» in analogia con la «verità», come validità incondizionata**, nonostante il suo significato immanente alla giustificazione. La chiave appropriata per questa spiegazione è offerta dalle esigenti condizioni di comunicazione”.
- La “validità intersoggettiva” non deriva soltanto da una “convergenza *osservata* tra pensieri di persone diverse” e “**l'autorità epistemica passa dal soggetto conoscente alla prassi di giustificazione** di una comunità linguistica” (Habermas, 2001).

## Il “gioco di chiedere e dare ragioni”

- Sull'impostazione di **Ludwig Wittgenstein** (1889-1951) si basa **Robert Brandom**,



il quale ai giochi linguistici sostituisce il «**gioco di chiedere e dare ragioni**» (Brandom, 2002): il significato di un enunciato risulta collegato alle diverse prospettive con cui i parlanti si impegnano sulla rete di inferenze che ad esso è connessa.

## Un'esperienza didattica

- Analizzeremo le reazioni un gruppo di allievi (15 anni) di fronte ad un quesito riguardante la verità di una frase.
- Nel corso di una lezione, dopo avere suddiviso a caso gli studenti in gruppi di tre allievi ciascuno, in un'occasione non valutativa, lo sperimentatore (l'insegnante della classe era presente in aula) ha proposto una frase (l'esempio è ripreso da *On denoting*, di B. Russell, 1905).
- Di essa i gruppi sono stati invitati a stabilire la verità o la falsità, dopo aver discusso all'interno del gruppo le risposte da dare.

## Un'esperienza didattica


- Tempo di esecuzione: dieci minuti (ma molti gruppi hanno proposto le conclusioni in un tempo minore).
- Lo sperimentatore scrive alla lavagna:
- *Per ciascuna delle frasi seguenti stabilite: si tratta di una frase vera? Si tratta di una frase falsa?*

**Il re degli abitanti della Luna è calvo**  
[...]

*Concordate le risposte nei gruppi e scrivetele su di un foglio.*

- *Il re degli abitanti della Luna è calvo*

- [01] A.: (*sorridendo*) “Che roba è?”  
[02] B.: (*rilegge sottovoce*) “Il re degli abitanti della luna è calvo.”  
[03] A.: “Cosa vuol dire il re della luna?”  
[04] C.: “Beh, direi la luna è come se non avesse i capelli, magari se era il sole, coi raggi...”  
[05] B.: (*in tono ironico*) “Scusa, ma che cosa dici?”  
[06] C.: “No, no, era per dire, non esistono gli abitanti della luna. Se ci fossero potrei dire qualcosa.”  
[07] B.: (*guardandosi intorno*) “Ma in che senso se è vera o falsa?”  
[08] A.: “Ma che ne so io chi sono gli abitanti della luna, e poi, dai, non ci sono mica gli abitanti della luna e allora non c'è il re.”  
[09] B.: “Allora falsa.”  
[10] C.: “Non è facile come sembra, secondo me c'è qualcosa sotto. Giocano sulle parole per non far capire, leggiamo bene. Il re non c'è, e gli abitanti, cosa vuol dire abitante? Sulla luna non c'è nessuno, allora il re della luna è la luna.”  
[11] A.: “Potrebbero esserci dei microrganismi, una cosa che non si vede, un'entità diversa da noi.”



[12] C.: (*gesticolando*) "O pensa se qualcuno ha visto un astronauta col casco che può sembrare calvo e poi lo racconta, allora magari è vero."

[13] A.: (*deciso*) "Cosa c'entra, ma no, dice gli abitanti della luna, non è che dice la luna o il re della luna è falso, cioè calvo. Bisogna vedere gli abitanti e poi il re."

[14] B.: "Però allora è falsa, gli abitanti non ci sono, il re non c'è e allora per forza non è calvo."


[15] A.: "Attenti al trucco, come dice lui (*indica C.*), forse l'esercizio non si può fare."

[16] B.: "Io divido la frase: quando dico che il re degli abitanti non c'è, basta, è già falsa, anche quello che viene dopo. Che poi dica che è calvo o no non importa, capisci?"

[17] A.: (*dubbioso*) "Allora diciamo che la frase... sarebbe falsa."

[18] C.: "Sì, la cosa più semplice è rispondere falso. Però se la domanda riguarda tipo un film o una favola con un re della luna che magari è calvo, in quella favola è vero."

[19] A.: "Piano però, se mai calchiamo bene nella risposta il re della luna. È quello che è falso. Per dire che la frase, cioè tutta, è falsa si deve vedere questo re, che ha i capelli e invece..."



[20] B.: "Ma no che non si può vederlo, perché non c'è. (*Rivolto a C.*) Non c'è nessuna favola, se no ce lo dicevano. Quindi è falso."

[21] A.: (*dopo qualche secondo di silenzio*) "Insomma, una cosa è dire che una frase è falsa, dico che una cosa non è vera e allora c'è qualcosa che non va nella frase che dico. Una cosa diversa secondo me è parlare di qualcuno e poi dire di questo qualcuno che è, per esempio calvo o che ha i capelli, quando parlo di qualcuno ci credo che c'è."


[22] B.: "No, scusa, ma allora basta dire qualcosa di uno che non esiste per farlo esistere? Se non esiste non esiste, è falso."

[23] A.: "Non deve essere falso lui, cioè il re, deve essere falso che è calvo. Pensiamoci bene prima di rispondere, sembra falso ma potrebbe darsi di no."

[24] B.: "Senti, pensa la cosa più nel complesso, dicono che il re è calvo, può essere falso perché non è calvo ma anche perché non c'è il re. Per essere vero deve esserci il re e deve essere calvo."


[25] C.: (*rivolto ad A.*) "Ma dai, si vede che è falsa! Ci fai sbagliare, se dici che non è falsa allora è vera, cioè vuoi dire che gli abitanti della luna siano calvi?"

[26] A.: "Eh, ma è ovvio che non è vera, però non si capisce bene. No, dai, hai ragione scriviamo pure falso, sono d'accordo anch'io."




### In generale...

- Ricordando la distinzione di Apel, i dubbi di A. non riguardano la comprensibilità della frase (le regole grammaticali): la sua **"verità"** si rapporta alla **"giustizia"**, al rispetto delle norme della comunità, intendendo tra di esse anche le modalità di esame critico della frase.
- Intendendo "giustizia" come "accettabilità idealmente giustificata" (Habermas, 2001), potremmo dire che **A. viene portato dall'argomentazione sviluppata dal gruppo (e primariamente da B.) ad accettare la "giustizia" della scelta finale.**




### Un gioco di chiedere e dare ragioni

- Possiamo innanzitutto rilevare che la costruzione di un significato collettivamente accettato è passata attraverso una negoziazione, un "gioco di chiedere e dare ragioni" (Brandom, 2002).
- Ma sarebbe semplicistico concludere che sia la posizione di B. che quella almeno inizialmente sostenuta da A. hanno apprezzabili motivazioni.
- Proprio la sostenibilità dei due atteggiamenti, unitamente alla loro progressiva evoluzione, ci induce a chiederci:
- **è lecito proporre l'esercizio nella forma vista (di valutazione di "verità")?**
- **con quali intenti, con quali precisazioni?**



### Il punto centrale

- "Non appena il criterio di oggettività della conoscenza passa **dalla certezza privata alla prassi pubblica della giustificazione**" (Habermas, 2001) diventa **"una validità motivata per un pubblico"** (Schnädelbach, 1992). **razionalità epistemica**
- La comune decisione raggiunta **un valore di verità è stata ottenuta confrontando e giustificando le opinioni e comporta delle conseguenze.** **razionalità teleologica**
- Potremmo dire che la discussione tra gli studenti (che **riflettono e parlano** nella prospettiva di una decisione da prendere, dunque di un'azione) sviluppa mediante la razionalità discorsiva **le radici di razionalità "reciprocamente intrecciate"** (Habermas, 2001). **razionalità comunicativa**



### Il punto centrale

- Il dibattito, peraltro stimolato dalla traccia dell'esercizio, appare ancora distante dalla "ideale" comunicazione che Habermas riprende da Apel.
- Tuttavia i dati evidenziano che la discussione non ha portato alla sola "convergenza osservata tra pensieri o rappresentazioni di persone diverse",
- ma al fatto che **"i partecipanti all'argomentazione che si convincono della legittimità di una pretesa di validità controversa sono giunti ad un punto in cui la coercizione non coercitiva dell'argomento migliore li ha indotti a un mutamento di prospettiva"** (Habermas, 2001: ci riferiamo all'intervento [24] e all'intervento [35]).

## Volete fare una prova “aritmetica”?

- A degli studenti di qualsiasi livello scolastico è possibile proporre un test (molto?) simile a quello ora presentato.

Considerate la frase:

***$1/0+1/0+1$  è dispari***

**è una frase vera? È una frase falsa?**

- Questa seconda esperienza potrà evidenziare l'eventuale ruolo del linguaggio algebrico (e, più in generale, dell'“ambiente matematico”) sul comportamento degli allievi.
- Nella matematica si trova *sempre* il vero o il falso?

## Conclusioni

- Abbiamo proposto agli studenti un quesito riguardante la verità o la falsità di una frase: ma **in che senso, e con quali garanzie di “certezza”, possiamo parlare di “verità”?**
- “Che ne è della mitica certezza associata alle dimostrazioni matematiche? L'idea che ci sia una certezza speciale in matematica è un equivoco alimentato da una svista linguistica” (Lolli, 2005).
- Eppure alcuni atteggiamenti degli studenti variano passando da un contesto non matematico ad uno matematico: Rorty si chiede dunque se la “verità” di un'asserzione si basi sulla corrispondenza al dato e **posseda ancora un valore indipendente dal contesto della giustificazione** (Rorty, 1994).

## Conclusioni

- “Il predicato di verità rientra – anche se non esclusivamente – nel gioco linguistico dell'argomentazione; la sua importanza si può quindi chiarire (per lo meno anche) in ragione delle sue funzioni in questo gioco linguistico, dunque **nella dimensione pragmatica di un determinato impiego del predicato**”, J. Habermas (2001, p. 246).
- “**Il mondo è là fuori, ma le descrizioni del mondo non lo sono. Solo le descrizioni del mondo possono essere vere o false. Il mondo di per sé – a prescindere dalle attività descrittive degli uomini – non può esserlo**”, R. Rorty (2003, p. 11).

***A tutti Voi  
grazie  
dell'attenzione***

Grazie  
a Dick Rorty (1931–2007)



Per risorse, materiali e  
indicazioni bibliografiche  
si può consultare il sito:  
[www.syllogismos.it](http://www.syllogismos.it)

With your wishes?  
Dick Rorty