

Ancona, 31 marzo 2009

Didattica della matematica e intercultura Dalle teorie alla pratica



Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

Insegnamento della matematica in chiave interculturale

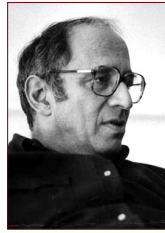
- Il circolo ermeneutico: storia e didattica
- Dall'epistemologia all'ermeneutica: tra incommensurabilità e interpretazione
- L'aspetto interculturale: concetti chiave da Habermas a Peirce
- Verso una conclusione: Heidegger e il *positum* per una matematica non solo oggettificata



Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmus da Rotterdam
(Elogio della Follia, 39)

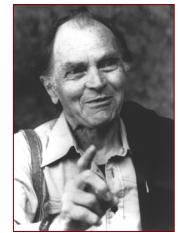
Scienza, paradigmi e "fatti" secondo Kuhn

- Per **Thomas Kuhn** (1922–1996) la scienza non progredisce gradualmente verso la "verità", bensì è soggetta a rivoluzioni.
- Kuhn chiama **scienza normale** quella sviluppata con riferimento ai paradigmi di un periodo storico; la **scienza anormale** porta invece alla revisione radicale di essi.
- Quali "anomalie" portano gli scienziati e la comunità scientifica a introdurre e ad accettare tali variazioni?
- Un motivo (l'unico?) è un disaccordo con i **"fatti"**.



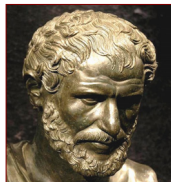
La critica: Feyerabend

- Per **Paul Feyerabend** (1924–1994, 2003, p. 32) tutto ciò è accettabile «sempre che esistano fatti e siano disponibili indipendentemente dalla considerazione o meno di alternative alla teoria che deve essere verificata».
- Avrebbe dunque senso, alla luce di quanto notato, riferirsi a dei **"fatti"** in termini assoluti?
- «Non ci sono due atti distinti – l'osservazione di un fenomeno e la sua espressione con l'aiuto di una sua formulazione verbale appropriata – **ma soltanto uno**» (Feyerabend, 2003, p. 60).



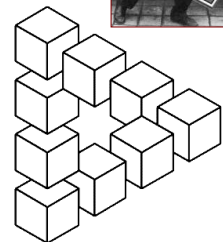
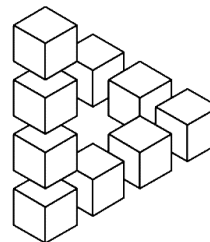
Ogni forma di linguaggio richiede un'interpretazione: anche i linguaggi apparentemente più oggettivi...

- *Il linguaggio e la logica arcaica* è un'opera fondamentale (1925) di Ernst Hoffmann (1880–1952) il cui viene esaminata l'iniziale contrapposizione tra il $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$ e gli $\epsilon\pi\epsilon\alpha$ (Eraclito, Parmenide).
- I singoli $\epsilon\pi\epsilon\alpha$ non devono essere considerati isolatamente, in quanto ciò può causare contraddizioni. Vanno **interpretati** nel linguaggio, all'interno del $\lambda\acute{o}\gamma\omicron\varsigma$: questa corretta interpretazione consente di dare un senso non contraddittorio alla parola e di comprendere il discorso.



Linguaggi da interpretare "Guardiamo" una figura...

- Si osservi la figura a sinistra: nessun problema, è un insieme di cubetti...
- Ma se la figura fosse **quella a destra?**




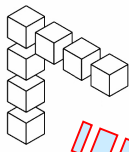
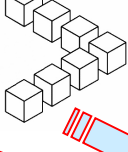
Linguaggi da interpretare
“Guardiamo” una figura...



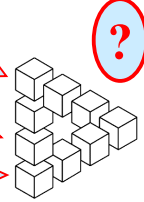
- Se eliminiamo due cubetti da uno dei tre lati, l'ambiguità si dissolve...




Linguaggi da interpretare
“Guardiamo” una figura...

- Ma se cerchiamo di “unire” le tre letture...



Interpretazione... circolare



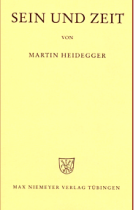
- Secondo **Friedrich Schleiermacher** (1768–1834) c'è un «circolo [...] per il quale il particolare può comprendersi solo partendo da un universale di cui è parte e viceversa».
- Scrisse inoltre (*Hermeneutik*, 144/455): «Partendo dall'inizio di un'opera e progredendo a poco a poco, **la comprensione graduale di ogni singolo elemento e delle parti della totalità che a partire da essa si organizzano è sempre soltanto qualcosa di provvisorio.** [...] Quanto più avanziamo tanto più tutto ciò che precede viene anche illuminato da ciò che segue».

Il circolo ermeneutico e la filosofia di Heidegger




- Dunque, nota **Matthias Jung**, «a partire dal circolo chiuso si giunge a **una spirale aperta**, costituita da **ripetuti cammini interpretativi** che devono essere sempre ritenuti passibili di una nuova revisione».
- Il problema fu ripreso in termini decisivi da **Martin Heidegger (1889–1976)** che determina la svolta grazie alla quale la comprensione non viene più ad essere orientata sul solo modello della spiegazione teoretica dei testi, bensì sullo stesso rapporto che gli esseri umani hanno con il mondo.

Il circolo ermeneutico e la filosofia di Heidegger



- Heidegger in *Essere e tempo* scrive: «l'interpretazione deve sempre muoversi nel compreso e nutrirsi di esso [e] le regole più elementari della logica ci insegnano che il *circolo* è *circulus vitiosus*»; ma se si riconosce nel circolo ermeneutico «un circolo vizioso e se si mira ad evitarlo o semplicemente lo si “sente” come un'irrimediabile imperfezione, si fraintende la comprensione da capo a fondo».
- «L'importante non sta nell'uscir fuori dal circolo, ma nello starvi dentro nella maniera giusta».

Il ruolo chiave delle pre-supposizioni



- Queste considerazioni capovolgono una posizione spesso assunta secondo cui una “pre-supposizione” è da considerare negativamente (scarsa disponibilità alla valutazione serena).
- Ma le pre-supposizioni, secondo Giovanni Reale (Introduzione a *Verità e Metodo* di Gadamer), sono «ciò che mette in moto il circolo; e la scientificità della ricerca si realizza nella misura in cui i pre-concetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, [...] sempre più in sintonia con l'oggetto che viene indagato».

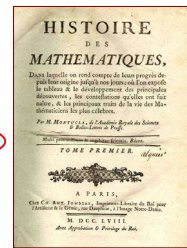
Storia (anche storia della matematica) e interpretazione

- Riflettiamo anche sul ruolo della storia e sulla sua importanza per la didattica.
- Per Hans-Georg Gadamer (1900–2002) «pensare storicamente significa portare a compimento quella **trasposizione che i concetti del passato subiscono** quando noi cerchiamo di pensare in base ad essi. Il pensare storicamente comporta sempre costitutivamente una **mediazione** tra quei concetti e il proprio pensiero».
- «L'esperienza della tradizione storica [...] comunica sempre una verità, della quale si tratta di *partecipare*».



I contesti storico-culturali

orizzonte del presente
 “fusione di orizzonti”
 orizzonte del passato



- Con Gadamer, «l'essenza dello spirito storico non consiste nella restituzione del passato, ma nella **mediazione, operata dal pensiero, con la vita presente**».

Sommario Insegnamento della matematica in chiave interculturale

- Il **circolo ermeneutico: storia e didattica**
- Dall'**epistemologia all'ermeneutica: tra incommensurabilità e interpretazione**
- L'aspetto interculturale: **concetti chiave da Habermas a Peirce**
- Verso una conclusione: **Heidegger e il positum per una matematica non solo oggettificata**



Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
 Erasmo da Rotterdam
 (Elogio della Follia, 39)

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Iniziamo con una provocazione...
- L'indiano **Bhaskara** (1114–1185) si occupò del *kha-hara*, frazione con denominatore 0. Scrisse in *Bijaganita*:
- «Una quantità divisa per zero diventa *kha-hara*. Questa frazione è denominata **quantità infinita**. In questa **quantità con zero come divisore non c'è alcuna alterazione, sebbene molti possano essere aggiunti o tolti**, così come nessun cambiamento può aver luogo nella divinità immutabile quando i mondi vengono creati o distrutti, anche se numerosi ordini di esseri vengono assorbiti o creati».



Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Come possiamo esprimere tali considerazioni mediante una scrittura moderna?
- Una **prima** ipotesi può essere:

$$\frac{1}{0} + 5 = \frac{1+5 \cdot 0}{0} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0}$$
 scrittura “matematicamente scorretta” ma che esprime (in termini non del tutto banali) la visione di Bhaskara.
- Prima di archiviare **con il giusto sdegno** la scrittura precedente, occupiamoci ancora un po' del suo significato. **Cerchiamo di interpretarla...**



Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- L'insolita “addizione” di “1/0” e di 5 si basa sulle **“nostre” regole** usuali dell’addizione di razionali.
- Quando si scrive

$$\frac{1}{0} + 5 = \frac{1+5 \cdot 0}{0} = \frac{1+0}{0} = \frac{1}{0}$$
 si portano “1/0” e “5” allo “stesso denominatore” (li si rende, in qualche modo, “analoghi”) e li si somma.
- Per una scrittura corretta dovremmo ricorrere al **concetto di limite** e sostituire al “reciproco di zero”:

Il “guaio” è che 1/0 non “esiste” – se esistesse...

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- Tuttavia sarebbe lecito (in che senso, con quali accorgimenti) interpretare Bhaskara alla luce di Cauchy e di Weierstrass?
- Non sembra plausibile ipotizzare un consapevole tentativo di Bhaskara di introdurre l'“infinito” nel sistema numerico (un simile tentativo comporterebbe peraltro evidenti problemi, in quanto finirebbe per suggerire che 0 moltiplicato per “infinito” potrebbe essere uguagliato a ogni numero n , implicando così un'imbarazzante... uguaglianza di tutti i numeri).

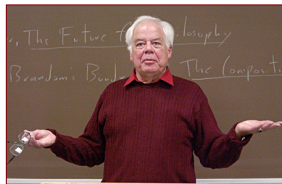


Incommensurabilità nella storia (e nella geografia)

- In effetti non potremmo far riferimento agli stessi “principi generali” nell'accostare l'argomentazione di un indiano che descrive le caratteristiche del reciproco di 0 pensando all'immensità della divinità alle considerazioni di un moderno matematico che introduce (con la definizione “dell' ϵ - δ ” o topologicamente) il concetto di limite.
- Il moderno matematico occidentale comprenderebbe l'argomentazione dell'indiano (e forse viceversa), la considererebbe curiosa, magari divertente. Tra i due, dunque, non è inibito il dialogo; tuttavia non potrebbe essere raggiunto un accordo razionale.

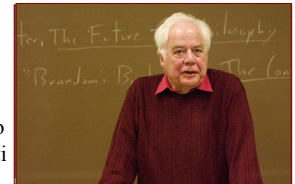
Richard Rorty (1931–2007): discorso normale, discorso anormale

- Secondo Rorty, due contributi si dicono commensurabili quando possono essere considerati nell'ambito di uno stesso quadro che consente un “accordo razionale” e indica ai partecipanti alla discussione come raggiungere tale accordo. Tra contributi incommensurabili allo stesso discorso non si può impostare un confronto sul piano dell'epistemologia (intesa come confronto razionale).



Richard Rorty (1931–2007): discorso normale, discorso anormale

- Subentra allora, per Rorty, la possibilità dell'ermeneutica, che «non è il nome di una disciplina, né un modo di conseguire i risultati che l'epistemologia non ha raggiunto. Al contrario, nell'ermeneutica si esprime la speranza che lo spazio culturale lasciato dall'abbandono dell'epistemologia non venga riempito – che la nostra cultura diventi tale che in essa non si avverta più l'esigenza di cogenze definitive e ultime».



Dialogo e metafore fondanti

- La cultura matematica indiana ha una ricchezza che non può riassumersi in poche formule e non si può puntare solo a una sua “normalizzazione”.
- Non possiamo guardare a una tradizione diversa per “comprenderne” il vocabolario sulla base del nostro... ma incommensurabilità non significa irriducibilità!
- Ciò rivaluta un aspetto interculturale...
- e soprattutto fornisce la possibilità di identificare (nuove) metafore fondanti (Lakoff & Núñez, 2000):
- Un infinito, dunque, “seguendo Bhaskara” (ma anche “seguendo Desargues” o “seguendo Pascal”!)



Sommario Insegnamento della matematica in chiave interculturale

- Il circolo ermeneutico: storia e didattica
- Dall'epistemologia all'ermeneutica: tra incommensurabilità e interpretazione
- L'aspetto interculturale: concetti chiave da Habermas a Peirce
- Verso una conclusione: Heidegger e il *positum* per una matematica non solo oggettificata



Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmus da Rotterdam
(Elogio della Follia, 39)

L'aspetto interculturale

Alcuni concetti chiave

- Dal punto di vista pratico è necessario fissare alcuni "concetti di rilevanza interculturale" sui quali proporre una riflessione.
- Ogni indicazione di concetti specifici della disciplina (della matematica) sarebbe parziale e probabilmente fuorviante. Risentirebbe peraltro in termini netti dei diversi livelli scolastici.
- Preferiamo orientarci su **due triadi classiche** che stanno alla base
(1) dei concetti della matematica e
(2) della loro espressione nei diversi linguaggi.



L'aspetto interculturale

Alcuni concetti chiave

- Un'indicazione (ovviamente non esclusiva) si basa innanzitutto sulla classificazione delle diverse forme di **razionalità secondo Juergen Habermas:**
- Razionalità **epistemica** (per argomentare)
- Razionalità **teleologica** (per ottenere)
- Razionalità **comunicativa** (per comunicare)



L'aspetto interculturale

Alcuni concetti chiave

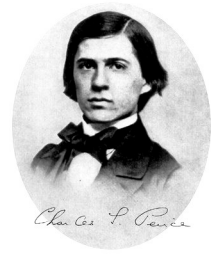
- L'analisi delle diverse radici di razionalità coinvolte nelle varie culture appare una condizione importante per una corretta comprensione di scelte e di motivazioni.
- **Dare per scontata una forma "tradizionale" (per chi?) di razionalità è anticulturale e antistorico.**
- Un confronto (ermeneutico, più che epistemologico – si veda l'approccio di **Rorty**) collega forme diverse di razionalità.



L'aspetto interculturale

Alcuni concetti chiave

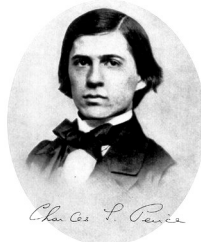
- Un secondo spunto deriva dalla classificazione della **semiotica di Charles Sanders Peirce:**
- Segno di carattere **iconico** (somiglianza)
- Segno di carattere **indicale** (connessione "causale")
- Segno di carattere **simbolico** (mediazione culturale)



L'aspetto interculturale

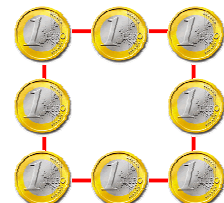
Alcuni concetti chiave

- Il riconoscimento:
 - ⇒ dei **diversi tipi di segno** impiegati nelle culture,
 - ⇒ delle rispettive **possibilità rappresentative**, nonché
 - ⇒ delle rispettive **difficoltà interpretative**
- appare un'analisi molto importante da condurre per la definizione di un curriculum interculturale.



Nella nostra tradizione matematica icone e simboli sono prevalenti, ma...

- Disponiamo le monete in modo che ogni lato del quadrato ne comprenda tre.
- Come possiamo fare per formare con le stesse monete un quadrato con **quattro monete per lato?**
- Se consideriamo le monete come dei **"punti-posizione"** (primità) l'esercizio è impossibile.
- Considerandole **concretamente...**



L'aspetto interculturale Alcuni concetti chiave

Sugeriamo dunque le seguenti parole chiave per una prima discussione su di un curriculum di matematica da un punto di vista interculturale:

- Argomentare
 - Finalizzare
 - Comunicare
 - Immagine
 - Connessione causale
 - Simbolo
- razionalità
- segno

Sommario Insegnamento della matematica in chiave interculturale

- Il circolo ermeneutico: storia e didattica
- Dall'epistemologia all'ermeneutica: tra incommensurabilità e interpretazione
- L'aspetto interculturale: concetti chiave da Habermas a Peirce
- Verso una conclusione: Heidegger e il *positum* per una matematica non solo oggettificata



Ci sono tante grammatiche quanti sono i grammatici, e anche di più
Erasmus da Rotterdam
(Elogio della Follia, 39)

Riprendiamo criticamente Peirce: il ruolo del contesto culturale

- Torniamo a Peirce. Egli ha ragione quando afferma che il significato si connette in qualche modo all'esperienza. Ma il suo concetto di conoscenza risente del punto di vista di un singolo, "in prima persona".
- La comunità, secondo Peirce, è definita dalla *comune logica* (CP 5.354). **Esiste una comunità di persone pensanti in quanto esiste una logica oggettiva.**
- Secondo Peirce, quindi, noi viviamo in un mondo i cui oggetti sono intelligibili e semioticamente conoscibili, sebbene per conoscerli dobbiamo impegnarci in un processo di semiosi illimitata...

Riprendiamo criticamente Peirce il ruolo del contesto culturale

- ...tuttavia a dispetto dell'accento posto sulla pratica, il pragmatismo di Peirce «è del tutto razionalistico» (Smith, 1983, p. 49). L'individuo è una sorta di astrazione: **l'essere umano, per Peirce, non è un prodotto della storia e della cultura, né lo è la sua conoscenza del mondo** (seguito: Radford, 2006).
- Ma la natura culturale del linguaggio ci fa notare che **l'interpretazione non può ridursi a un atto in cui qualcuno (soggetto) si riferisce a qualcosa (oggetto).**
- Nell'**ottica semiotico-culturale** l'interpretazione è **personale** (esperienza) e **culturale** (mezzi semiotici).

Riprendiamo criticamente Peirce: il ruolo del contesto culturale

- Per Radford ed Empey, «gli oggetti matematici non sono entità preesistenti, bensì **oggetti concettuali generati nel corso dell'attività umana**».
- E «la matematica è più di una forma di produzione del sapere – una pratica di teorizzazione. **Se le persone creano la matematica, viceversa, la matematica influenza i modi di essere, di vivere e di pensare delle persone**», cioè «crea le condizioni per il sorgere di certe forme di soggettività e di comprensione» (Radford & Empey, 2007, p. 250).



Ancora uno spunto di Heidegger

- Secondo Heidegger (1987, *Wegmarken*, ma 1927) possiamo considerare due tipi di scienza: **la pura scienza dell'essere** (filosofia) e le **"scienze positive"**:
- «Ci sono necessariamente due possibilità fondamentali di scienza: scienze degli enti o scienze ontiche e *la* scienza dell'essere o scienza ontologica, la filosofia. Le scienze ontiche hanno sempre per tema un ente dato che in un certo modo è già sempre svelato *prima* dello svelamento scientifico. **Le scienze di un ente dato, di un *positum*, noi le chiamiamo scienze positive**» (Heidegger, 1987).
- Per considerare la matematica come una scienza positiva, è **necessario precisarne il *positum*.**

Dal *positum* alla matematica Un'ipotesi per un percorso

- Come prima possibilità, potremmo identificare il *positum* della matematica con le “**esperienze matematiche**” (cioè con attività storicamente e culturalmente collocate i cui oggetti, metodi e scopi siano inquadrabili in un sistema di pensiero teorico detto “matematica”).
- Ma in questo caso la “matematica” stessa sarebbe parte di tali esperienze, **con una progressiva articolazione storica e culturale** (Heidegger, 1987).
- E facendo riferimento a una concezione di matematica che varia nella storia e nelle culture le esperienze dovrebbero essere **oggettualizzate** (“oggettificate”).



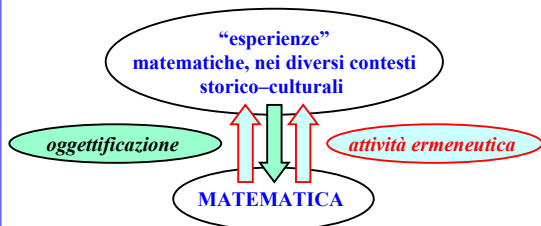
Dal *positum* alla matematica Un'ipotesi per un percorso

- È inoltre necessario interrogarsi sul significato del termine **oggetto**.
- Per Kant l'oggetto è ciò che esiste e *sta di fronte* (*Gegenstand*) nell'esperienza delle scienze naturali. Tuttavia non ogni cosa che *sta di fronte* è un oggetto: ad esempio il “dovere morale” non lo è, e quando riflettiamo su di esso (pensando e parlando) non ne realizziamo un'oggettificazione.
- Più in generale, dunque, **l'esperienza di qualcosa in senso lato non può essere comunque collegata (soltanto!) a una forma di oggettificazione** (Heidegger, 1987, p. 29).



Dal *positum* alla matematica Un'ipotesi per un percorso

- Bisogna dunque precisare in termini più dettagliati il passaggio dal *positum* alla matematica propriamente detta: è **soltanto un'oggettificazione?**



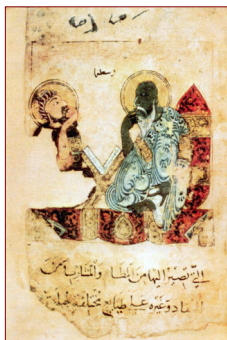
Dal *positum* alla matematica Un'ipotesi per un percorso

- Un percorso che tenga conto dell'attività ermeneutica del soggetto può essere:
- **(I) Un'esigenza porta all'organizzazione di una prassi sociale** (una “esperienza matematica”, storicamente collocata, collegata alla forma di **razionalità** di una cultura).
- **(II) Tale prassi sociale viene espressa e manipolata semioticamente**, dunque con la mediazione di linguaggi, segni, interazioni, artefatti.
- **(III) Ciò porta alla sua concettualizzazione**, dunque alla nascita di un elemento del sapere matematico (fase che coinvolge una forma di consenso sociale).



Dal *positum* alla matematica Un'ipotesi per un percorso

- Ciò non deve interpretarsi in termini “definitivi”...
Aristotele può insegnare agli Arabi!
- **Dunque il processo può ripetersi**, con **altre esigenze** che emergono in contesti culturali nuovi.
- Un elemento del sapere matematico può essere **ripreso** e portare a nuove concettualizzazioni.



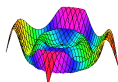
Dal *positum* alla matematica Un'ipotesi per un percorso

- Tutto ciò resta vicino alla **filogenesi**. Ad esempio, l'algebra si sviluppa in una **coevoluzione** (**J.-P. Drouhard**) che coinvolge problemi numerici, sistemi di rappresentazione e approcci strutturali.
- **Ma in ambito didattico** le cose cambiano: molte ricerche sono dedicate ai rapporti aritmetica–algebra.
- Dal punto di vista **ontogenetico** bisogna sottolineare il potere di trasformazione della conoscenza che agisce sia sull'oggetto che sul soggetto (Radford, 2008). **La relazione dialettica tra essi ci ha portato a dire che l'apprendimento è un processo di oggettificazione (knowing) e di soggettificazione (being).**



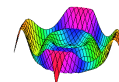
Per “concludere”...

- La mia “conclusione” è ancora generale: rivaluta una **posizione attiva del discente**, il quale nel momento interpretativo, con le sue **presupposizioni**, in una fase che si rinnova continuamente,
– **costruisce un senso al sapere in gioco (knowing)**
– **e viene influenzato da tale sapere (being)**.
- L’insegnante è una figura chiave che deve seguire questa fase con la necessaria prudenza:
- quali sono le **presupposizioni**? Tutte le conoscenze anteriori? E possono essere suggerite, controllate?
- **Interpretare, quindi, per costruire (knowing) e per vivere (being) il senso di un sapere.**



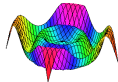
Per “concludere”...

- **L’ermeneutica** si occupa di «come l’interpretazione può assumere un ruolo più centrale nella comprensione della matematica. Spostando l’enfasi da ciò che un’affermazione può significare a come essa è stata usata da qualcuno in una situazione specifica, viene rivalutato l’essere umano, con le sue intenzioni» (Brown, 2001, p. 24).
- Essa però **rischia di restare un esercizio filosofico**: per evitare ciò è stata collegata alla **semiotica!**
- Viceversa, la semiotica considerata isolatamente può rivelarsi “statica”: il “gioco” delle interpretazioni può conferire la **vivacità** per operare nella didattica.



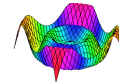
Per “concludere”...

- Anche la matematica può insomma impostarsi su di un approccio ermeneutico: è un’**attività umana**, non l’accesso a una (o “alla”) Verità.
- **La matematica può certamente collegarsi al mondo reale; ma la matematica non “è la Verità”** (seguendo ancora idealmente Rorty).
- Il fatto che una proposizione venga classificata “vera” non significa che essa corrisponda...
- **...a qualcosa di vero, di assoluto, di bello che si trova “là fuori”.**



Per “concludere”...

- È rischioso invocare la scoperta di una (o “della”) verità “là fuori”: **«il mondo è là fuori, ma le descrizioni del mondo non lo sono.**
- **Solo le descrizioni del mondo possono essere vere o false. Il mondo di per sé – a prescindere dalle attività descrittive degli uomini – non può esserlo.**



Per “concludere”...

- **A mio avviso, considerazioni come queste non devono (non possono) avere la pretesa di essere “conclusive”.**
- Chiudo dunque questa riflessione citando la serena espressione con cui **Gadamer** suggellò il poscritto all’edizione 1972 del proprio *Verità e metodo*:
«Un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l’ultima parola»



*A tutti grazie
dell’attenzione*

**«Un cattivo ermeneuta
è colui che si illude di
dover avere
l’ultima parola»**

Ci sono tante grammatiche quanti
sono i grammatici, e anche di più
Erasmus da Rotterdam
(Elogio della Follia, 39)

