Seguendo Rafael Bombelli: un'introduzione didattica degli immaginari

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
giorgio.bagni@dimi.uniud.it

Sunto

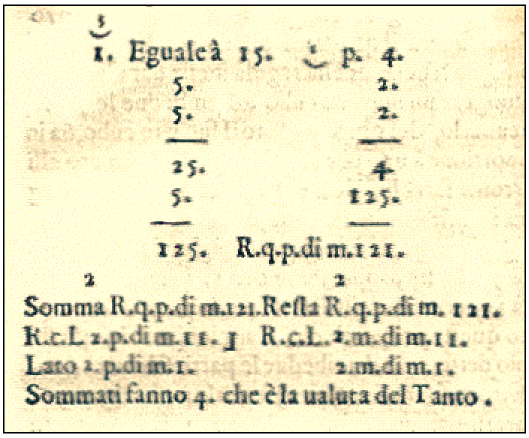
Già Schleiermacher, alla fine del Settecento, aveva indicato la presenza di un circolo apparente (il circolo ermeneutico), per il quale un particolare può essere compreso solo a partire dall'universale di cui è parte e viceversa. Il problema è stato ripreso nel secolo scorso da Heidegger, per il quale la comprensione non è più orientata sul solo modello della spiegazione teoretica dei testi, bensì sullo stesso rapporto che gli esseri umani hanno con il mondo. Le presupposizioni hanno il ruolo essenziale di "mettere in moto il circolo" (Heidegger, 2005; inoltre: Gadamer, 2000).
L'introduzione dei numeri immaginari, nella scuola secondaria, è un momento importante del curriculum e può essere causa di incoerenze. Nel Cinquecento, il bolognese Rafael Bombelli (1526–1572) studiò alcune equazioni di terzo grado che portano, nel corso del procedimento risolutivo, a operare con quantità non reali; il risultato infine ottenuto, tuttavia, è un numero reale (ovvero un complesso con parte immaginaria nulla: Bombelli, 1966; Maracchia, 2005). Diversa è evidentemente, ad esempio, la situazione di un'equazione di secondo grado come $x^2+1 = 0$, con il risultato stesso immaginario.
Nell'immagine seguente riportiamo, a destra, la scrittura originale della risoluzione dell'equazione sopra citata tratta dalla pagina 294 dell'*Algebra* di Bombelli:

$$x^3 = 15x+4$$
$$[x^3 = px+q]$$

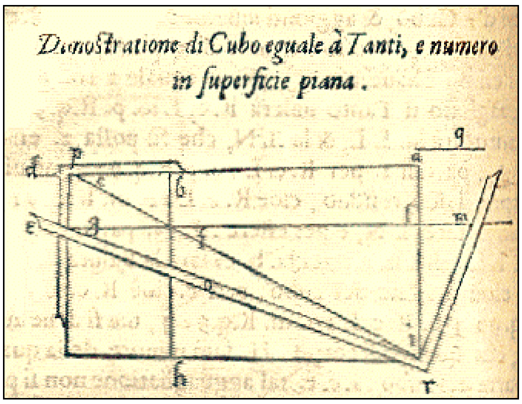
$$(4/2)^2-(15/3)^3 = -121$$
$$[(q/2)^2-(p/3)^3 = -121]$$

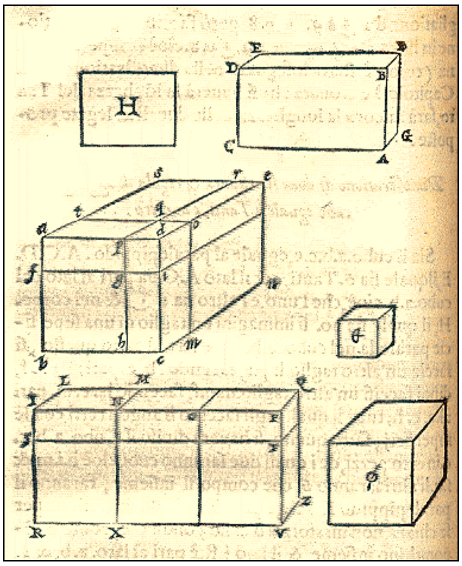
$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

$$x = (2+i) + (2-i) = 4$$

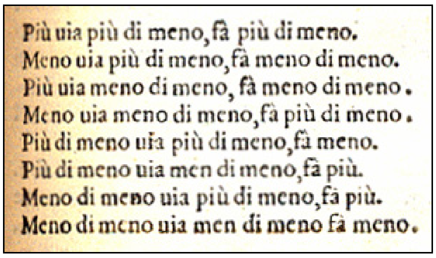

1. Eguale à 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4.
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L.2.p.di m.11.] R.c.L.2.m.di m.11.
Lato 2.p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

Riportiamo inoltre le "costruzioni in linee" (sia tridimensionale che bidimensionale) che lo stesso Bombelli fornisce alle pp. 296 e 298 del proprio trattato per confermare la validità del procedimento (per i dettagli: Bombelli, 1966).

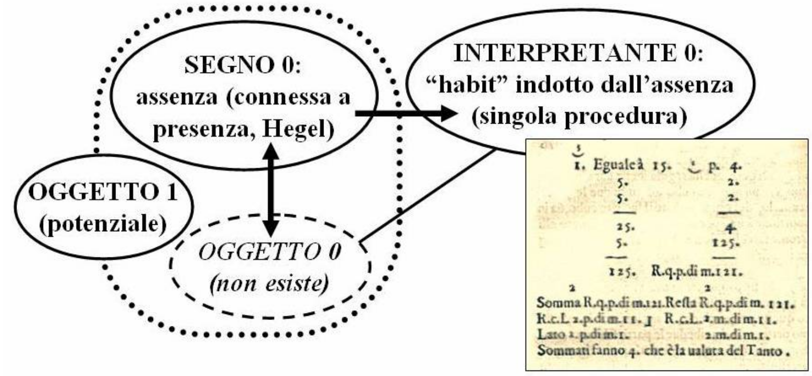




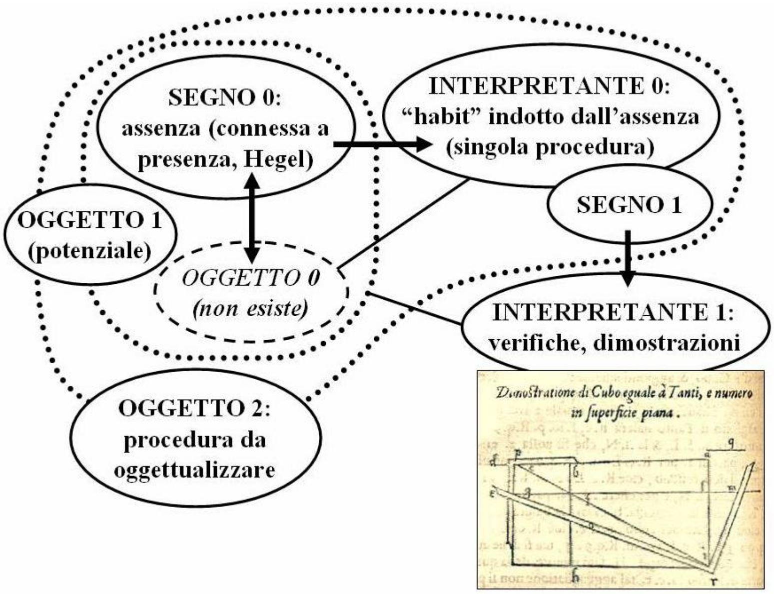
Didatticamente, la risoluzione di un'equazione di terzo grado come quelle trattate da Bombelli può contribuire a far sì che gli allievi accettino la presenza dei numeri immaginari: tale posizione può essere accostata a una presupposizione (motivata dall'efficacia del procedimento), che contribuisce a far accettare le "regole" enunciate dallo stesso Bombelli per il calcolo con pdm e mdm (che oggi scriviamo i e $-i$, vedi tabella a lato, tratta da p. 169 dell'*Algebra*).


Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

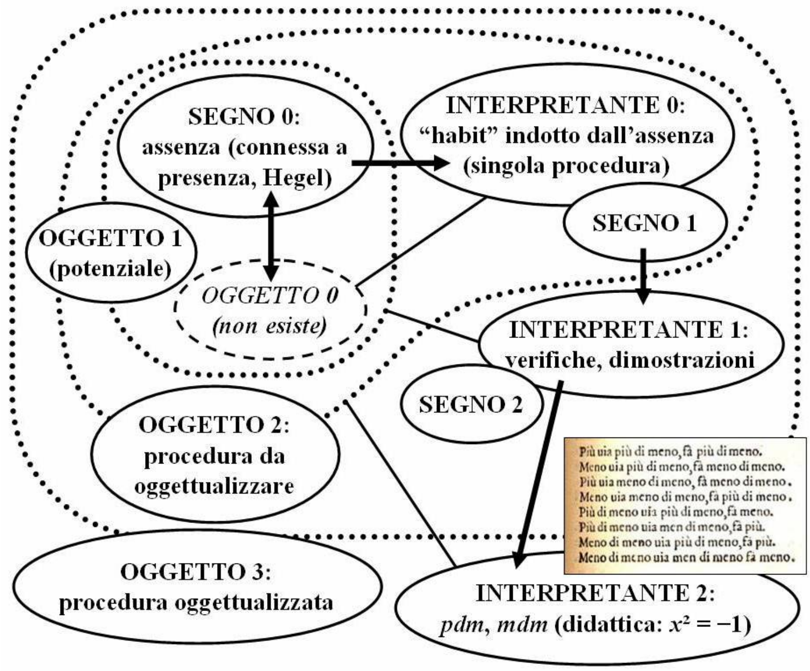
I risultati di una ricerca didattica sperimentale sembrano indicare che un interessante percorso di apprendimento può basarsi sull'esempio storico al quale abbiamo fatto cenno: le interviste con gli studenti confermano il ruolo del contratto didattico, ad esempio per l'importanza del risultato (Bagni, 2000). Assume un ruolo rilevante la posizione secondo la quale la considerazione dell'unità immaginaria come "numero" può non essere causa di difficoltà particolari; tale posizione appare utile in quanto consente di trovare una radice di un'equazione di terzo grado: proprio questa sua efficacia viene a garantire la sua plausibilità.
L'approccio descritto può essere utilmente analizzato dal punto di vista semiotico. Secondo Charles S. Peirce, l'oggetto dinamico è in progressiva evoluzione nel processo di semiosi illimitata (Peirce, 1931–1958; Bagni, 2007). Ma esiste, nella matematica e nella sua didattica, un "oggetto" ovvero un "primo segno" da cui si sviluppa la catena semiosica? L'"assenza" può essere considerata alla stregua di un segno: si potrebbe dunque ipotizzare che proprio la constatazione di un'assenza sia il punto da cui prende le mosse il processo di semiosi illimitata (Peirce, 1931–1958, § 5.480).
Potremmo così descrivere lo sviluppo iniziale di tale catena e approfondire il diagramma sopra proposto: una sorta di "oggetto potenziale" si collega alla necessità di mettere a punto una procedura mediante la quale risolvere un'equazione di terzo grado:



È l'efficacia della procedura a essere fondamentale: non c'è un "oggetto" al quale riferirsi. Ma la possibilità di giustificare (ad esempio con le "costruzioni in linee" di Bombelli) quanto svolto inizia a fornire concretezza alla procedura che diventa una "procedura da oggettualizzare" (Sfard, 1991; Slavit, 1997; Giusti, 1999).



Quindi si giunge ad una prima oggettualizzazione (Radford, 2003):



Le regole di calcolo di Bombelli per *pdm* e *mdm* indicano un atteggiamento nuovo: grazie ad esse *pdm* e *mdm* iniziano a diventare “oggetti” autonomi, si svincolano dall’esempio introduttivo e possono trovare applicabilità, in prospettiva, in situazioni anche molto diverse (considerazioni storicamente interessanti sono discusse in: Radford & Empey, 2007). Didatticamente questa fase si può caratterizzare mediante l’emergenza e il consolidamento di uno *schema d’azione* ovvero d’uso delle regole e quindi dell’oggetto (una procedura oggettualizzata, sempre seguendo Giusti, 1999, la quale può intendersi come artefatto: Rabardel, 1995; Bagni, 2006–a, 2006–b). Ulteriori ricerche saranno dedicate all’applicazione del modello descritto in ambito didattico.

Grazie a Paolo Boero (Università di Genova) per i preziosi commenti.

Bibliografia essenziale

Bagni, G.T. (2000). Introducing complex numbers: an experiment. In J. Fauvel & J. van Maanen (a cura di), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp. 264–265). Dordrecht: Kluwer.
Bagni, G.T. (2006–a). *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
Bagni, G.T. (2006–b). Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 3, 259–280.
Bagni, G.T. (2007). *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti e figure.* Roma: Aracne.
Bombelli, R. (1966). *L’Algebra*. U. Forti & E. Bortolotti (a cura di). Milano: Feltrinelli.
Gadamer, H.G. (2000). *Verità e metodo*. G. Vattimo (a cura di). Milano: Bompiani (1960, *Wahrheit und Methode: Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*. Tübingen: Mohr).
Giusti, E. (1999). *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri.
Heidegger, M. (2005). *Essere e tempo*, nuova edizione a cura di F. Volpi sulla traduzione di P. Chiodi. Milano: Longanesi (1927, *Sein und Zeit*. Halle an der Saale: Niemeyer).
Maracchia, S. (2005). *Storia dell’algebra*. Napoli: Liguori.
Peirce, C.S. (1931–1958). *Collected Papers*. I–VIII. Cambridge: Harvard University Press.
Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Colin.
Radford, L. (2003). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 2, 123–150.
Radford, L. & Empey, H. (2007). Culture, knowledge and the Self: Mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Festschrift Ubiratan D’Ambrosio, Especial 1, 231-254.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
Slavit, D. (1997). An alternate route to reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 259-281.