

Liceo Scientifico Leonardo da Vinci, Treviso
12 aprile 2008

Beautiful Minds

Giochi e modelli matematici da Pacioli a Nash



Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

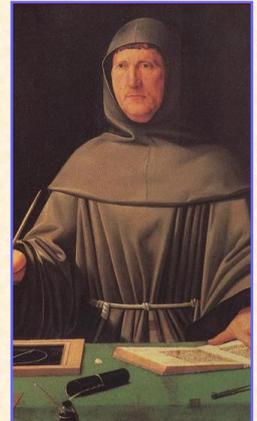


Sommario

Beautiful Minds

Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione**
tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
una storia antichissima
- **Moltiplicazioni**
con risultati sorprendenti
- **Un gioco**
di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
Von Neumann e Nash



Luca Pacioli

- Il francescano **Luca Pacioli** (1445–1514) è una figura primaria della matematica del XV–XVI secolo.
- Pacioli si ricorda per l'introduzione della "partita doppia"...
- ... e per molti giochi matematici che oggi ispirano le nostre gare!



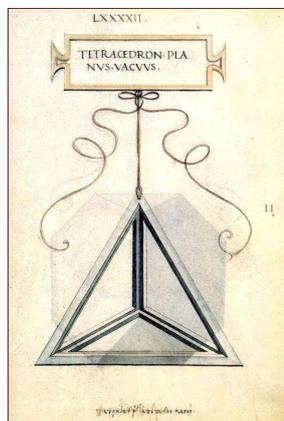
Luca Pacioli

- La *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionalità*, risalente al 1494, fu la prima opera a carattere enciclopedico di matematica a essere pubblicata a stampa, nel 1499.



Luca Pacioli

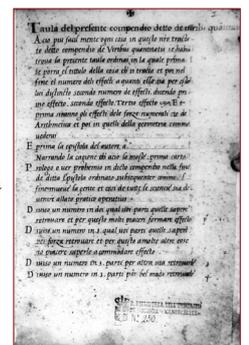
- Luca fu amico di **Leonardo da Vinci**, il quale illustrò la *Divina Proportione*:
- i disegni furono riprodotti a stampa... e oggi realizzati in modelli lignei.



Un'opera manoscritta di Pacioli

De Viribus Quantitatis

- Alla storia dei giochi matematici si collega *De Viribus Quantitatis*, scritta presumibilmente tra il 1496 e il 1508.
- Una copia manoscritta, proveniente dalla biblioteca bolognese di G.G. Amadei, morto nel 1768, si trova presso la Biblioteca Universitaria di Bologna, codice 250.



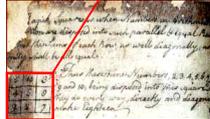
Quadrati magici e giochi matematici

- Le celebri *Propositiones ad acuendos juvenes* di **Alcuino di York** (735–804) sono la prima raccolta di problemi matematici in latino.



un "quadrato magico"!

- Anche il grande filosofo **John Locke** (1632–1704)...
- ... per non parlare di **Goethe** che nel *Faust*...

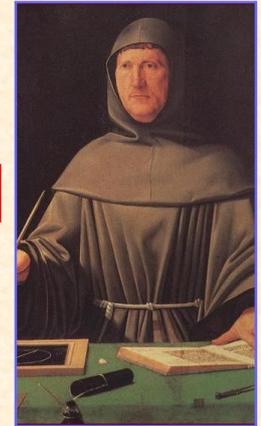


Sommario

Beautiful Minds

Da Luca Pacioli a John Nash

- Introduzione** tra il XV e il XVI secolo
- I quadrati magici** una storia antichissima
- Moltiplicazioni** con risultati sorprendenti
- Un gioco** di divinazione binaria
- La Teoria dei Giochi** Von Neumann e Nash



I "quadrati magici"... partendo dalla Cina, VI sec. a.C.

Lo Shu

4 e 2 sono le spalle
8 e 6 sono i piedi
un 3 sulla sinistra
un 7 sulla destra
porta un 9 sulla testa
è calzato con un 1
mentre un 5 sta nel mezzo



15	4	9	2
15	3	5	7
15	8	1	6
15	15	15	15

I "quadrati magici"... partendo dalla Cina, VI sec. a.C.

- Il più antico quadrato magico è il cinese *Lo Shu*, l'unico quadrato magico classico di ordine 3 (a parte i simmetrici etc.)
- L'interesse per questi "giochi" si diffuse in Occidente con *Malinconia* di **A. Dürer** (1514).
- B. Frenicle de Bessy** (1605–1675) trovò 880 quadrati magici di ordine 4.



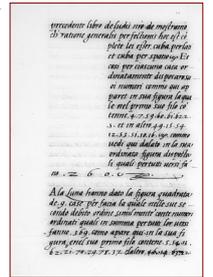
Quadrati magici nel XIV secolo

- L'introduzione dei quadrati magici in Europa è stata attribuita a **M. Moschopoulos** intorno al 1415–1420, ma ci sono manoscritti precedenti (i quadrati di quello bolognese del 1339 sono in Pacioli).
- Alcuni dei quadrati (da 3×3 a 9×9) di Pacioli si ritrovano nel *De occulta philosophia libri tres* di Cornelio Agrippa (Anversa, 1531).



I "quadrati magici" nel De Viribus Quantitatis

- Un problema interpretativo è posto dal "quadrato di Mercurio". Pacioli infatti, in generale, non elenca tutti gli elementi dei quadrati magici (a parte i primi numeri).
- Viene fatto riferimento ai disegni, ma purtroppo il manoscritto è incompleto: lo spazio per i disegni spesso è lasciato vuoto.
- Il "quadrato di Mercurio" è il più difficilmente identificabile tra quelli di Pacioli...



Il misterioso quadrato di Mercurio

- Di questo quadrato magico, di ordine 8, Pacioli fornisce soltanto le prime due righe (e la costante magica, 260):

4	7	59	60	61	62	2	5
49	15	54	12	53	51	10	16

- Esso è dunque incompleto e, come negli altri casi, non è illustrato dal disegno (e non è riportato da Cornelio Agrippa), ma tra i quadrati magici costruiti nel mondo arabo tra il XI e il XII secolo e conosciuti poi in Europa compare il seguente:

Il misterioso quadrato di Mercurio

8+1=9 come in C. Agrippa; nel testo pacioliiano è: 4+5

8	7	59	60	61	62	2	1
49	15	54	12	53	51	10	16
41	42	22	21	20	19	47	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	18	46	45	44	43	23	24
9	55	14	52	13	11	50	56
64	63	3	4	5	6	58	57

Ma occupiamoci ora di un'esperienza riferibile ai quadrati magici molto più vicina noi: Goethe e il Faust...



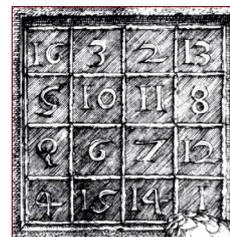
Devi comprendere!
Di Un fai Dieci,
getta via il Due,
uguaglia il Tre,
e sarai ricco.
Crepì il Quattro!
Di Cinque e Sei,
dice la strega,
fai Sette e Otto.
È tutto fatto.
Se Nove è Uno,
Dieci è nessuno.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Questa è la tabellina della strega!

I quadrati magici oggi

- La matematica da Frenicle ha realizzato molti risultati a proposito dei quadrati magici. Importante è...
- ... l'ordine n del quadrato da costruire: esso può essere **dispari** (come per il quadrato *Lo Shu*, $n = 3$) o **pari** (come per quello di Dürer ($n = 4$)).
- Presenteremo una regola per costruire un quadrato magico classico di ordine n dispari (vedremo ad esempio il caso: $n = 5$).



I quadrati magici oggi

- Iniziamo a porre **1** nella casella al centro della prima riga.
- Poi collochiamo gli altri numeri, **in ordine, secondo una "diagonale ascendente"**, rispettando alcune regole.

		1		

I quadrati magici oggi

- Regole per le "diagonali":**
- si va alla colonna successiva in caso di fine colonna;
- si va alla riga precedente in caso di fine riga;
- si va alla casella inferiore in caso di casella occupata.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

E infine... *verifichiamo!*

- Troviamo la costante magica: $65 \rightarrow$
- somma dei numeri da 1 a 25: $25 \times 26 : 2 = 325$
- $325 : 5 = 65$

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

$\uparrow 65$ $\uparrow 65$ $\uparrow 65$ $\uparrow 65$ $\uparrow 65$

La Sagrada Familia...

C'è un particolare interessante nella splendida "facciata della Passione" di Josep Maria Subirachs...

... un quadrato magico non classico di ordine 4 avente la costante magica 33 (mentre quella del quadrato di Dürer era 34).

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

La Sagrada Familia...

- Il passaggio dal quadrato magico classico di ordine 4 a uno come quello della Sagrada Familia può non essere del tutto banale.
- Iniziamo col quadrato magico di **Dürer** (c.m. 34): simmetrizziamolo rispetto all'asse orizzontale, quindi simmetrizziamolo rispetto all'asse verticale.

4	15	14	1
9	6	7	12
5	10	11	8
16	3	2	13

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Per ogni elemento d'angolo ci sono due possibilità, quelle illustrate nelle figure: **Ang+Int e Ang+Lat**

In tutto, dunque, quante possibilità ci sono?

(anche partendo da un elemento di lato si viene a considerarne uno d'angolo).

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

11	12	13	14
21	22	23	24
31	32	33	34
41	42	43	44

Per ogni elemento d'angolo ci sono due possibilità, quelle illustrate nelle figure: **Ang+Int e Ang+Lat**

- Dobbiamo individuare gli elementi da ridurre di 1.
- Si può iniziare dal primo elemento in alto a sinistra: con la soluzione Ang+Int, oppure con la soluzione Ang+Lat.
- Non è stata però questa la soluzione dei costruttori della Sagrada Familia: se si operasse con questi elementi si otterrebbe 0 in angolo...

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

La Sagrada Familia...

- Si può allora iniziare dal primo elemento in alto a destra (con le soluzioni Ang+Int o Ang+Lat), dal primo in basso a sinistra (con entrambe le soluzioni) o **dal primo in basso a destra**. Provatelo voi!
- Quest'ultima, con la soluzione **Ang+Int**, è la scelta operata per il quadrato magico della Sagrada Familia.
- Si noti che la costante magica (33) viene individuata in moltissimi modi diversi!

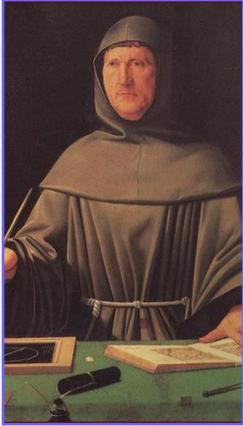
1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

1	14	14	4
11	7	6	9
8	10	10	5
13	2	3	15

Sommario
Beautiful Minds
 Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione**
tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici**
una storia antichissima
- **Moltiplicazioni con risultati sorprendenti**
- **Un gioco**
di divinazione binaria
- **La Teoria dei Giochi**
Von Neumann e Nash



Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Nel “XXXII effecto” Pacioli cerca delle coppie di fattori che portino a prodotti, in forma posizionale decimale, espressi da numeri costituiti da una stessa cifra ripetuta.
- Pacioli considera il caso di sei cifre e si propone di ottenere:
111111, 222222, 333333,
444444, 555555, 666666,
777777, 888888, 999999
- Egli si basa inizialmente sul prodotto:
 $777 \times 143 = 111111$

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Moltiplicando un fattore (Pacioli opera sul secondo, 143) per 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (e dunque scegliendo come secondi fattori quelli riportati in grassetto nella tabella) si otterranno i prodotti sopra elencati:
- $777 \times (143 \times 2) = 777 \times \mathbf{286} = 111111 \times 2 = 222222$
 $777 \times (143 \times 3) = 777 \times \mathbf{429} = 111111 \times 3 = 333333$
 $777 \times (143 \times 4) = 777 \times \mathbf{572} = 111111 \times 4 = 444444$
 $777 \times (143 \times 5) = 777 \times \mathbf{715} = 111111 \times 5 = 555555$
 $777 \times (143 \times 6) = 777 \times \mathbf{858} = 111111 \times 6 = 666666$
 $777 \times (143 \times 7) = 777 \times \mathbf{1001} = 111111 \times 7 = 777777$
 $777 \times (143 \times 8) = 777 \times \mathbf{1144} = 111111 \times 8 = 888888$
 $777 \times (143 \times 9) = 777 \times \mathbf{1287} = 111111 \times 9 = 999999$

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Successivamente Pacioli propone un secondo modo di realizzare lo stesso “effecto”, basato sul prodotto:
 $481 \times 231 = 111111$
- Le due soluzioni di Pacioli esauriscono o meno quelle possibili per il problema di ottenere prodotti di sei cifre uguali?
- La risposta è **no**.
- **Esercizio.** Quante sono le soluzioni possibili per l’esercizio pacioliiano?
- [Risposta: 15, si ricordi la scomposizione in fattori primi e un po’ di calcolo combinatorio...]

Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- Perché Pacioli ha considerato proprio **111111**?
L’“effecto” può essere proposto anche per prodotti costituiti da un numero di cifre ripetute **diverso da 6**.
- Si voglia ottenere un numero di tre, quattro etc. cifre uguali (il caso di due cifre è banale: 11 è un primo). Consideriamo le scomposizioni in fattori primi:
 $111 = 3 \times 37$ $1111 = 11 \times 101$
 $11111 = 41 \times 271$ $1111111 = 239 \times 4649$
- Per un numero di cifre minore di 8 le scomposizioni sono, a parte quella impiegata da Pacioli, costituite da **due soli fattori primi e ciò impedisce di proporre più soluzioni**.

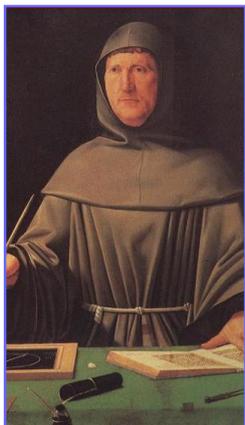
Torniamo a Pacioli: moltiplicazioni con risultati sorprendenti

- La seconda parte del “XXXII effecto” è dedicata ai **numeri “tramezzati”**, cioè espressi in notazione posizionale decimale da espressioni come:
 121212, 232323, 343434 etc.
- L’Autore suggerisce che per ottenere un numero “tramezzato” (ad esempio 121212, costituito dalla “ripetizione” delle cifre 1 e 2, ovvero di 12), si può:

- considerare un numero di decine pari al doppio del numero che si vuole veder ripetuto (ad esempio 12)
- aggiungere a ciò tale numero (dunque: $12 \times 10 \times 2 + 12$)
- moltiplicare il risultato per il numero fisso 481.

Un altro esercizio sui prodotti strani

- **Esercizio.** Giustificate la regola data e generalizzate l'“effecto” trovando altri procedimenti (pensate a scomposizioni di 10101 diverse da 21×481 , osservando che nessuno di questi fattori è primo).
- Non dimenticate di dare una descrizione verbale dei vostri procedimenti, come fa frate Luca!

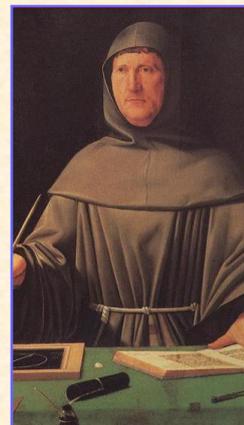


Sommario

Beautiful Minds

Da Luca Pacioli a John Nash

- **Introduzione** tra il XV e il XVI secolo
- **I quadrati magici** una storia antichissima
- **Moltiplicazioni** con risultati sorprendenti
- **Un gioco di divinazione binaria**
- **La Teoria dei Giochi** Von Neumann e Nash



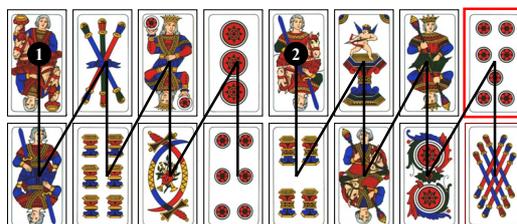
Un gioco di divinazione binaria

- Disponiamo sedici carte da gioco nel modo seguente e chiediamo al partecipante di individuarne una senza indicarla (*De Viribus Quantitatis*, Capitolo LXIX).
- Inquadriamo in rosso la carta scelta (il *settebello*):



Un gioco di divinazione binaria

- Alla **prima** domanda (“in che riga sta la carta?”) il partecipante indica la prima riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:



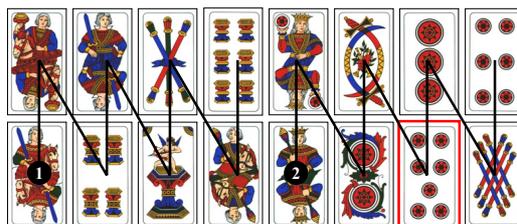
Un gioco di divinazione binaria

Così facendo la carta “pensata” verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1 \pmod{2}$, cioè di posto dispari



Un gioco di divinazione binaria

- Alla **seconda** domanda (“in che riga sta la carta?”) il partecipante indica la seconda riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:



Un gioco di divinazione binaria

Così facendo la carta "pensata" verrà ad essere posizionata in un posto di ordine $k \equiv 1 \pmod{4}$, cioè di posto 1, 5, 9 o 13

Un gioco di divinazione binaria

- Alla **terza** domanda ("in che riga sta la carta?") il partecipante indica ancora la seconda riga.
- Dopo lo spostamento (le linee 1, 2 diventano le nuove righe), la carta sta in una delle posizioni indicate:

Un gioco di divinazione binaria

La carta sarà in un posto di ordine $k \equiv 1 \pmod{8}$, cioè 1 o 9. Alla quarta domanda il partecipante indicherà la riga e la carta sarà individuata!

Un gioco di divinazione binaria

- Per indovinare **una carta su sedici** ci siamo serviti di quattro domande...
...e non è un caso che 16 sia 2^4 .
- Esercizio (facile):** con quante domande (al minimo) posso individuare una carta su un milione?
- E come faccio, praticamente, a fare ciò?
- [Suggerimento: magari fingendo di "aggiungere" qualche carta "in coda" ...]

Sommario

Beautiful Minds

Da Luca Pacioli a John Nash

- Introduzione** tra il XV e il XVI secolo
- I quadrati magici** una storia antichissima
- Moltiplicazioni** con risultati sorprendenti
- Un gioco** di divinazione binaria
- La Teoria dei Giochi** Von Neumann e Nash

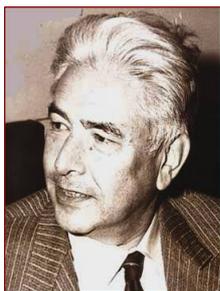
Teoria dei Giochi

Beautiful minds

- Ma i giochi matematici sono davvero soltanto "giochi"?
- Per gli studi sui giochi matematici a **John Nash** (1928) è stato conferito nel 1994 il **Premio Nobel** per l'economia.
- La storia di Nash, la sua genialità abbinata alla schizofrenia, ha interessato e commosso milioni di persone...
- ...ma Nash non è certo l'unico matematico che, dopo Pacioli, si è impegnato nella **Teoria dei Giochi**.

Teoria dei Giochi Beautiful minds

- János (John von) Neumann (1903–1957) fu una figura chiave della Game Theory.
- E non si deve dimenticare il grande Ennio De Giorgi (1928–1996), uno dei più importanti matematici del XX secolo: uno dei risultati per i quali è noto Nash riguarda la regolarità hölderiana delle soluzioni delle equazioni ellittiche del secondo ordine e **oggi viene chiamato Teorema di De Giorgi–Nash** (De Giorgi lo provò nel 1957).



Teoria dei Giochi Beautiful minds

- La Teoria dei Giochi si occupa di situazioni in cui **più agenti sono chiamati a prendere alcune decisioni**.
- Un gioco si dice **non cooperativo** quando l'adozione di strategie è individuale (se n'è occupato Nash).
- Un gioco è **a somma nulla** se la somma delle vincite è zero (ad esempio una squadra vince e l'altra perde): i giochi a due persone e a somma zero svolgono un ruolo fondamentale nella teoria dei giochi.
- Una strategia è detta **minimax** quando **minimizza la massima perdita possibile**.
- Una strategia è detta **maximin** quando **massimizza la minima vincita possibile**.

Notiamo subito che non ci sono strategie dominate da altre (in tale caso potrebbero essere trascurate!)

- Consideriamo ad esempio la seguente matrice (per A):

A \ B	Mossa B-1	Mossa B-2	Mossa B-3	MIN
Mossa A-1	3	2	1	1
Mossa A-2	-1	3	0	-1
Mossa A-3	5	-7	-1	-7
MAX	5	3	1	

Teoria dei Giochi Beautiful minds

- Il caso visto è particolare: i giocatori A e B non hanno alcun interesse a scegliere mosse diverse da A-1 e da B-3 (strategie **pure**, che saranno certamente adottate).
- Ma non è detto che esista sempre un punto di sella corrispondente a strategie pure.
- Il **teorema di minimax** di Von Neumann afferma che **esiste sempre un punto di sella, ma non è detto che esso si trovi nell'ambito di strategie pure**. Bisogna considerare anche le **strategie miste**.
- Una strategia si dice mista se è rappresentata da una definita **probabilità** di scegliere una mossa o un'altra tra quelle a disposizione.

Teoria dei Giochi Beautiful minds

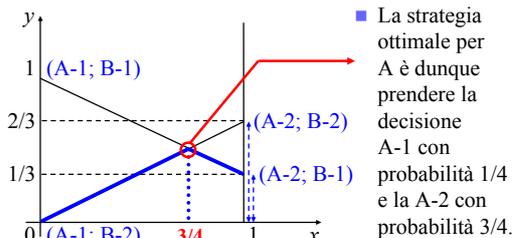
- Consideriamo un esempio di gioco che porterà all'adozione di una strategia mista.
- Non c'è punto di sella**: cosa faranno i giocatori?

A \ B	Mossa B-1	Mossa B-2	MIN
Mossa A-1	1	0	0
Mossa A-2	1/3	2/3	1/3
MAX	1	2/3	

valore inferiore del gioco: 1/3
valore superiore del gioco: 2/3

Teoria dei Giochi Beautiful minds

- Per stabilire il **comportamento ottimale per A**, in un grafico si costruiscono le linee che rappresentano gli effetti delle mosse di A rispetto alle reazioni di B.



Teoria dei Giochi Beautiful minds

- L'**equilibrio di Nash** (1949, Nash era ancora uno studente a Princeton) riguarda giochi non cooperativi:
- sotto certe condizioni, **esiste un punto di equilibrio** che si ottiene quando ogni partecipante sceglie la propria mossa massimizzando la sua funzione di retribuzione **supponendo che gli altri giocatori non varino i comportamenti a motivo della sua scelta.**



Teoria dei Giochi Beautiful minds

Il Dilemma del Prigioniero
(Albert W. Tucker)

- Ciascuno dei due giocatori, i prigionieri A e B, ha due possibili scelte: **confessare o non confessare.**
- Se **uno solo dei due confessa**, viene perdonato e l'altro viene condannato a 8 anni di carcere.
- Se **entrambi confessano**, i prigionieri vengono entrambi condannati a 6 anni di carcere.
- Se **nessuno dei due confessa**, vengono condannati entrambi a 2 anni di carcere.
- È un gioco a somma non nulla e i giocatori scelgono la propria strategia simultaneamente, senza conoscere l'azione scelta dall'altro ("**non si parlano**").

Teoria dei Giochi Beautiful minds

Questa soluzione minimizzerebbe gli anni "complessivi" di prigione!

- L'esito (in anni di prigione) è così sintetizzato:

Prigioniero B		
Prigioniero A	confessa	non confessa
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

- Riassumendo, ciascuno:
 - se *confessa* rischia da 0 a 6 anni di carcere
 - se *non confessa* rischia da 2 a 8 anni di carcere

minimax

Per B, si tracciano frecce analoghe lungo le righe. I punti verso cui convergono le frecce sono gli "equilibri di Nash"

- Per trovare il punto di equilibrio di Nash...

Prigioniero B		
Prigioniero A	confessa	non confessa
confessa	A=6, B=6	A=0, B=8
non confessa	A=8, B=0	A=2, B=2

- ...si può usare il **metodo del flusso di frecce**, che qui vediamo applicato al nostro gioco rappresentato dalla matrice 2x2.

Lo stesso guaio: le superpotenze... "non si parlano"!

- Diamo infine un'occhiata a questo "gioco", dove gli esiti quantificano i problemi di spesa e di sicurezza:

Superpotenza B		
Superpotenza A	si dota di armi nucleari	non si dota di armi nucleari
si dota di armi nucleari	A=6, B=6	A=0, B=8
non si dota di armi nucleari	A=8, B=0	A=2, B=2

- Dunque, ragionando in termini "freddi", le due Superpotenze in gioco continueranno ad armarsi...
- **Ma questo, purtroppo, non è un gioco.**

Grazie a tutti
dell'attenzione

e in bocca al lupo da un
ex-allievo
del "Leonardo da Vinci"!

Grazie a
Furio Honsell,
(ex) Magnifico Rettore
dell'Università di Udine

