

Ferrara, 20–22 novembre 2008,
VIII Convegno SISM

Seguendo Rafael Bombelli
Un'introduzione didattica degli immaginari



L'ALGEBRA OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Divisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se solo o con la perfetta
aggiuta del maestro o dell'Algebraista.
Contra l'usato copioso delle matricole, che
in ella si contengono.
Pulita hanc in luce a beneficio della Didattica di
tutta l'Europa.

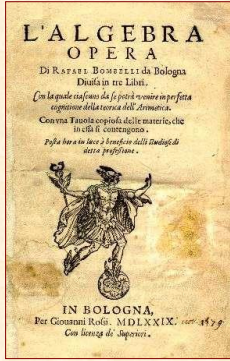
IN BOLOGNA,
Per Giovanni Rossi. MDLXXIX. 1679. 48 p.
Con licenza de' Superiori.

Per ricordare
Maria Elena Vincenzi Notaro

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario
Matematica e interpretazione

- **Il circolo ermeneutico**
Linguaggi da interpretare
- **Presupposizioni**
Bombelli e la didattica
- **Un'analisi semiotica**
All'inizio della catena
- **Riflessioni conclusive**
L'ultima parola?



Comprensione... circolare

- Friedrich Schleiermacher (1768-1834) segnalò un «circolo apparente, per il quale il particolare può comprendersi solo partendo dall'universale di cui è parte e viceversa».
- Scrisse inoltre (*Hermeneutik*, 144/455):
«Partendo dall'inizio di un'opera e progredendo a poco a poco, la comprensione graduale di ogni singolo elemento e delle parti della totalità che a partire da essa si organizzano è sempre soltanto qualcosa di provvisorio. [...] Solo che quanto più avanziamo tanto più tutto ciò che precede viene anche illuminato da ciò che segue».



Il circolo ermeneutico e la filosofia di Heidegger

- Dunque, nota Matthias Jung, «a partire dal circolo chiuso si giunge a una spirale aperta, costituita da ripetuti cammini interpretativi che devono essere sempre ritenuti passibili di una nuova revisione».
- Il problema fu ripreso in termini decisivi da **Martin Heidegger (1889-1976)**: «l'interpretazione deve sempre muoversi nel compreso e nutrirsi di esso [...] e l'importante non sta nell'uscir fuori dal circolo, ma nello starvi dentro nella maniera giusta».

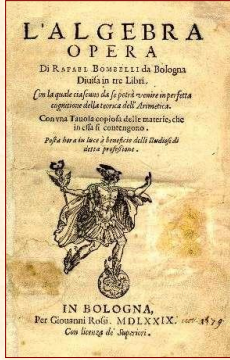


Dalle pre-supposizioni torniamo (verso) la matematica

- Queste considerazioni capovolgono una posizione talvolta assunta secondo la quale la presenza di una **“pre-supposizione”** va considerata negativamente, (come scarsa disponibilità ad una valutazione serena).
- Proprio le pre-supposizioni, conferma Giovanni Reale (nell'Introduzione a *Verità e Metodo*), sono invece «ciò che mette in moto il circolo; e la scientificità della ricerca si realizza nella misura in cui i pre-concetti vengono via via rinnovati e sostituiti nel corso del lavoro di interpretazione, [...] sempre più in sintonia con l'oggetto che viene indagato».

Sommario
Matematica e interpretazione

- **Il circolo ermeneutico**
Dal circolo alla spirale
- **Presupposizioni**
Bombelli e la didattica
- **Un'analisi semiotica**
All'inizio della catena
- **Riflessioni conclusive**
L'ultima parola?



Un esempio didattico: l'introduzione di un... "errore"

- L'introduzione dei numeri immaginari, nella scuola secondaria, è un momento importante del curriculum.
- All'allievo, già a lungo bersagliato da regole che impediscono di estrarre la radice quadrata di un numero negativo, viene improvvisamente chiesto di accettare la presenza, nel proprio mondo matematico, di un "oggetto" nuovo, la preoccupante "radice quadrata di -1 ", alla quale viene assegnata la denominazione i .
- Questa fase del percorso di apprendimento è delicata e può essere fonte di incoerenze nel pensiero degli studenti.

Uno sguardo alla storia Le equazioni di terzo grado

- La risoluzione delle equazioni di terzo (e quarto) grado viene ricondotta all'opera di due studiosi italiani del Rinascimento, **Gerolamo Cardano**, autore di *Ars Magna* (1545), e **Nicolò Fontana**, detto **Tartaglia**, che scrisse *Quesiti et invenzioni diverse* (1546).
- La contesa per la priorità dell'introduzione del procedimento è celebre; ma il primo a trovare una tecnica risolutiva fu probabilmente (1515) il bolognese **Scipione del Ferro**, il quale morì senza rendere pubblica la propria scoperta.
- Cardano, del Ferro e Tartaglia contribuirono, in modi diversi, alla messa a punto di tale procedimento.

Equazioni di III grado nel XV secolo: la poesia "algebraica" di Tartaglia

- Quando che 'l cubo con le cose appresso se agguaglia à qualche numero discreto trovau dui altri differenti in esso.
- Da poi terrai questo per consueto che 'l lor prodotto sempre sia uguale al terzo cubo delle cose neto.
- El residuo poi suo generale delli lor lati cubi ben sottratti varrà la tua cosa principale.

$$x^3 + px = q$$

$$p > 0, q > 0$$

$$q = u - v$$

$$uv = (p/3)^3$$

$$x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

Questa semplificazione è delicata

L'Algebra di Bombelli

- La semplificazione dei radicali doppi fu studiata in alcuni casi particolari da **Rafael Bombelli** (1526-1573).
- Bombelli, bolognese (è stato trovato il certificato di battesimo a Borgo Panigale), pubblicò il proprio capolavoro, *Algebra*, nel 1572-1579.



"Più di meno" e "meno di meno"

Più uia più di meno, fa più di meno.
Meno uia più di meno, fa meno di meno.
Più uia meno di meno, fa più di meno.
Meno uia meno di meno, fa meno di meno.
Più di meno uia più di meno, fa meno.
Più di meno uia meno di meno, fa più.
Meno di meno uia più di meno, fa meno.
Meno di meno uia meno di meno, fa meno.

$$pdm = i \quad mdm = -i$$

- Queste "regole" si trovano a pagina 169 di *Algebra*.
- Come le possiamo interpretare modernamente?

Un esempio di risoluzione alla Bombelli-Cardano

- La risoluzione dell'equazione modernamente scritta:

$$x^3 = 15x + 4$$
 coinvolge la radice quadrata di $(q/2)^2 - (p/3)^3 = -121$ e si conclude con la somma di radicali doppi:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$
- Si prova quindi, sviluppando i cubi dei binomi, che è possibile scrivere:

$$2 + 11i = (2+i)^3 \quad \text{e} \quad 2 - 11i = (2-i)^3$$
- Dunque la soluzione **reale** (ovvero **complessa con parte immaginaria nulla**) dell'equazione proposta è:

$$x = (2+i) + (2-i) = 4$$

Un esempio di risoluzione alla Bombelli-Cardano

- Questa è la risoluzione dell'equazione ora esaminata che si trova nell'*Algebra* di Bombelli, a p. 294.

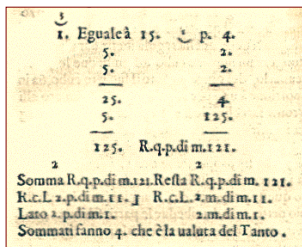
$$x^3 = 15x + 4$$

$$x^3 = px + q$$

$$(q/2)^2 - (p/3)^3 = -121$$

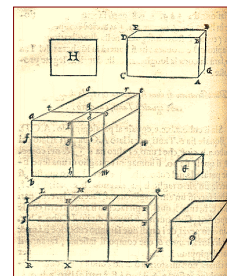
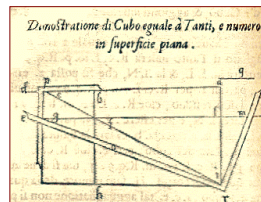
$$x = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

$$x = (2+i) + (2-i) = 4$$



Un esempio di risoluzione alla Bombelli-Cardano

- ... seguita (e confermata) dalle "costruzioni in linee", sia tridimensionale, che bidimensionale.



Un esempio di risoluzione alla Bombelli-Cardano

- Il procedimento precedente non si svolge interamente nell'ambito dei reali: **il risultato ottenuto, tuttavia, è reale, come i coefficienti dell'equazione data.**
- Una verifica della soluzione $x = 4$ nell'equazione $x^3 = 15x + 4$ (che porta all'identità: $64 = 15 \cdot 4 + 4$) è dunque possibile senza uscire dall'ambito dei reali.
- Diversa sarebbe la situazione dell'equazione: $x^2 = -1$. **Il ruolo degli immaginari, qui, è rilevante:** il risultato dell'equazione (a coefficienti reali) è non reale e la sua accettazione dopo una verifica diretta richiede la considerazione di numeri immaginari.

Scheda A

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x = \pm \sqrt{-1}$$

Scheda B

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$$

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}) = 4$$

Una ricerca sperimentale si è svolta in due fasi:

- nella **prima fase** sono stati esaminati 97 studenti di III (16-17 anni) e di IV liceo scientifico (17-18 anni). Gli allievi conoscevano i procedimenti risolutivi di equazioni di II grado e di equazioni riconducibili ad equazioni di II grado mediante opportune posizioni, ma *non* i numeri immaginari.
- Agli studenti sono state sottoposte (una dopo l'altra, nell'ordine!) le schede, A e B, con due risoluzioni...

Dalla storia alla didattica della matematica

- Soltanto il 2% del campione considerato ha affermato di accettare la risoluzione della **scheda A** (il 92% ha affermato di non accettarla; incerto il 6%).
- Immediatamente dopo, la risoluzione della **scheda B** è stata accettata dal 54% degli allievi (il 35% ha affermato di non accettarla; incerto l'11%).
- Dunque **la considerazione di quantità immaginarie nei passaggi del procedimento risolutivo di un'equazione, ma non nel risultato, è talvolta accettata dagli allievi.**
- La considerazione riservata al risultato è diversa da quella riservata ai passaggi intermedi...

Dalla storia alla didattica della matematica

- Il contratto didattico assegna notevole importanza alla **determinazione dell'esatto risultato finale**, e tale aspetto sembra far sì che nella stessa espressione del **risultato** dell'esercizio (la scrittura della soluzione dell'equazione) sia **assai pesante l'influenza delle "regole" precedentemente fissate.**
- Nei **passaggi intermedi**, invece, l'azione di regole e di proibizioni è meno coercitiva e una parte degli allievi si sente autorizzata a considerare non illecita la presenza di espressioni insolite e "rischiose", dopo aver controllato la correttezza del risultato finale.

La seconda fase della ricerca didattica

- La seconda fase della ricerca didattica si è avvalsa dei risultati di un test proposto a 73 studenti di III (allievi di 16–17 anni) e di IV Liceo scientifico (allievi di 17–18 anni). Per quanto riguarda il programma svolto, essi erano nelle stesse condizioni in cui si trovavano gli studenti coinvolti nella ricerca precedentemente citata.
- A ciascun allievo sono state proposte le schede utilizzate nella prima fase della ricerca, ma in ordine inverso: **prima la scheda B e poi la scheda A.**

La seconda fase della ricerca didattica

- Prima scheda esaminata (B, relativa al III grado)**

Tipologia di risposte	Allievi	Percentuale
“Accettabile”	30	41%
“Non accettabile”	18	25%
Incerti	25	34%
- Seconda scheda esaminata (A, relativa al II grado)**

Tipologia di risposte	Allievi	Percentuale
“Accettabile”	13	18%
“Non accettabile”	48	66%
Incerti	12	16%

La seconda fase della ricerca didattica

- I dati sono analoghi a quelli ottenuti nella ricerca precedente (numerosi, sono però gli incerti).
- Una parte di allievi (il **18%**) ha accettato la presenza di nell’equazione di II grado (esaminata **dopo** quella di III), mentre soltanto il **2%** del campione aveva accettato tale presenza nella precedente esperienza.
- In particolare, interessante possono essere i dati: su 30 allievi che hanno risposto *accettabile* nella sc. B nella sc. A 13 (43% su 30) hanno risposto *accettabile* 14 (47% su 30) hanno risposto *non accett.* 3 (10% su 30) hanno dato risposte incerte (o non hanno risposto)

La seconda fase della ricerca didattica

- Sono stati intervistati singolarmente i 14 studenti (11 della III e 3 della IV) che hanno accettato la risoluzione nella sc. B ma non quella nella sc. A: “perché accetti la presenza della radice di -1 nella sc. B e non accetti la presenza di nella sc. A?”
- 10 allievi (**71%** su 14) hanno notato, in vari modi, che **il risultato** dell’equazione di terzo grado (scheda B) è reale, mentre quello dell’equazione di secondo grado (scheda A) non è reale;
- 2 allievi hanno affermato di aver considerato gli esempi separatamente;
- 2 allievi non hanno fornito giustificazioni.

La seconda fase della ricerca didattica

si tratta di una *presupposizione?*

- Alle considerazioni degli studenti si affiancano e talvolta **si sovrappongono gli effetti determinati dalle clausole del contratto didattico.**
- I risultati del test indicano che un percorso di apprendimento potrebbe aver avuto luogo **in alcuni casi, sebbene la percentuale sia ancora bassa.**
- Assume un ruolo rilevante la constatazione seguente: **la considerazione della radice di -1 come “numero” può non essere causa di difficoltà particolari**
- Essa consente di trovare una radice di un’equazione di terzo grado proposta: **questa sua efficacia viene ad essere una “garanzia” della sua plausibilità.**

Sommario Matematica e interpretazione

- Il circolo ermeneutico**
Dal circolo alla spirale
- Presupposizioni**
Bombelli e la didattica
- Un’analisi semiotica**
All’inizio della catena
- Riflessioni conclusive**
L’ultima parola?



Peirce e la semiosi illimitata Due diverse interpretazioni

- Esaminiamo un esempio:

Peirce e la semiosi illimitata Due diverse interpretazioni

- Qual è... l'oggetto del secondo segno? L'oggetto originale o l'oggetto originale in relazione con il primo segno?

I segni e l'oggetto

- L'oggettualizzazione delle procedure (Giusti, 1999) ci consente di ridimensionare l'importanza di un "oggetto matematico reale" – anche se un oggetto resta necessario nell'impostazione di Peirce.
- Si porrebbe però il problema del "primo segno" (ovvero dei **primi segni**): quale segno **non può essere considerato interpretante di segni precedenti?**
- "L'assenza" può essere considerato un segno, sebbene *sui generis*.
- Ciò sarebbe influenzato da importanti elementi:
 - la teoria in cui si opera
 - i soggetti coinvolti (studenti, insegnante)
 - il contesto socio-culturale

La radice del processo di semiosi


- Il punto di partenza della catena è una sorta di "oggetto–segno–interpretante", senza una precisa scansione cronologica: è un **atteggiamento** (*habit*) collegato con l'assenza di un oggetto, una **procedura** (che sarà) **oggettualizzata** ovvero, inizialmente, **da oggettualizzare**.
- Proponiamo un esempio riferito all'introduzione di *i* che avvenne, come sopra ricordato citando **Bombelli**, in quanto consentì di trovare una radice reale di equazioni di terzo grado (e come abbiamo visto, talvolta l'itinerario "storico" può riflettersi in percorsi di apprendimento!).

La radice del processo di semiosi

- Quanto ora ipotizzato non esaurisce l'evoluzione dell'"oggetto": né storicamente, né didatticamente.
- Con il progredire della catena semiotica si sviluppa la **componente formale**; l'oggetto può insomma assumere caratteristiche di rigore, diventare propriamente "**matematico**" (e questo è un aspetto didatticamente rilevante).
- Parallelamente si evolvono **l'ambiente sociale, il contesto culturale...**

Sommario
Matematica e interpretazione

- **Il circolo ermeneutico**
Dal circolo alla spirale
- **Presupposizioni**
Bombelli e la didattica
- **Un'analisi semiotica**
All'inizio della catena
- **Riflessioni conclusive**
L'ultima parola?



Verso una "conclusione"

- Tuttavia, a nostro avviso, considerazioni come queste non devono e non possono avere la pretesa di essere conclusive...
- Chiudiamo dunque la nostra riflessione citando la serena espressione con cui **Gadamer** chiuse il poscritto all'edizione 1972 del proprio *Verità e metodo*:
«un cattivo ermeneuta è colui che si illude di dover avere l'ultima parola»



A tutti grazie dell'attenzione



Grazie a Dick Rorty (1931–2007)

