JIIA.it Journal for the Intercultural and Interdisciplinary Archaeology (2003)
http://www.jiia.it

Problemi di secondo grado nella matematica antica

GIORGIO T. BAGNI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

INTRODUZIONE

L'eredità della cultura classica, e segnatamente della grande speculazione razionale sviluppata nel mondo ellenico, è fondamentale per la comprensione dell'evoluzione storica della matematica. Nel presente lavoro ci occuperemo di alcuni aspetti caratteristici della matematica antica che hanno influenzato in termini significativi l'algebra moderna.

Un tentativo di determinazione della data di nascita per la matematica sarebbe impresa delicata, così come difficile se non impossibile sarebbe collocare cronologicamente gli esordi di ogni forma di riflessione razionale, di espressione (per tentare una simile collocazione sarebbe inoltre indispensabile definire con chiarezza gli ambiti entro i quali individuare la *matematica* vera e propria, definizione tutt'altro che semplice). Possiamo tuttavia affermare che la matematica "come disciplina organizzata e indipendente non esisteva prima dell'entrata in scena dei Greci del periodo classico, compreso fra il 600 ed il 300 a.C." (Kline, I, 1991, p. 7). Ciò appare chiaro particolarmente se consideriamo il significato più elevato del termine *matematica*, come impianto teorico formalizzato ed autonomo[1].

[1] Storicamente, però, sarebbe indispensabile analizzare anche le molte importanti forme di matematica pre-ellenica che, sebbene in chiave formalmente più debole e contenutisticamente ancora legata alle esigenze pratiche, esprimono la tensione dell'uomo verso una più esatta e consapevole comprensione della realtà. Nella "Cronologia della matematica", riportata da C.B. Boyer in appendice alla sua *Storia della matematica*, la prima data riportata è il 50000 a.C., riferita all'uomo di Neanderthal: dunque la traccia di un primo, elementare conteggio comparve nell'avventura dell'Uomo fin dai tempi più remoti (Boyer, 1982). Così G. Loria descrive le prime manifestazioni umane riconducibili alla matematica: "Le transazioni commerciali fra individui e fra popoli differenti, conseguenze inevitabili dell'umano consorzio, e, d'altro lato, l'aspirazione di sottoporre a misura l'universo dei fenomeni di cui il mondo è teatro e il genere umano spettatore, nella segreta speranza di determinarne il meccanismo e scoprirne le forze motrici, condussero, con un irresistibile imperativo categorico, l'uomo, non appena uscito dallo stato di barbarie, a foggiarsi tanto un'embrionale geometria quanto un'infantile aritmetica. Perciò è lecito affermare, senza tema di essere tacciati di esagerazione, che la storia delle matematiche comincia con la storia della civiltà" (Loria, 1929-1933, p. 1).

Con l'irrefrenabile tensione verso l'astratto, propria del mondo filosofico - matematico ellenico, la matematica da semplice strumento divenne fine autonomo e primario, disciplina indipendente del pensiero umano. L'attività dei matematici attraverserà quindi tutta la storia della cultura, in tutte le regioni, in tutti i continenti: l'uomo sarà, nella sua forma più alta di espressione, pensiero; il pensiero diventerà subito astrazione; e l'astrazione, matematica.

Nel presente lavoro ci occuperemo di una classe di problemi che, in tradizioni culturali ed i periodi storici diversi, ebbero un interesse rilevante: i problemi algebrici di secondo grado.

Premettiamo che lo stesso uso del termine *algebra* riferito a periodi storici precedenti la feconda stagione della matematica araba dovrebbe essere prudente. Fu infatti Mohammed Ibn Musa Al Kuwarizmi (VIII secolo), la cui opera più significativa è *Al jabr wal mukabalah*, a dare origine al termine algebra (da *Al jabr*); nel lavoro ricordato il matematico persiano sviluppò una chiara teoria delle equazioni, particolarmente di quelle di secondo grado (sembra però che il procedimento generale per la soluzione delle equazioni di secondo grado sia da considerare di derivazione indiana: D'Amore & Matteuzzi, 1976, pp. 90-91).

Tuttavia la presenza di procedimenti che possiamo definire algebrici è riscontrabile anche ben prima dell' VIII secolo; R. Franci e L. Toti Rigatelli così descrivono le prime manifestazioni dell'algebra: "Dal punto di vista dei concetti, le origini dell'algebra si possono far risalire a tre fonti diverse: alla matematica siriaco-babilonese, alla matematica indiana, alla matematica greca ed in particolare all'opera di Diofanto (III secolo d.C.). La recente interpretazione (prima metà del XX secolo) di O. Neugebauer di tavolette di terracotta scritte in caratteri cuneiformi ci permette di affermare che, già verso il 2000 a.C., i Babilonesi erano in grado di risolvere equazioni particolari di secondo e terzo grado ed avevano conoscenza di procedimenti che oggi chiamiamo algebrici" (Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 8).

L'ALGEBRA BABILONESE

Il titolo del presente paragrafo è volutamente provocatorio: sarebbe infatti azzardato affermare senza ulteriori precisazioni che una forma sufficientemente progredita di algebra nacque tra il Tigri e l'Eufrate (Bourbaki, 1963), almeno se consideriamo la necessità di un'efficace espressione simbolica delle tecniche algebriche[2]. Tuttavia i Babilonesi erano in grado, come vedremo, di risolvere equazioni di grado anche superiore al primo e sistemi di equazioni di primo grado in due incognite.

---

[2] Per evitare malintesi, ricordiamo che non esisteva alcuno strumento simbolico completo nell'algebra babilonese: soltanto in qualche caso, e dunque senza alcuna sistematicità, qualche incognita veniva indicata mediante simboli speciali; in generale, le quantità incognite erano concretamente indicate dai termini *lunghezza* (per indicare incognite di primo grado), *area* (per indicare incognite di secondo grado), *volume* (per indicare incognite di terzo grado); ma i matematici babilonesi sembrano consapevoli del valore esclusivamente indicativo di tali termini: infatti nessuno scrupolo impediva loro di addizionare ad esempio lunghezze ed aree, aree e volumi etc. (Bagni, 1996, I).

Presso i Babilonesi non troviamo uno studio sistematico e generale delle equazioni né alcuna giustificazione esplicita dei metodi applicati: si procedeva dunque esaminando i singoli casi, e solo raramente, nella risoluzione di equazioni, i Babilonesi si mostrarono in grado di cogliere legami concettuali ed analogie significative tra i problemi introdotti e risolti.

Frequenti erano gli esempi di impiego di equazioni di secondo grado per la risoluzione di problemi di vario tipo (Smith, 1959; Franci & Toti Rigatelli, 1979, pp. 28-29; Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 161); in particolare, venivano spesso considerate questioni come quella di "determinare due numeri conoscendone la somma s ed il prodotto p" con l'equazione (modernamente scritta):

$$x^2-sx+p = 0$$

Per ridurre un'equazione di secondo grado del tipo:

$$ax^2-bx+c = 0$$

ad un'equazione scritta nella forma precedente, i Babilonesi ricorrevano alla sostituzione che modernamente può indicarsi con:

$$ax = X \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \frac{X}{a}$$

mediante la quale si ottiene:

$$a\cdot\left(\frac{X}{a}\right)^2 - b\cdot\frac{X}{a} + c = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad X^2-bX+ac = 0$$

Riportiamo ora (sempre in notazione moderna) un esempio di risoluzione babilonese di un'equazione di secondo grado: sia necessario trovare i due numeri a, b sapendo che la loro somma $a+b$ è 8 ed il loro prodotto ab è 12. Le posizioni sono:

$$a = 4+\delta \qquad \wedge \qquad b = 4-\delta$$

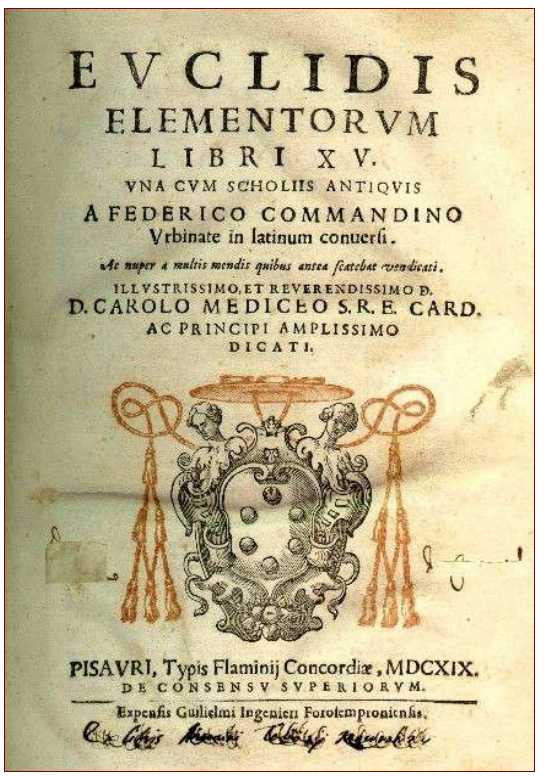
(infatti: $a+b = 8$) ed otteniamo, considerando la radice positiva:

$$(4+\delta)\cdot(4-\delta) = 12 \quad \Rightarrow \quad 16-\delta^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad \delta^2 = 4$$
$$\Rightarrow \quad \delta = 2 \quad \Rightarrow \quad a = 6 \ \wedge \ b = 2$$

Possiamo dunque notare che la risoluzione di equazioni presso i Babilonesi viene a rappresentare un esordio ricco e stimolante per la storia dell'algebra (Bagni, 1996, I); nota però S. Maracchia che purtroppo tale esordio non fu seguito da un'altrettanto positiva evoluzione: "Dopo un inizio promettente per uno sviluppo autonomo dell'algebra nelle civiltà pre-elleniche mostrato da straordinarie risoluzioni di problemi di secondo grado presenti in tavolette sumero-babilonesi, questo importante ramo della matematica si viene a trovare poi per vari secoli subordinato alla più potente geometria. Nella civiltà ellenica ed ellenistica, infatti, forse perché alcuni problemi che l'aritmetica non era riuscita a risolvere erano stati risolti dalla geometria assai semplicemente, o forse per l'evidenza e la bellezza maggiori con cui questa colpiva la mentalità apollinea dei Greci, l'algebra si può dire che scompaia, rivestita da orpelli e fronzoli geometrici che, se pur consentivano la risoluzione di semplici problemi di primo e di secondo grado, non ne permisero uno sviluppo successivo" (Maracchia, 1979, p. 31).

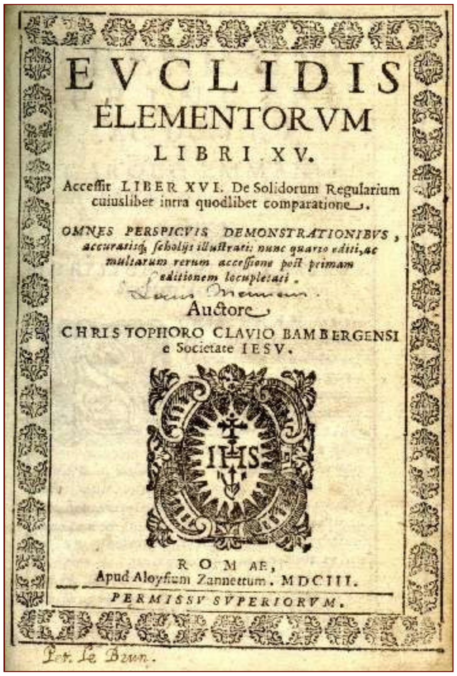
L'ALGEBRA GEOMETRICA GRECA

Gli *Elementi* euclidei sono una delle opere più importanti della storia della matematica. Eppure la vita di Euclide di Alessandria è quasi sconosciuta; lo stesso riferimento geografico attribuito al sommo geometra deriva da un'annotazione (di autenticità incerta) presente nella *Collezione matematica* di Pappo (III-IV sec.), dove si accenna alla presenza di alcuni allievi di Euclide in Alessandria.

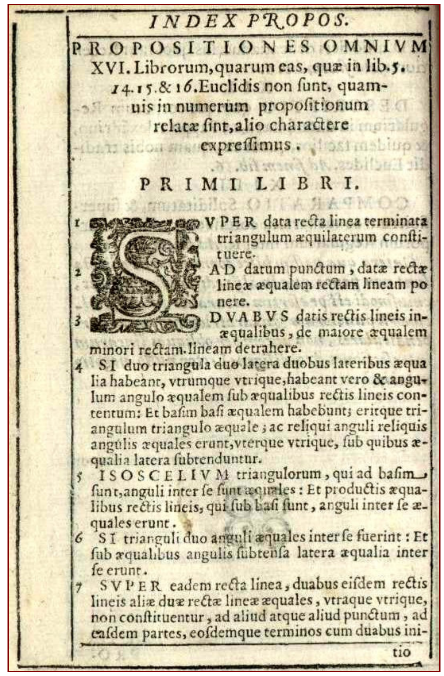


Il frontespizio degli *Elementi* euclidei commentati da Commandino (Pesaro, 1619)

Euclide scrisse gli *Elementi* intorno al 300 a.C.; in tale opera troviamo la presentazione elegante e completa della geometria e dell'aritmetica elementare del mondo greco. I libri I-VI sono dedicati alla *geometria piana*; i libri VII-IX sono dedicati alla *teoria dei numeri*; il libro X classifica le *grandezze incommensurabili*; i libri XI-XIII sono infine dedicati alla *geometria solida*. Il II libro degli *Elementi* è dedicato all'*algebra geometrica*, un settore elegante ed originale della matematica greca che merita un'adeguata illustrazione, anche per le sue ampie potenzialità didattiche[3].



EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
Acceſſit LIBER XVI. De Solidorum Regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.
OMNES PERSPICVIS DEMONSTRATIONIBVS, accuratiſq; ſcholijs illuſtrati: nunc quarto editi, ac multarum rerum acceſſione poſt primam editionem locupletati.
Auctore
CHRISTOPHORO CLAVIO BAMBERGENSI
e Societate IESV.
IHS
ROMAE,
Apud Aloyſium Zannettum. MDCIII.
PERMISSV SVPERIORVM.
Pet. Le Brun.



INDEX PROPOS.
PROPOSITIONES OMNIVM XVI. Librorum, quarum eas, quæ in lib. 5. 14. 15. & 16. Euclidis non ſunt, quamuis in numerum propoſitionum relatæ ſint, alio charactere expreſſimus.
PRIMI LIBRI.
1 SVPER data recta linea terminata triangulum æquilaterum conſtituere.
2 AD datum punctum, datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.
3 DVABVS datis rectis lineis inæqualibus, de maiore æqualem minori rectam lineam detrahere.
4 SI duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, vtrumque vtrique, habeant vero & angulum angulo æqualem ſub æqualibus rectis lineis contentum: Et baſim baſi æqualem habebunt; eritque triangulum triangulo æquale; ac reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, vterque vtrique, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur.
5 ISOSCELIVM triangulorum, qui ad baſim ſunt, anguli inter ſe ſunt æquales: Et productis æqualibus rectis lineis, qui ſub baſi ſunt, anguli inter ſe æquales erunt.
6 SI trianguli duo anguli æquales inter ſe fuerint: Et ſub æqualibus angulis ſubtenſa latera æqualia inter ſe erunt.
7 SVPER eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, vtraque vtrique, non conſtituentur, ad aliud atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdemque terminos cum duabus initio

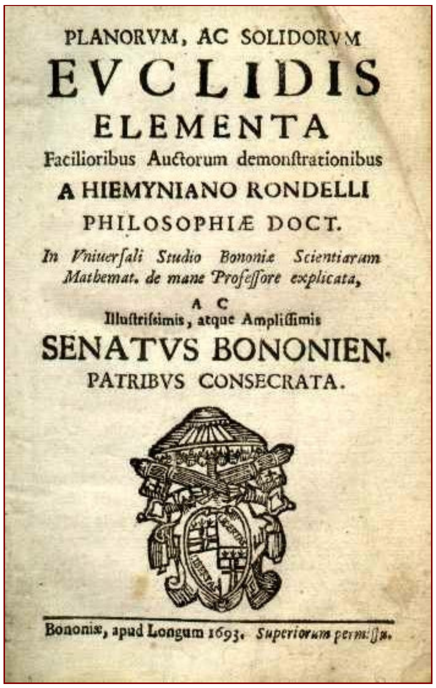
Il frontespizio e una pagina degli *Elementi* commentati da Clavio (Roma, 1603)

L'idea centrale che caratterizza l'algebra geometrica è semplice ed intuitiva: consiste nella rappresentazione dei numeri reali attraverso grandezze

[3] Per comprendere il percorso ideale portò i Greci a servirsi dell'algebra geometrica è necessario approfondire i concetti di numero e di grandezza nella matematica greca, e in particolare ricordare che i Greci rifiutavano di considerare gli irrazionali come numeri veri e propri: ad esempio, i seguaci di Pitagora accettavano come numeri esclusivamente gli interi positivi. Eudosso di Cnido (400-347? a.C.) è la figura centrale a questo proposito: "Ciò che Eudosso ottenne fu di evitare di introdurre come numeri i numeri irrazionali" (Kline, 1991 I, p. 60), sottolinea M. Kline; e "la soluzione data da Eudosso al problema della trattazione delle lunghezze incommensurabili o numeri irrazionali ribaltò completamente l'atteggiamento dei matematici greci precedenti" (Kline, 1991, I, p. 61). La concezione numerica, presso i Greci, restò infatti limitata alla sola considerazione dei razionali assoluti, mentre la corrispondente impostazione geometrica raggiunse una pregevole completezza. Questa situazione portò dunque alla svolta definitiva della matematica greca: la prevalenza netta della geometria sullo studio delle questioni connesse al numero (Giusti, 1983, pp. 46-48; Giusti, 1993).

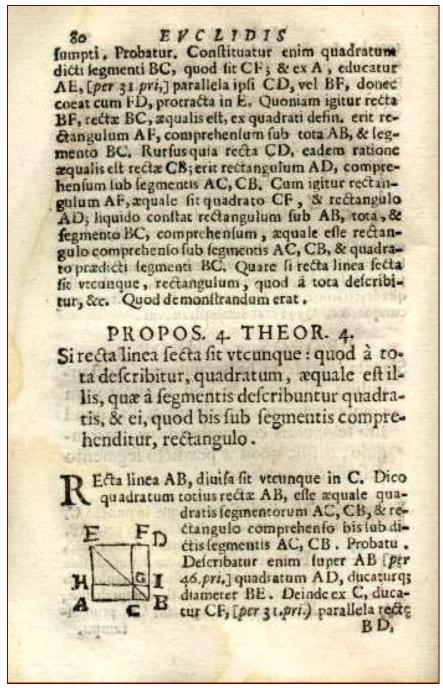
geometriche (ad esempio segmenti). Le operazioni possono quindi essere visualizzate mediante figure: se due numeri sono identificati con due segmenti, il loro prodotto può essere naturalmente fatto corrispondere ad un rettangolo; un'uguaglianza di prodotti viene così ricondotta all'equiestensione dei corrispondenti rettangoli (van der Waerden, 1983; Bagni, 1996, I)[4].

Il II libro degli *Elementi* contiene quattordici proposizioni; le dimostrazioni delle prime dieci hanno carattere visivo, ovvero devono essere direttamente desunte dall'osservazione delle figure. Dunque tali proposizioni risultano indipendenti l'una dall'altra: ogni figura viene di v olta in volta riconsiderata e la sua interpretazione non richiede la conoscenza dei risultati precedenti.



PLANORVM, AC SOLIDORVM
EVCLIDIS
ELEMENTA
Facilioribus Auctorum demonſtrationibus
A HIEMYNIANO RONDELLI
PHILOSOPHIÆ DOCT.
In Vniuerſali Studio Bononiæ Scientiarum Mathemat. de mane Profeſſore explicata,
A C
Illuſtriſsimis, atque Ampliſſimis
SENATVS BONONIEN.
PATRIBVS CONSECRATA.

Bononiæ, apud Longum 1693. *Superiorum permiſſu.*



80 *EVCLIDIS*

ſumpti. Probatur. Conſtituatur enim quadratum dicti ſegmenti BC, quod ſit CF; & ex A, educatur AE, [*per 31 pri,*] parallela ipſi CD, vel BF, donec coeat cum FD, protracta in E. Quoniam igitur recta BF, rectæ BC, æqualis eſt, ex quadrati defin. erit rectangulum AF, comprehenſum ſub tota AB, & ſegmento BC. Rurſus quia recta CD, eadem ratione æqualis eſt rectæ CB; erit rectangulum AD, comprehenſum ſub ſegmentis AC, CB. Cum igitur rectangulum AF, æquale ſit quadrato CF, & rectangulo AD; liquido conſtat rectangulum ſub AB, tota, & ſegmento BC, comprehenſum, æquale eſſe rectangulo comprehenſo ſub ſegmentis AC, CB, & quadrato prædicti ſegmenti BC. Quare ſi recta linea ſecta ſit vtcunque, rectangulum, quod à tota deſcribitur, &c. Quod demonſtrandum erat.

PROPOS. 4. THEOR. 4.

Si recta linea ſecta ſit vtcunque: quod à tota deſcribitur, quadratum, æquale eſt illis, quæ à ſegmentis deſcribuntur quadratis, & ei, quod bis ſub ſegmentis comprehenditur, rectangulo.

Recta linea AB, diuiſa ſit vtcunque in C. Dico quadratum totius rectæ AB, eſſe æquale quadratis ſegmentorum AC, CB, & rectangulo comprehenſo bis ſub dictis ſegmentis AC, CB. Probatu. Deſcribatur enim ſuper AB [*per 46. pri,*] quadratum AD, ducaturq; diameter BE. Deinde ex C, ducatur CF, [*per 31. pri.*] parallela rectæ BD,

Il frontespizio e una pagina degli *Elementi* commentati da Rondelli (Bologna, 1693)

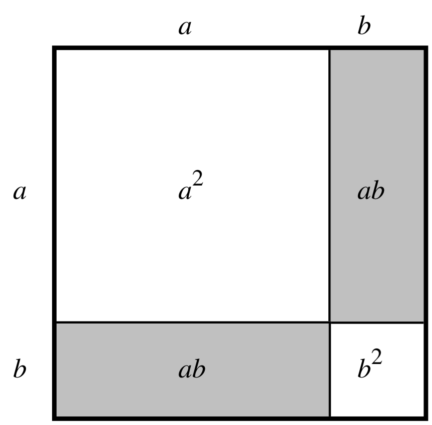
La proposizione 4 esprime la regola del quadrato di una somma.

---

[4] Ricordiamo che nel V libro degli *Elementi*, dedicato alla teoria delle proporzioni (di riconosciuta ispirazione eudossiana, ma "libro difficile e complesso": Giusti, 1993, p. 2), troviamo la definizione seguente: "Due grandezze A e B si dicono stare nello stesso rapporto di altre due C e D quando per qualunque coppie di numeri m e n per la quale si abbia mA > nB si ha anche mC > nD mentre se si ha mA = nB si ha anche mC = nD mentre se si ha mA < nB si ha anche mC < nD" (Carruccio, 1972, pp. 54-55). E. Carruccio nota che questa definizione euclidea appare molto più complicata dell'analoga definizione dell'uguaglianza di rapporti tra numeri naturali ($a : b = c : d$ quando se è $a = mb$ allora è anche $c = md$) e motiva ciò osservando che non sempre le grandezze in esame sono commensurabili; egli conclude affermando che, se interpretata in termini moderni, "la definizione di Euclide porta ad una partizione dei numeri reali in classi di equivalenza" (Carruccio, 1972, p. 56). Sulla celebre definizione euclidea si veda anche: Freguglia, 1982, p. 54.

Proposizione 4 del II libro. Se si divide a caso un segmento, il quadrato di tutto il segmento è equivalente (equiesteso) alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti stesse (Euclide, 1970, p. 163).

La dimostrazione è sintetizzata nella figura seguente.



La sua moderna espressione simbolica è:

$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$

Una valutazione critica dell'algebra geometrica greca nella storia della matematica non può non riconoscere l'importante ruolo che essa assunse nella concezione greca delle quantità irrazionali. Tuttavia alcuni limiti connessi a tale impostazione sono evidenti: "La cosiddetta 'algebra geometrica' greca non consentì [...] il superamento di problemi di secondo grado e si arrestò per le limitazioni della geometria classica proprio a quei problemi che, tradotti algebricamente, avrebbero portato ad equazioni di terzo grado" (Maracchia, 1979, p. 31).

Non dimentichiamo che l'algebra geometrica consente la trattazione anche di problemi di terzo grado: non è difficile costruire l'analogo del teorema sopra ricordato per il cubo:

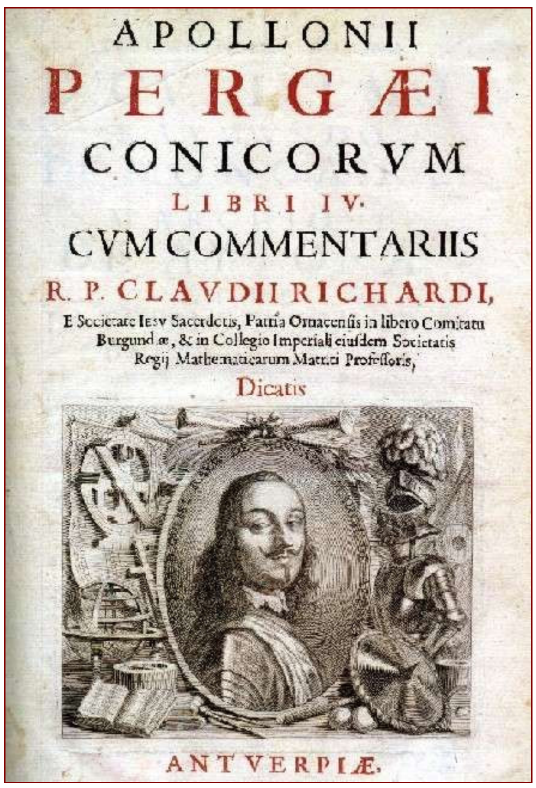
$(a+b)^3 = a^3+b^3+3a^2b+3a^2b$

Geometricamente tale uguaglianza porta alla scomposizione di un cubo in due cubi più piccoli ed in sei parallelepipedi: la considerazione dei volumi delle otto figure solide consente la dimostrazione dell'uguaglianza ricordata. Ma l'evidente facilità dell'uso del registro rappresentativo visuale in ambito piano (ovvero bidimensionale) porta alla prevalenza delle applicazioni piane rispetto a quelle tridimensionali.

APOLLONIO E LE CONICHE

In una rassegna storica, per quanto forzatamente incompleta, delle esperienze matematiche collegate ai problemi di secondo grado dobbiamo ricordare lo studio delle curve del secondo ordine e dunque delle coniche. Secondo alcuni, Apollonio di Perga (o Perge, 262?-190? a.C.), matematico e astronomo, ricordato come il "Grande Geometra", fu un emulo di Archimede (è accertato che Apollonio studiò ad Alessandria sotto la guida degli allievi di Euclide); ma la conoscenza del pensiero di uno dei più profondi geometri del mondo greco è purtroppo ostacolata dal fatto che la maggior parte delle opere di Apollonio sono perdute: ci restano soltanto alcune parti del trattato *Sezione di un rapporto* e sette libri di *Coniche* (Anglin, 1994).

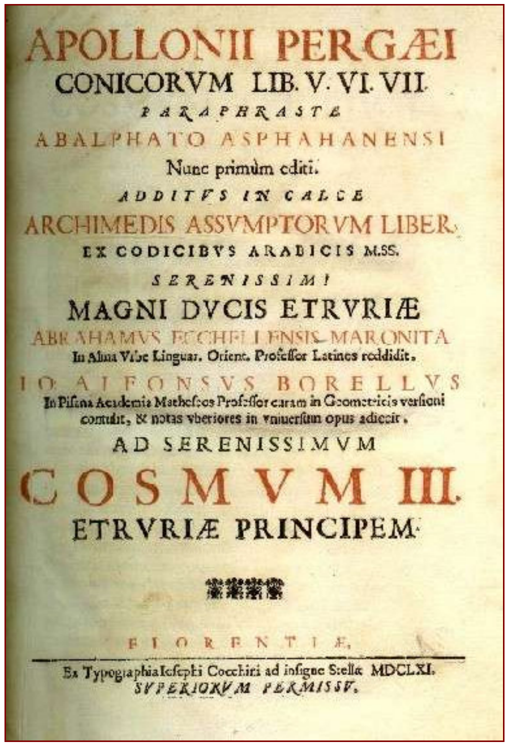
Il capolavoro assoluto di Apollonio è il vasto trattato sulle sezioni coniche, originariamente in otto libri, comprendente 487 proposizioni (Kline, 1991, I, p. 107): come fece Euclide per la geometria e per l'aritmetica elementare, egli organizzò la materia, unificando e completando opere e teorie precedenti.



Il frontespizio dell'edizione di Anversa (1655) dei primi quattro libri delle *Coniche*

Prima di Apollonio, infatti, i tre tipi di coniche (ellisse, iperbole e parabola) derivavano dalla sezione di tre tipi diversi di coni, secondo quanto stabilito da Menecmo ed accettato da Euclide e da Archimede. Nell'impostazione di

Apollonio, invece, si passò alla ben più moderna considerazione di un solo cono, con la sola variazione dell'angolatura del piano secante (Bagni, 1996, I).


APOLLONII PERGÆI
CONICORVM LIB. V. VI. VII.
PARAPHRASTE
ABALPHATO ASPHAHANENSI
Nunc primùm editi.
ADDITVS IN CALCE
ARCHIMEDIS ASSVMPTORVM LIBER.
EX CODICIBVS ARABICIS M.SS.
SERENISSIMI
MAGNI DVCIS ETRVRIÆ
ABRAHAMVS ECCHELLENSIS MARONITA
In Alma Vrbe Linguar. Orient. Professor Latinos reddidit.
IO. ALFONSVS BORELLVS
In Pisana Academia Matheseos Professor curam in Geometricis versioni contulit, & notas vberiores in vniuersum opus adiecit.
AD SERENISSIMVM
COSMVM III.
ETRVRIÆ PRINCIPEM.
FLORENTIÆ,
Ex Typographia Iosephi Cocchini ad insigne Stellæ MDCLXI.
SVPERIORVM PERMISSV.

Il frontespizio della prima edizione dei libri V, VI e VII delle *Coniche* (1661)

I metodi impiegati da Apollonio appaiono straordinariamente innovativi, moderni: alcuni fanno risalire a lui una prima forma di geometria analitica, ben diciotto secoli prima di Fermat e di Descartes (Freguglia, 1982, p. 71; Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 84-85). E non possiamo dimenticare che l'opera del "Grande Geometra" prese corpo e si sviluppò senza disporre del potente strumento dell'algebra simbolica.

D.J. Struik inoltre ricorda che proprio nei lavori di Apollonio troviamo "per la prima volta, in forma esplicita, il requisito che la costruzione geometrica debba essere effettuata con l'ausilio di riga e compasso solamente" (Struik, 1981, p. 74). A tale requisito è dedicato il paragrafo seguente.

COSTRUZIONE CON RIGA E COMPASSO

Restiamo dunque nell'ambito della matematica ellenica per descrivere una procedura che appare ancora legata al secondo grado e che costituì un fertile campo di indagine per gli algebristi fino al XIX secolo. Presso i Greci, la risoluzione di un problema doveva essere ricondotta ad una successione finita di operazioni scelte tra le seguenti (Carruccio, 1972, p. 87):

- dati due punti, costruire la retta passante per essi;
- dato un punto ed un segmento, trovare la circonferenza che ha quel punto come centro e quel segmento come raggio;
- date due rette, trovarne (se esiste) il punto comune;
- date una retta ed una circonferenza, trovarne eventuali punti comuni;
- date due circonferenze, trovarne eventuali punti comuni.

Sembra che a Platone sia dovuta la distinzione di questa particolare procedura risolutiva (che, come sopra osservato, apparirà citata esplicitamente soltanto negli scritti di Apollonio di Perga). Nota a tale proposito M. Kline che "sono state date varie spiegazioni circa la restrizione di usare nelle costruzioni soltanto riga e compasso. La linea retta e il cerchio erano, secondo i Greci, le figure fondamentali e la riga e il compasso sono i loro analoghi fisici [...]. È stata anche avanzata come spiegazione l'ipotesi che Platone si sia opposto all'uso di altri strumenti meccanici perché essi avevano attinenza più con il mondo dei sensi che con quello delle idee" (Kline, 1991, I, pp. 48-49).

Modernamente, la costruibilità è definita in ambito algebrico: un reale x si dice costruibile se, fissata un'unità di misura, è possibile costruire un segmento di lunghezza x facendo uso soltanto della riga e del compasso: si dimostra che se x e y sono costruibili, tali sono anche $x \pm y$ e, se $y \neq 0$, x/y e l'insieme dei reali costruibili è un sottocampo del campo dei numeri reali.

Si dimostra inoltre che:

Se il numero reale a soddisfa un polinomio irriducibile sul campo dei numeri razionali di grado k, non essendo k una potenza di 2, allora a non è costruibile (Herstein, 1982, pp. 247-251).

Questo importante moderno criterio di non costruibilità sottolinea nuovamente l'importanza dei problemi di secondo grado nella matematica elementare. Applicando la proposizione ora ricordata è ad esempio immediato provare l'impossibilità di duplicare il cubo con riga e compasso (uno dei problemi classici della matematica ellenica): è sufficiente osservare che se il cubo di partenza ha lo spigolo unitario, tale problema si riduce alla costruzione di un segmento lungo x con $x^3 = 2$; ma essendo il polinomio x^3-2 irriducibile sui razionali e non essendo il suo grado (3) una potenza di 2, è chiara l'impossibilità di costruire il segmento in questione.

CONCLUSIONE

La presentazione di alcuni esempi tratti dalla storia della matematica ha consentito di evidenziare una costante importanza collegata ai problemi di secondo grado. Scopo del presente lavoro non è quello di interpretare o di spiegare tale particolarità: chiaramente la possibilità di rappresentare la speculazione matematica in una situazione bidimensionale (nonché di descrivere una legge fisica in termini cinematici, con riferimento alla velocità e ad all'accelerazione: per la nascita del calcolo infinitesimale si veda: Castelnuovo, 1938) non è estranea a tale situazione.

Concludiamo comunque osservando nuovamente che la grande eredità della matematica classica si è mantenuta straordinariamente viva nei secoli: gli stimoli implicitamente contenuti nelle speculazioni di Platone, di Eudosso, di Apollonio, dei grandi geometri greci hanno fornito ai matematici contemporanei preziose occasioni per ricerche profonde e innovative, caratterizzate da un'eleganza difficilmente eguagliabile.

Bibliografia

Anglin, W.S. (1994), *Mathematics. A Concise History and Philosophy*, Springer, Berlin.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica*, I-II, Pitagora, Bologna.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del Calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (ristampa: Feltrinelli, Milano 1962).

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.

Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni L. (a cura di), UTET, Torino.

Franci, R. & Toti Rigatelli, L. (1979), *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.

Freguglia, P. (1982), *Fondamenti storici della Geometria*, Feltrinelli, Milano.

Giusti, E. (1983) *Analisi matematica*, I, Boringhieri, Torino.

Giusti, E. (1993), *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, Bollati Boringhieri, Torino.

Herstein, I.N. (1982), *Algebra*, Editori Riuniti, Roma (*Topics in Algebra*, Xerox, 1975).

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972).

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Maracchia, S. (1979), *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano.

Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, New York (prima edizione: Mc-Graw-Hill, 1929).

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Van der Waerden, B.L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, Berlin.