Cassamarca (in via di pubblicazione)

Giovanni Battista Nicolai (1726-1793)
Un matematico del Settecento nella Marca trevigiana

GIORGIO T. BAGNI
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"
Ateneo di Treviso

Giovanni Battista Nicolai e la Matematica del XVIII secolo

Il Settecento fu un periodo vivace e fecondo per la ricerca matematica ([1]): la diffusione e lo sviluppo dell'Analisi infinitesimale, nata con gli studî di Newton e di Leibniz, aveva fornito ai ricercatori un mezzo eccezionalmente versatile e potente per l'indagine e, parallelamente, un campo che richiedeva un approfondimento particolarmente originale e stimolante. Anche altri settori della Matematica fornivano spunti di ricerca: la Geometria si stava preparando alla grande rivoluzione non-euclidea (che avrà luogo nel XIX secolo); né potremmo dimenticare le ricerche algebriche sulla risolubilità delle equazioni, che porteranno, all'inizio dell'Ottocento, alla nascita dell'Algebra astratta. La figura del matematico veneto Giovanni Battista Nicolai (1726-1793) si inserisce con autonomia in questo periodo fecondo.

Nato a Venezia e studente del Seminario di Treviso, Nicolai manifestò già durante gli studi le proprie capacità nel campo delle scienze esatte e, in particolare, della Matematica: a diciassette anni fu chiamato da Jacopo Riccati (1676-1754) in qualità di "compagno dei suoi figli" ([2]); a ventiquattro anni ebbe l'incarico di insegnante di Matematica presso il Seminario trevigiano. Ordinato sacerdote, gli venne assegnata la responsabilità della parrocchia di Padernello e nel 1772 fu chiamato ad insegnare Matematica (*Analysim tam Cartesianam tam Leibnitianam*) presso l'Università di Padova; si interessò di Fisica e di Idrologia (nel 1790 prese posizione sulla questione della sistemazione del fiume Brenta e pubblicò il *Piano Fiscale del Magistrato alle Acque*). Morì a sessantasette anni, il 15 luglio del 1793, poco prima che vedesse la luce il secondo volume della sua opera maggiore, *Nova Analyseos Elementa* ([3]), rimasta incompiuta (il primo volume era stato pubblicato sette anni prima, nel 1786) ([4]). Fu sepolto nel Duomo di Schio.

Un dettagliato esame di quest'ultimo grande lavoro di Nicolai esula dagli scopi della presente nota. L'opera ricordata fu considerata oscura e didatticamente non sempre efficace: anche ad un moderno esame, la sua impostazione non appare legata all'evoluzione positiva che caratterizzò l'Analisi matematica nel passaggio tra la seconda metà del Settecento (con i grandi trattati analitici euleriani) e l'Ottocento (con il fondamentale *Cours d'Analyse* di Cauchy, pubblicato nel 1821 e considerato il primo libro di Analisi matematica con caratteristiche moderne) ([5]).

Nicolai e le controversie della Matematica del Settecento

Dedicata specificamente a questioni di Algebra è un'altra opera di Giovanni Battista Nicolai, pubblicata nel 1783, intitolata: *Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irreducibile* ([6]). Essa contiene le note: Memoria prima (pp. 21-55): *Della necessità delle equazioni* $[1+\sqrt{(1-q)}]/[1-\sqrt{(1-q)}] = [1-\sqrt{(1-q)}]/[1+\sqrt{(1-q)}] = [1\pm\sqrt{(-1+q)}]/[1\pm(-1)\sqrt{(-1+q)}]$. Memoria seconda (pp. 56-124): *Difesa di alcune equazioni della seguente memoria.* Memoria terza (pp. 125-166): *Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irreducibile*. In essa è inoltre inclusa la breve nota: *Riflessioni sul binomio newtoniano* (che occupa quattro facciate non numerate inserite tra le pagine 166 e 167).

L'opera di Nicolai può essere collegata alla controversia riguardante da un lato la natura delle quantità immaginarie e dall'altro la legge secondo la quale non esistono (nell'àmbito dei numeri reali) i logaritmi dei numeri non positivi: quest'ultima affermazione, oggi accettata, costituì uno dei problemi lungamente discussi dai matematici del Settecento ([7]).

La questione dei logaritmi dei numeri negativi venne sollevata da una lettera di Gottfried Wilhelm Leibniz a Giovanni Bernoulli, datata 16 marzo 1712 ([8]), e vide coinvolti, in prima persona, alcuni dei più celebri matematici del XVIII secolo. Gli studiosi erano infatti divisi in due schieramenti, apertamente contrapposti: da un lato, molti sostenevano l'opinione di Leibniz, poi ripresa da Euler, secondo la quale i logaritmi dei numeri negativi sono da interpretarsi come quantità immaginarie. Contrario a questa opinione era un altrettanto folto gruppo di celebri matematici, guidati da Giovanni Bernoulli, il quale proponeva di considerare reali tali logaritmi e di porre:

$$\log(-x) = \log x$$

in base all'osservazione, considerata decisiva dai Bernoulliani:

$$2 \cdot \log(-1) = \log(-1)^2 = \log(+1)^2 = 2 \cdot \log(+1)$$

Alla radice di questa controversia sta una non piena consapevolezza del significato dei numeri immaginari, che pur essendo stati introdotti dagli algebristi italiani del Rinascimento, non erano ancora compiutamente inseriti nella mentalità e nella pratica matematica.

Dopo aver fornito un breve riassunto storico della controversia (*Prefazione* dell'opera in esame, pp. 5-8) ed una corretta posizione del problema (*Prefazione*, pp. 10-11), Giovanni Battista Nicolai passa ad esprimere il proprio pensiero sulla questione. La citazione seguente è illuminante, al fine di inquadrare la posizione dell'Autore:

"È ben facile la soluzione, anzi non c'è nella mia sentenza veruna difficoltà. Io seguendo le tracce del mio metodo ho già indicato che $\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)}$ è suscettibile essenzialmente di amendue i valori +1 e –1: perché $\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = (-1)^{2/2}$ tanto eguale a $\sqrt{(-1)}\sqrt{(-1)} = (\sqrt{1})^2 = 1^{2/2} = 1$; che a $[\sqrt{(-1)}]^2 = (-1)^{2/2} = -1$" (*Prefazione*, p. 12).

Nell'osservazione espressa da Nicolai ritroviamo dunque evidentemente la posizione bernoulliana ed in particolare alcune osservazioni di d'Alembert, il quale collega il logaritmo alla corrispondenza tra una progressione geometrica ed aritmetica ([9]). Tale opinione può essere illustrata attraverso un semplice esempio: è noto, infatti, che la media geometrica tra 1 e 4 è 2; la tesi di d'Alembert porterebbe ad affermare che anche il valore -2 gode della stessa proprietà rispetto a 1 ed a 4, in quanto risulta:

$$(1) \cdot (4) = (+2) \cdot (+2) = (-2) \cdot (-2)$$

Questa asserzione erae confutata dagli studiosi della parte leibniziana, tra i quali Francesco Maria Franceschinis, il quale, nel 1787, osserva:

"In una progressione geometrica ciascun termine non ha la sola relazione di essere media proporzionale, lo che a tutti conviene fuori che al primo, e all'ultimo, ma quello altresì di essere estremo, e terza proporzionale, lo che a tutti conviene" ([10]).

Riprendendo l'esempio precedente, infatti, sia +2 che -2 possono essere considerati alla stregua di "media proporzionale" (geometrica) tra 1 e 4, ma soltanto il valore positivo, +2, può essere considerato "estremo" con i termini 4 e 8 nella proporzione:

$2 : 4 = 4 : 8$

Pertanto:

"Essere cioè $2 \cdot \log 1 = 2 \cdot \log(-1)$, e provarsi dall'essere $1 : (-1) = (-1) : 1$, onde ne nasce $(-1) \cdot (-1) = (+1) \cdot (+1)$ e $2 \cdot \log 1 = 2 \cdot \log(-1)$ (del qual argomento sembrano trionfare i Bernoulliani) trovasi, esaminato a fondo essere insussistente" ([11]).

La ragione di questa decisa opposizione è così spiegata:

"Poiché da questo, che sia $(-1) \cdot (-1) = (+1) \cdot (+1)$ non si può dedurre, che sia $2 \cdot \log 1 = 2 \cdot \log(-1)$ quando pure non deducasi essere $-1 = 1$, lo che niun buon Matematico mai vorrà [...] siccome [...] nel passaggio delle potenze alle radici conviene usare di molta cautela, questa pure sarà necessaria passando dai logaritmi delle potenze a quelli delle radici" ([12]).

In sostanza, Franceschinis sottolinea che per estrarre la radice quadrata di entrambi i membri dell'uguaglianza $(-1) \cdot (-1) = (+1) \cdot (+1)$ siamo tenuti ad imporre opportune condizioni (ovvero "usare di molta cautela") al fine di evitare evidenti assurdità quali $+1 = -1$: un'osservazione che sembra diretta esplicitamente a confutare l'opinione di Nicolai sopra ricordata.

Tornando quindi al lavoro di Nicolai, l'Autore si riferisce (pp. 14-16) anche ad argomenti collegati alle equazioni differenziali. Ricordiamo che alcuni Autori, nel Settecento, ritenevano erroneamente che la curva grafico cartesiano della equazione $y = \log x$ fosse costituita da due rami simmetrici rispetto all'asse delle ordinate (ciò è indicato da d'Alembert e da molti altri sostenitori della realtà dei logaritmi dei numeri negativi, tra i quali gli stessi Vincenzo e Giordano Riccati). Giordano Riccati, ad esempio, afferma:

"La vera equazione della Logistica [...] ha due rami affatto simili, e dall'assintoto equidistanti, onde ci sono forniti i logaritmi di' numeri negativi eguali a quelli de' numeri postivi" ([13]).

Così Franceschinis presenta un argomento dei Bernoulliani collegato alle equazioni differenziali:

"[...] dalla equazione $dx/x = dy$ crede Bernoulli, e d'Alembert dedursi invincibilmente, darsi i logaritmi de' numeri negativi, ed essere essi eguali ai logaritmi de' numeri positivi, poiché, dicon essi, l'equazione $dx/x = -dx/(-x) = dy$, onde sarà $y = \log x = \log(-x)$" ([14]).

Ma lo stesso Franceschinis indica quale controesempio l'equazione differenziale:

$$2dy/y = -dx/x$$

ed afferma:

'Se suppongo mutato il segno alla x, l'equazione differenziale non si muta, perché $-dx/x = dx/(-x)$ […] dunque la curva ha un ramo, che corrisponde alle x negative? Posta x negativa, y diventa immaginaria. Dunque la curva non può avere un ramo corrispondente ad x negativa […] Così non dovrò poter argomentare un ramo negativo della logaritmica dal trovare, che mutando il segno all'ordinata non si muta l'equazione differenziale dell a logaritmica […] Di più il raziocinio del Bernoulli parmi che supponga in certo modo quello che è in questione. Diffatti come può egli conchiudere essere log.x = log.$(-x)$ dall'essere $dx/x = -dx/(-x)$, se non suppone $-dx/(-x)$ essere il differenziale del logaritmo di $-x$, e perciò darsi tale logaritmo, ed essere reale, giacché reale è sicuramente il suo differenziale?" ([15]).

Dal punto di vista moderno ([16]), fu il grande Leonhard Euler, nel 1747, a chiarire definitivamente la questione dei logaritmi dei numeri negativi, applicando la celebre formula:

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i \cdot \text{sen}\,\omega$$

Ponendo, in essa, $\omega = \pi$, infatti, si ottiene:

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \log_e(-1) = i\pi$$

Euler provò anche che ciascun numero ammette, in àmbito complesso, infiniti logaritmi; infatti dalla citata formula $e^{i\omega} = \cos\omega + i \cdot \text{sen}\,\omega$ otteniamo l'implicazione:

$$\log_e a = b \quad \Rightarrow \quad \log_e a = b + 2k\pi \cdot i$$

essendo $k \in \mathbf{Z}$.

Con l'opera di Euler la tesi che vuole immaginari i logaritmi dei numeri negativi trova la sua piena consacrazione ([17]), nonostante la residua presenza di qualche contestazione mossa ancora per alcuni anni dagli studiosi di tradizione bernoulliana.

Possiamo dunque concludere che, alla luce di un'equilibrata critica storica, le posizioni sostenute da Nicolai risultarono perdenti, ovvero rapidamente superate dall'evoluzione moderna del pensiero matematico. Ma Giovanni Battista Nicolai sostenne alcune tesi comunque di sicura importanza, condivise da alcuni dei più profondi studiosi di Matematica del periodo.

Ciò non appare sufficiente per includere l'Arciprete di Padernello tra i grandi protagonisti della storia della Matematica del XVIII secolo; del resto abbiamo potuto constatare che alcune sue opere palesano limiti oggettivi, sia dal punto di vista formale che da quello contenutistico. Tuttavia Giovanni Battista Nicolai fu studioso originale ed interessante e la sua organica collocazione nell'àmbito delle controversie matematiche settecentesche è ulteriore testimonianza della vivacità culturale della Marca trevigiana nel secolo dei Lumi.

Note e riferimenti bibliografici

(1) Sulla storia del Calcolo infinitesimale segnaliamo: **U. Bottazzini**, *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino 1981. **U. Bottazzini**, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino 1990. **N. Bourbaki**, *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano 1963. **G. Castelnuovo**, *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna 1938 (ristampa: Feltrinelli, Milano 1962). **P. Dupont**, *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale. II. Newton e Leibniz.* Cortina, Torino 1981; **G.T. Bagni**, *Storia della matematica*, volumi I-II, Pitagora, Bologna 1996. Sempre fondamentale è la consultazione di: **M. Kline**, *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento*, Einaudi, Torino 1991.

(2) La citazione è tratta da: **R. Binotto**, *Nicolai Giovanni Battista* (voce), in: "Personaggi illustri della Marca trevigiana", Fondazione Cassamarca, Treviso 1996, pp. 409-410 e da: **F. Zanella**, *Giovanni Battista Nicolai, matematico e arciprete di Padernello*, in: "Il Veneto e Treviso tra Settecento ed Ottocento", Istituto per la Storia del Risorgimento Italiano, Treviso 1991, 1-10. Ricordiamo: **M. Battaggia**, *Lettera intorno ad alcuni letterati defunti della Diocesi di Treviso*, p. XIII, Tipografia Trento, Treviso 1823; **C. Chimenton**, *I grandi benefattori ndella Chiesa Arcipretale di Padernello*, Treviso 1940, p. 13. Sulla vita e sulle opere di Jacopo Riccati (e dei suoi figli) si veda: **A.A. Michieli**, *Una famiglia di matematici e poligrafi trevigiani: i Riccati. I. Jacopo Riccati*, in: "Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti", CII, II, Ferrari, Venezia 1943; *II. Vincenzo Riccati*, ibid., CIII, II, Ferrari, Venezia 1944; *III. Giordano Riccati*, ibid., CIV, II, Ferrari, Venezia 1946; *IV. Francesco Riccati*, ibid., CIV, II, Ferrari, Venezia 1946. **L. Grugnetti**, *Sulla vecchia ed attuale equazione di Riccati*, in: "Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari", LV, 1, pp. 7-24, 1985; **L. Grugnetti**, *L'equazione di Riccati: un carteggio inedito tra Jacopo Riccati e Nicola II Bernoulli*,

in: "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", VI, 2, pp. 45 -82, 1986 (è la nota fondamentale per l'attribuzione della paternità della risoluzione dell'equazione differenziale di Riccati); **G.T. Bagni**, *Jacopo Riccati matematico*, in: "La matematica e la sua didattica", anno II, n. 3, pp. 45-50, Armando, Roma 1988; **G.T. Bagni**, *La Matematica nella Marca. Jacopo Riccati*, Edizioni Teorema, Treviso 1990; **G.T. Bagni**, *La matematica nella Marca: Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati*, Edizioni Teorema, Treviso 1993; **G.T. Bagni**, *I procedimenti di Jacopo e di Vincenzo Riccati nella storia delle equazioni differenziali*, in: "Rivista di Matematica dell'Università degli Studi di Parma", (5), 4 (1995), 7-13; **G.T. Bagni**, *Jacopo Riccati (1676-1754) e la storia delle equazioni differenziali*, in: "Διδακτικ και Ιστορια των Μαθηματικων", a cura di A. Gagatsis, Erasmus ICP-94-G-2011/11, pp. 207-218 e pp. 617-628, Thessaloniki 1995; **G.T. Bagni**, *Le serie numeriche e Jacopo Riccati*, in: "Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso", anno acc. 1995 -1996. I lavori di Jacopo Riccati sono raccolti nella grande edizione lucchese: **J. Riccati**, *Opere*, tomi I, II, III, Jacopo Giusti, Lucca 1761, 1762, 1763; tomo IV, Giuseppe Rocchi, Lucca 1765. A tale pubblicazione contribuirono largamente i figli Vincenzo e Giordano ed in essa (all'inizio del volume IV) è inclusa l'importante nota biografica: **C. Di Rovero**, *Vita del Conte Jacopo Riccati* (edizione con *Introduzione* a cura di **M.L. Soppelsa**, Asolo 1990).

(3) Il titolo completo del monumentale lavoro è: *Nova Analyseos Elementa, Auctore Joanne Baptista Nicolai Eiusdem Scientiae P.P. et Academico Patavino, Bononiensie et Taurinensis Academiae Socio. Patavii, Typys Seminarii, MDCCLXXXVI. Prostat Venetiis apud Thomam Bettinelli*. Il primo tomo contiene i libri I e II. Il secondo tomo, datato *MDCCXCIII* (pubblicato poco dopo la morte del matematico), riporta un bel ritratto di Nicolai e contiene il terzo libro dell'opera. Riportiamo il sommario dei capitoli del primo volume (548 pp.). Libri Primi Index Capitum. Cap. I. *De notione absoluta, ac relativa quantitatis*. Cap. II. *De primis Analyseos abstractae notionibus*. Cap. III. *De Aequationibus linearibus limitis, ac de duplici earum Systemate*. Cap. IV. *De divisione unius Systematis in plura, & de plurimum in unum conjunctione*. Cap. V. *De legitima Systematum conjunctione in aequationibus linearibus*. Cap. VI. *De Systemate indeterminatio, ex quo eruuntur varae Infiniti, & Infinitesimi tam absoluti, quam relativi notiones*. Cap. VII. *De solutione aequationum linearium*. Libri Secundi Index Capitum. Cap. I. *De aequationibus secundae dimensionis ortis a producto duarum variabilium Systematis linearis basis datae; deque earumdem limitibus rectilineis*. Cap. II. *De limitibus rectilineis aequationis secundae dimensionis ortae a producto duarum variabilium Systematis linearis basis variabilis*. Cap. III. *Alia methodo quae superius de limitibus rectilineis demonstravimus confirmantur*. Cap. IV. *Primae, quae ex superioribus principiis manante, consecutiones traduntur*. Cap. V. *De limitibus curvilineis aequationum secundae dimensionis utriusque Systematis, ac de completa earum solutione*. Cap. VI. *Methodus in solvendis arquationibus primae & secundae dimensionis vulgo usurpata ad examen revocatur*. Riportiamo inoltre il sommario dei capitoli del secondo volume (715 pp.). Cap. I. *Prima methodi generalis Coefficentium indeterminatorum jaciuntur fundamenta*. Cap. II. *De vera unitatis abstracta (I) notione, & de origine & natura fluentium*. Cap. III. *De geometrica utriusque*

Systematis linearis descriptione. Cap. IV. *Traditur nova ratio apprime necessaria concinnandi formulas generales fluentium utriusque Systematis*. Cap. V. *De primis fluentium abstractarum operationibus*. Cap. VI. *De fluentibus abstractis numero constante & fluente singillatim constatis, ac de illis exponente negativo* –1 *affectis*. Cap. VII. *De legitima fluentium abstractarum ad protonumerum applicatione*. Cap. VIII. *De ratione fluenti, qua Fluentes se se respiciunt*. Cap. IX. *De ratione constanti, qua Fluentes se se respiciunt: ubi Methodus generali construendi aequationes primi gradus a vulgata Analysi usurpata expenditur*. Cap. X. *Vulgata methodo analytica inveniendi mediam proportionalem geometricam inter duas datas reprobata, legitima substituitur*. Cap. XI. *De continua Fluentium abstractarum utriusque systematis divisione nova methodo pertractata, ac de vera serierum arithmeticarum origine & natura*. Cap. XII. *De continua Fluentium abstractarum utriusque systematis divisione vulgo usurpata, ac de vera serierum geometricarum origine & natura*. Cap. XIII. *De systemate Exponentiali & Logarithmico, deque eorum legitima conjunctione, ac descritione geometrica Logistica ope, cujus vera natura & origo determinatur*. Cap. XIV. *Principia Calculi Exponentialis & Logarithmici vulgo usurpata ad examen vocantur*. L'esemplare da noi consultato si trova presso la Biblioteca Comunale di Treviso (segnatura 5775); un altro esemplare dell'opera si trova presso la Biblioteca del Seminario di Treviso. Ricordiamo che Guglielmo Sirio Borremans pubblicò a Napoli nel 1787 *Osservazioni critiche sui nuovi Elementi di Analisi dell'Abate Nicolai* (copia dell'opera può essere reperita a Padova, Biblioteca del Museo, collocazione E 1716). Presso la Biblioteca Comunale di Treviso si trova inoltre *Riflessioni appartenenti al nuovo sistema di analisi del Signor P.P. Abate Nicolai. Addì 20 luglio l'anno 1791* (fascicolo appartenente al manoscritto 2210: probabilmente si tratta di una miscellanea per uso scolastico).

([4]) Ringrazio vivamente Francesco Zanella, infaticabile Segretario del Comitato di Treviso dell'Istituto per la Storia del Risorgimento Italiano ed appassionato cultore di scienze matematiche, per le preziose indicazioni bibliografiche. La cortesia e la disponibilità del Direttore della Biblioteca Comunale di Treviso, dott. Emilio Lippi, e del dott. Luigi Perino sono ben note a tutti gli studiosi trevigiani.

([5]) Luigi Pepe, in *Sulla trattatistica del Calcolo infinitesimale in Italia nel secolo XVIII* ("La storia delle Matematiche in Italia", Atti del Convegno tenuto a Cagliari, 29 settembre-1 ottobre 1992), scrive a proposito dei *Nova Analyseos Elementa*: "L'autore ebbe rinomanza nell'ambiente culturale (soprattutto tra i non matematici) e riuscì ad ottenere una cattedra in Matematica presso l'Università di Padova. Una notizia sul Nicolai si può leggere nell'introduzione del secondo volume della *Noca Analyseos*, fortunatamente incompiuta. L'opera che si propone un nuovo modello per la trattazione dell'Analisi Algebrica ed infinitesimale (e si richiama ai Trattati di Eulero e di Riccati-Saladini) è piena di stranezze, di discorsi lunghi e di scarsa presa e riesce spesso incomprensibile per l'esposizione singolare e disordinata anche nelle parti meno stravaganti. Sono più di mille e duecento pagine ben fitte tipograficamente".

([6]) L'opera in questione è: **G.B. Nicolai**, *Della possibilità della reale soluzione analitica del caso irreducibile. Riflessioni dell'Arciprete Giovanni Battista Nicolai, P.P. d'Analisi, ed Accademico di Padova*, impressa a Padova, nella Stamperia del

Seminario MDCCLXXXIII (Biblioteca Comunale di Treviso, collocazione I 24 C 14). Pietro Cossali attaccò duramente Nicolai sul "caso irriducibile" nelle *Lettere apologetiche critiche di Pietro Cossali*, in "Progressi dello Spirito umano nelle Scienze e nelle Arti ossia Giornale Letterario", anno 1783, volumi XV, XIX, XX, XXIX. Interessante è inoltre: **G.B. Nicolai**, *Dissertazioni due fisico-matematiche* (Biblioteca Comunale di Treviso, segnatura Misc. 3405/21). Altri scritti di Nicolai si trovano nel volumi I-II degli "Atti dell'Accademia di Padova" (segnaliamo ad esempio: *Memoria sopra una nuova genesi delle curve* e *Continuazione della nuova genesi delle curve*); *Degli elastri di massa finita* Biblioteca del Museo, Padova, collocazione H 19775.

(7) La descrizione della controversia sulla quale ci baseremo è tratta da: **F.M. Franceschinis**, *Opuscoli matematici del P. D. Francesco Maria Franceschinis Bernabita*, Remondini, Bassano 1787. In risposta a Franceschinis si veda inoltre: **P.M. Caldani**, *Riflessioni sopra un opuscolo del P. Franceschinis Barnabita, dei logaritmi dei numeri negativi stampato in Bassano*, opuscolo anonimo, Società Tipografica, Modena, 1791. Sull'argomento indichiamo: **G.T. Bagni**, *I logaritmi dei numeri negativi in un "Opuscolo matematico" (1787) di F.M. Franceschinis*, in: "La matematica e la sua didattica", V, 3, 1991; **G.T. Bagni**, *Una "controversia" della matematica del Settecento: i logaritmi dei numeri negativi*, in: "Periodico di Matematiche", Serie VII, Vol. 2, n. 2/3, aprile-settembre 1994, pp. 95-106, Roma 1994.

(8) Per la posizione leibniziana si veda: **G.W. Leibniz**, *Mathematischen Schriften*, Gerhardt, C.I. (a cura di) III, II, *Briefwechsel zwiscen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli*, 887, 895, 899, Halle 1856 (ristampa anastatica: Georg Olms Verlagsbuchhandlung 1962); **L. Euler**, *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et immaginaires*, in: "Mem. Acad. des Sciences de Berlin", 5, 1749; **P. Ferroni**, *Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometria sublimis theoria nova methodo pertractata*, Allegrini, Firenze 1782. Inoltre: **C. Naux**, *Histoire des logarithmes de Neper a Euler*, Blanchard, Paris 1971.

(9) "I logaritmi [...] altro non sono, che i termini di una qualunque progressione aritmetica corrispondenti per ordine ai termini di una qualunque progressione geometrica [...] Secondo questa idea le due serie sono tra loro indipendenti, onde la stessa progressione aritmetica potrà dare allo stesso tempo la serie de' logaritmi per i termini d'infinite progressioni geometriche diverse: così ogni quantità potrà avere infiniti logaritmi [...] e viceversa ogni quantità potrà essere logaritmo d'infinite quantità diverse" (Franceschinis, *cit.*, p. 12).

(10) Franceschinis, *cit.*, p. 21.

(11) Franceschinis, *cit.*, p. 25.

(12) Franceschinis, *cit.*, pp. 26-27.

(13) Anche i Riccati si occuparono della questione; ricordiamo: **G. Riccati**, *Lettera al Signore Iacopo Ab. Pellizzari sopra i logaritmi de' numeri negativi*, in: "Continuazione del Nuovo Giorn. de' Letterati di Modena", XVI, 1778. Nella Biblioteca Civica di Udine sono conservate *Dieci lettere del P. Vincenzo Riccati all'ab. Jacopo Pellizzari sulla questione della Logistica* (nel t. XXI del "Commercio

Epistolare del Co. Giordano Riccati", intitolato: *Prima raccolta di lettere sopra la questione: Se la Logistica abbia un doppio ramo*): la prima lettera è inviata da Vincenzo Riccati a Jacopo Pellizzari da Bologna in data 15 agosto 1767. Nel complesso la raccolta udinese comprende, sull'argomento, dieci lettere di Vincenzo Riccati, dodici lettere di Giordano Riccati e tre lettere di Jacopo Pellizzari. **G. Riccati**, *Teorema. Il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale*, in: "Mem. della Soc. Ital.", IV, 116, 1778. Dello stesso Autore e dello stesso anno è la breve nota *Risposta alle riflessioni analitiche del Signor Abbate Giovacchino Pessuti, Professore di Matematica nel corpo de' Cadetti Nobili di Peterburg, sopra una lettera scrittagli dal Signor Conte Vincenzo Riccati*; **V. Riccati**, *Sopra i logaritmi dei numeri negativi, lettere cinque*, Società Tipografica, Modena 1789. Segnaliamo inoltre: **G. Fontana**, *Sopra i logaritmi delle quantità negative e sopra gli immaginarj*, in: "Mem. della Soc. Ital.", I, 183, 1783; **G. Fontana**, *Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale ed il nulla immaginario*, in: "Mem. della Soc. Ital.", VIII, 174, 1799.

(14) Franceschinis, *cit.*, p. 37.

(15) Franceschinis, *cit.*, p. 38.

(16) Un allievo di Vincenzo Riccati inquadrerà correttamente la questione: **G.F. Malfatti**, *Pensieri sulla famosa questione dei logaritmi dei numeri negativi*, in: "Mem. Reale Acc. di Sci. Lett. ed Arti di Mantova", 3-54, 1795. Si veda: **E. Giusti**, *Problemi e metodi di analisi matematica nell'opera di Gianfrancesco Malfatti*, in: "Atti del Convegno su Gian Maria Malfatti", Ferrara, 23-24 ottobre 1981, 37-56, Bologna 1982. Anche Giovanni Francesco Giuseppe Malfatti (1731-1807) contesta, seppur velatamente, la posizione riccatiana sulla realtà dei logaritmi dei numeri negativi, ma nell'occuparsi dell'argomento bernoulliano che sostiene la simmetria della curva logaritmica rispetto all'asse delle ordinate assume una posizione di mediazione, forse (nota garbatamente Giusti) per confermare il rispetto e la gratitudine nei confronti del proprio maestro Vincenzo Riccati. In sostanza, Malfatti sottolinea che la curva logaritmica di equazione: $y = \log x$ non può essere considerata coincidente con la curva di equazione: $2y = \log x^2$, essendo questa seconda equazione esprimibile da $y = \log|x|$. I due rami della curva logaritmica, invocati dai Bernoulliani, risultano quindi propri soltanto del grafico della seconda equazione. Conclude quindi Giusti, commentando la posizione malfattiana: "La considerazione di uno o due rami della curva logaritmica dipenderà dunque dal problema geometrico dal quale essa sorge, cosicché le due posizioni divengono tra loro complementari ed entrambe legittime" (Giusti, *cit.*, p. 53).

(17) Ricordiamo inoltre che il sommo matematico di Basilea utilizzò l'uguaglianza citata per calcolare i logaritmi dei numeri complessi, provando che essi sono a loro volta numeri complessi e mostrando così la chiusura di **C** rispetto al calcolo del logaritmo e dell'esponenziale.