Cassamarca (1996) 14, X, 2, 90-94

Jacopo Riccati (1676-1754) e l'analisi matematica nella Marca trevigiana

GIORGIO T. BAGNI
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"
Ateneo di Treviso

Studioso profondo e straordinariamente versatile, Jacopo Riccati visse in uno dei periodi più importanti dell'intera storia della matematica, l'epoca in cui l'ambiente scientifico europeo era pervaso dall'entusiasmo per l'introduzione dei grandi concetti del Calcolo infinitesimale e per la loro feconda applicazione a numerose questioni fisiche, particolarmente di meccanica ([1]).

Jacopo Riccati nacque a Venezia il 28 maggio 1676; dopo avere compiuto gli studi a Brescia ed a Padova, ritornò nel palazzo di famiglia a Castelfranco Veneto e sposò Elisabetta Onigo, dalla quale ebbe diciotto figli. La vita di Riccati si svolse quasi interamente tra Castelfranco Veneto e Treviso, dove lo studioso si stabilì definitivamente nel 1749, in un palazzetto di Borgo SS. Quaranta (davanti allo sbocco dell'attuale via Riccati); Jacopo Riccati morì a Treviso il 15 aprile 1754 e fu sepolto nella Cattedrale trevigiana (la semplice pietra tombale è tuttora visibile presso la porta laterale aperta verso il Battistero proprio in corrispondenza della cappella gentilizia della famiglia Riccati). L'infaticabile studioso trevigiano si dedicò a questioni di matematica, di fisica, di idrologia, di scienze naturali, di storia, di filosofia, di teologia, di pedagogia, di architettura, di economia; scrisse molti ampi trattati, innumerevoli note e memorie, alcune opere letterarie ([2]).

La storia della cultura ricorda Jacopo Riccati particolarmente per i molti importanti contributi nel campo dell'Analisi matematica, tra i quali spicca l'*equazione differenziale di Riccati*, equazione non lineare originariamente presentata da Riccati e successivamente generalizzata da Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783).

Modernamente, l'equazione differenziale di Riccati viene scritta nella forma:

$$y' = \mathrm{A}(x)y^2+\mathrm{B}(x)y+\mathrm{C}(x)$$

L'equazione differenziale di Riccati è presente in tutti i trattati di Analisi dal Settecento ai giorni nostri; così Vincenzo Brunacci (1768-1818) la ricorda nel proprio grande *Corso di Matematica sublime* del 1804:

"Andiamo [...] a parlare della separazione delle variabili nella celebre equazione conosciuta sotto il nome di equazione Riccatiana, perché il Conte Jacopo Riccati è stato il primo che ne abbia cercata la separazione delle variabili, ed abbia assegnati i casi, nei quali questa separazione succede" ([3]).

L'integrazione di questa equazione è stata tradizionalmente attribuita a Daniel Bernoulli (1700-1782); ricordiamo però che approfondite e documentate ricerche storiche, recentemente condotte da Lucia Grugnetti ([4]), hanno radicalmente rivalutato il contributo originale di Jacopo Riccati nella ricerca sull'integrazione della celebre equazione differenziale, provando così che lo studio del matematico trevigiano fu dettagliato ed approfondito e deve quindi essere considerato decisivo nell'elaborazione del procedimento risolutivo che viene utilizzato anche ai giorni nostri.

L'equazione differenziale di Riccati è frequentemente applicata in molti settori della matematica moderna ([5]). Storicamente, tuttavia, l'importanza connessa a tale equazione è attribuita all'innovativa impostazione dei metodi risolutivi proposti: grazie ad un cambiamento di variabile, Riccati riuscì a ridurre l'equazione proposta del secondo ordine ad un'equazione differenziale del primo ordine, aprendo così la via a studi di enorme importanza per l'evoluzione della disciplina.

Scrive a tale proposito Morris Kline, uno dei massimi storici della matematica contemporanei:

"L'opera di Riccati è significativa non soltanto perché considerò equazioni differenziali del second'ordine, ma anche perché ebbe l'idea di ricondurre le equazioni del second'ordine a equazioni del prim'ordine. Quest'idea di ridurre l'ordine di un'equazione differenziale ordinaria con un qualche artificio si rivelerà uno dei metodi fondamentali per la trattazione delle equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore" ([6]).

Nella risoluzione dell'equazione di Riccati, quindi, troviamo esemplificato uno spunto assai fecondo: la ricerca di una trasformazione per ottenere la riduzione dell'ordine dell'equazione, idea che porterà il grande Leonhard Euler (1707-1783) ad elaborare il metodo generale per l'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee di ordine qualsiasi.

Attualità dei procedimenti riccatiani

La storia della matematica è ricca di procedimenti ricorsivi, spesso assai eleganti ed ingegnosi, introdotti ed utilizzati da molti grandi studiosi di ogni tempo: Jacopo Riccati illustrò un interessante procedimento nella breve memoria *Della connessione che passa tra la costruzione dell'equazioni analitiche, e la quadratura d'infinite curve algebraiche* che risale almeno al 1710, essendo esplicitamente citata in una lettera inviata dal matematico Bernardino Zendrini allo stesso Riccati in data 21 marzo 1710 ([7]).

In questa memoria, Jacopo Riccati si occupa della quadratura di alcune funzioni razionali; in particolare, di impostazione decisamente moderna è il procedimento iterativo esposto da Riccati per la quadratura di:

$$x^n + xy = y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{x^n}{1-x}$$

(essendo n un numero naturale maggiore di 1). Sostituendo la seconda equazione nella prima si ottiene:

$$x^n + xy = \frac{x^n}{1-x} \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{x^{n-1}}{1-x} - x^{n-1}$$

e così via, ripetendo il metodo, sino ad ottenere:

$$\frac{x^n}{1-x} = -x^{n-1} - x^{n-2} - x^{n-3} - 1 + \frac{1}{1-x}$$

Non è difficile osservare che tutto ciò equivale alla divisione del numeratore x^n per il denominatore $(1-x)$; ma particolarmente interessante è la descrizione iterativa del procedimento, dovuta allo stesso Jacopo Riccati. Riportiamo le parole originali dello studioso trevigiano:

'La seconda equazione è constitutiva d'una delle infinite parabole. La prima poi [...] non è diversa dall'equazione della curva proposta da principio, se non in questo, che la dignità di x s'è abbassata di un grado [...] Si continui lo stesso modo di operare, fin a tanto che la potestà di x si tolga affatto di mezzo, e si tramuti in una costante [...] Che se poi col nostro metodo si proseguirà nell'analisi, di maniera che la potestà di x^n non solo si cambi in una costante, ma in oltre di positiva diventi negativa; si scoprirà la quadratura dell'infinite curve" ([8]).

Inoltre l'Autore conferma, in un breve Scolio riportato al termine della memoria citata, di essere a conoscenza delle altre semplici quadrature possibili dell'esempio esaminato. Scrive Riccati:

'Sò benissimo, che la quadratura [...] si poteva ottenere con il metodo comune, separando le indeterminate [...] Contuttociò ho battuta una strada diversa, per aver a mio giudizio una soluzione più elegante" ([9]).

L'importanza del procedimento non è evidentemente collegata soltanto alla semplice formula ottenuta, peraltro già nota al momento della stesura della nota (lo stesso Riccati fa riferimento ad una precedente memoria bernoulliana). Di particolare interesse appare l'uso consapevole e proprio di una tecnica ricorsiva chiara ed elegante; dunque Jacopo Riccati non nasconde le proprie scelte metodologiche, confermando, con ciò, di possedere una visione della matematica e delle sue possibilità applicative assai dinamica e moderna.

Jacopo Riccati e la serie di Grandi

Un'interessante osservazione di Riccati riguarda la serie numerica indeterminata:

$$1-1+1-1+\ldots$$

detta serie di Grandi. Nel 1703, infatti, il matematico e teologo Guido Grandi (1671-1742) affermò:

'Mettendo in modo diverso le parentesi nell'espressione $1-1+1-1+\ldots$ io posso, volendo, ottenere 0 o 1. Ma allora l'idea della creazione *ex nihilo* è perfettamente plausibile" ([10]).

Secondo Grandi, la somma della serie in esame sarebbe ½; tale osservazione è riconducibile alla nota formula:

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(-x)^k = 1-x+x^2-x^3+x^4-\ldots+\ldots=\frac{1}{x+1}$$

la cui validità richiede però che sia verificata l'ipotesi $|x|<1$, ipotesi che rende inaccettabile la posizione $x = 1$ implicitamente effettuata da Grandi nel caso ora esaminato ([11]).

Le precedenti considerazioni sono dunque scorrette: la serie in questione è oggi classificata tra le serie indeterminate, intendendo con ciò che la successione delle sue somme parziali non ammette alcun limite (finito o infinito). Ma l'intera questione, nel Settecento, era assai meno chiara e sulla serie di Grandi si sviluppò un ampio ed acceso dibattito.

Jacopo Riccati si occupò della serie di Grandi nel proprio *Saggio intorno al Sistema dell'Universo*, il ponderoso trattato scritto tra il 1751 ed il 1754 (anno della morte dello studioso trevigiano):

"Un acutissimo Geometra, ed è l'Ab. D. Guido Grandi, si è dato a credere, che il niente replicato infinite volte si renda atto a produrre una qualche cosa" ([12]).

Così è ricordata la ricerca di Grandi nell'opera di Jacopo Riccati:

"Nè desume egli la pretesa dimostrazione della grandezza ½ esposta per la frazione 1/(1+1), nella quale istituita colle regole note una iterata divisione, che mai a fine non si riduce, mi si presenta la serie composta di termini infiniti $1-1+1-1+1-1+1-1$ et.cet. = 1/(1+1)" ([13]).

Ecco la critica riccatiana:

"Quanto il discorso è ingegnoso, altrettanto è fallace, perché si tira dietro delle insanabili contraddizioni. E vaglia il vero; assunta la frazione $n/(1+1)$, col solito metodo ne formo la serie $n-n+n-n+n-n+n-n$ et.cet. = $n/(1+1)$. E giacché si verifica l'equazione $1-1 = n-n$, o sia $1+n = n+1$, ne segue, che, prorogate del pari all'infinito amendue le progressioni, tanti nulla nè più nè meno conterrà la prima, quanti la seconda. Ma sta in mio arbitrio dinotare per la spezie n qualsisia quantità finita, o infinitamente grande, o piccola d'ogni genere; dunque gl'infiniti zeri saranno eguali a norma della supposizione, che mi piacerà d'eleggere, a grandezze tali, che fra loro si risponderanno non solamente in qualunque assegnabile proporzione, ma di più in una o per un verso, o per l'altro infinitamente lontana" ([14]).

In altri termini, se il procedimento (iterativo) di Grandi fosse stato:

$$\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}=1-\left(1-\frac{1}{2}\right) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}=1-1+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}=1-1+\left(1-\frac{1}{2}\right)\ldots$$

un analogo procedimento avrebbe potuto essere proposto anche per:

$$\frac{n}{2}=1-\frac{n}{2} \Rightarrow \frac{n}{2}=n-\left(n-\frac{n}{2}\right) \Rightarrow \frac{n}{2}=n-n+\frac{n}{2} \Rightarrow \frac{n}{2}=n-n+\left(n-\frac{n}{2}\right)\ldots$$

Se l'argomento è modernamente carente, la conclusione espressa da Jacopo Riccati appare chiara e corretta:

"Il paralogismo consiste in ciò, che il lodato Scrittore ha fatto uso d'una serie tra quelle, che dagli Analisti si chiamano parallele, dalle quali, come altresì dalle divergenti, nulla ci vien fatto di concludere. E la ragione si è, che per quanto si vada avanzando nella progressione, non succede mai, che i termini susseguenti possano trascurarsi, siccome incomparabili cogli antecedenti; la qual proprietà alle sole serie convergenti si compete" ([15]).

Gottfried Wilhelm Leibniz in una lettera trasmessa tramite Bourguet (senza data, ma probabilmente del 1715) scrisse:

"Giudizio del Sig.r Leibnizio intorno la Dissertazione del Co. Jacopo Riccati [...] Io vi supplico Signore di ringraziare il Sig.r Conte Riccati, ed il Sig.r Zendrini della bontà, che mostrano per me. Io vorrei loro poter essere utile in qualche cosa. Frattanto io desidero che essi continuino ad introdurre in Italia le scienze profonde. Io non so s'eglino abbiano veduto quello ch'ho notato sopra la questione se $1-1+1-1$ ecc. all'infinito è uguale a ½ come il R. P. Grandi ha asserito, e in qualche maniera con ragione. Imperciocché $1/(1+x)$ è $1-x+xx-x^3+x^4-x^5$ ecc. ed allora che la lettera x si eguaglia ad 1, ne vien $1/(1+1) = 1-1+1-1+1-1$ ecc. $=$ ½ [...] Sembra, che questo sia un assurdo manifesto" ([16]).

La considerazione di Riccati è inserita nella mentalità che il mondo matematico andava progressivamente sviluppando alla metà del XVIII secolo, ovvero verso la moderna consapevolezza dei rischi associati all'impiego scarsamente rigoroso delle serie non convergenti (indeterminate, come la citata serie di Grandi, e divergenti). La posizione riccatiana (espressa tra il 1751 ed il 1754) anticipò dunque quella espressa da d'Alembert, che nel 1768 affermò:

"Per quanto mi riguarda, riconosco che tutti i ragionamenti e i calcoli basati su serie non convergenti [...] mi sembrano estremamente sospettosi" ([17]),

La posizione del grande scienziato francese, esplicitamente polemica nei confronti di alcune celebri dimostrazioni di Euler, ebbe nell'ambiente scientifico settecentesco una risonanza vastissima ed immediata, che superò dunque ampiamente quella attribuibile al fugace accenno riccatiano. Ma non possiamo comunque dimenticare che fu proprio Jacopo Riccati ad indicare chiaramente, oltre un decennio prima di d'Alembert, la moderna intuizione del ruolo delle serie numeriche nell'Analisi matematica, nella direzione delle fondamentali ricerche di Gauss (1812), di Bolzano (1817) e di Cauchy (1821).

Note e riferimenti bibliografici

(1) Si veda ad esempio: **G. Loria**, *Storia delle Matematiche dall'alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino 1929-1933 (II ed.: Hoepli, Milano 1950; rist. anast.: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982). Sulla nascita e lo sviluppo del Calcolo infinitesimale segnaliamo anche i lavori specifici: **U. Bottazzini**, *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino 1981. **U. Bottazzini**, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino 1990. **N. Bourbaki**, *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano 1963. **G. Castelnuovo**, *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna 1938 (rist.: Feltrinelli, Milano 1962). **P. Dupont**, *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale. II. Newton e Leibniz.* Cortina, Torino 1981.

(2) I lavori di Jacopo Riccati sono raccolti nella grande edizione lucchese: **J. Riccati**, *Opere*, tomi I, II, III, Jacopo Giusti, Lucca 1761, 1762, 1763; tomo IV, Giuseppe Rocchi, Lucca 1765. A tale pubblicazione contribuirono largamente i figli Vincenzo e Giordano ed in essa (v. IV) è inclusa l'importante nota biografica: **C. Di Rovero**, *Vita del Conte Jacopo Riccati* (edizione con *Introduzione* a cura di **M.L. Soppelsa**, Asolo 1990). Per quanto riguarda le equazioni differenziali, si veda in particolare: **J. Riccati**, *Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali di primo grado, e della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori*, in cui sono riportate e commentate le lezioni tenute dall'Autore a Lodovico da Riva ed a Giuseppe Suzzi nel 1722; il trattato è pubblicato in *Opere*, cit., t. I, pp. 433-598. L'equazione differenziale di Jacopo Riccati è presentata, originariamente, nelle due memorie: **J. Riccati**, *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, in: "Acta Eruditorum Lipsiae", 1722, e **J. Riccati**, *Appendix in animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, in: "Acta Eruditorum Lipsiae", 1723: anche queste note sono riportate in *Opere*, cit., t. III, pp. 83-88 e 90-97.

(3) **V. Brunacci**, *Corso di Matematica sublime*, Allegrini, Firenze 1804, III, p. 99.

(4) **L. Grugnetti**, *L'equazione di Riccati: un carteggio inedito tra Jacopo Riccati e Nicola II Bernoulli*, in: "Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche", VI, 2, pp. 45-82, 1986. È la nota fondamentale per l'attribuzione della paternità della risoluzione dell'equazione differenziale di Riccati. Si veda anche: **L. Grugnetti**, *Sulla vecchia ed attuale equazione di Riccati*, in: "Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari", LV, 1, pp. 7 -24, 1985.

(5) Si veda ad esempio: **S. Bittanti** (a cura di), *Workshop on the Riccati equation in Control, System and Signals (Como, June 26-28 1989)*, Bologna 1989. Il volume raccoglie gli atti di un recente convegno dedicato all'equazione differenziale di Riccati.

(6) **M. Kline**, *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento*, Einaudi, Torino 1991, pp. 564-565. Si veda anche: **G.T. Bagni**, *Jacopo Riccati matematico*, in: "La matematica e la sua didattica", anno II, n. 3, pp. 45-50, Armando, Roma 1988; **G.T. Bagni**, *I procedimenti di Jacopo e di Vincenzo Riccati nella storia delle equazioni differenziali*, in: "Rivista di Matematica dell'Università degli Studi di Parma", in via di pubblicazione (1996).

(7) La memoria riccatiana è ricordata in: **G.T. Bagni**, *La Matematica nella Marca. Jacopo Riccati*, Edizioni Teorema, Treviso 1990; **G.T. Bagni**, *Attualità di procedimenti iterativi nella storia della matematica*, in: "La matematica e la sua didattica", anno VI, n. 3, pp. 22-24, Armando, Roma 1992; **G.T. Bagni**, *La matematica nella Marca: Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati*, Edizioni Teorema, Treviso 1993; **G.T. Bagni**, *Jacopo Riccati (1676-1754) e la storia delle equazioni differenziali*, in: "Διδακτικ και Ιστορια των Μαθηματικων", a cura di A. Gagatsis, Erasmus ICP-94-G-2011/11, pp. 207-218 e pp. 617-628, Thessaloniki 1995.

(8) **J. Riccati**, *Opere*, cit., III, p. 114.

(9) **J. Riccati**, *Opere*, cit., III, p. 114.

(10) L'affermazione è ricordata in: **G.E. Silov**, *Analisi matematica*, Mir, Mosca 1978, I, p. 185. Sull'impostazione analitica di Grandi si veda anche: **L. Tenca**, *Relazioni tra G. Saccheri e il suo allievo G. Grandi*, in: "Studi matematici-fisici", Milano 1952, pp. 19-45.

(11) **G.T. Bagni**, *La Matematica nella Marca. Jacopo Riccati*, cit. **G.T. Bagni**, *Le serie numeriche e Jacopo Riccati*, in: "Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso", anno acc. 1995-1996, Zoppelli, Treviso, in via di pubblicazione (1996).

(12) **J. Riccati**, *Opere*, cit., I, p. 86.

(13) **J. Riccati**, *Opere*, cit., I, pp. 86-87.

(14) **J. Riccati**, *Opere*, cit., I, p. 87.

(15) **J. Riccati**, *Opere*, cit., I, p. 86.

(16) **A.A. Michieli**, *Una famiglia di matematici e poligrafi trevigiani: i Riccati. I. Jacopo Riccati*, in: "Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti", CII, II, Ferrari, Venezia 1943, p. 579; **G.T. Bagni**, *La Matematica nella Marca. Jacopo Riccati*, cit., p. 93. In realtà Leibniz fa implicitamente riferimento all'argomento probabilistico, sostenuto con Ch. Wolf.

(17) **G.E. Silov**, *Analisi matematica*, cit., **G.T. Bagni**, *Le serie numeriche e Jacopo Riccati*, cit.