

Le osservazioni geometriche del trevigiano Paolo Aproino (1586-1638), corrispondente di Galileo

GIORGIO T. BAGNI

Dipartimento di Matematica, Università di Roma “La Sapienza”
Ateneo di Treviso

La cultura a Treviso tra il Medioevo e l’Età moderna

Molti studiosi operano a Treviso tra il Cinquecento ed il Settecento; ma la storia della cultura ed in particolare della scienza nella Marca trevigiana è certamente assai più antica: già da uno statuto comunale del 1231, ad esempio, apprendiamo che a quell’anno risale la prima decisione di invitare in Treviso un docente di Medicina. Angelo Marchesan, storico valente, Bibliotecario della Biblioteca Capitolare di Treviso ed Archivista Vescovile, in *Treviso medievale* sottolinea:

“Di mano in mano che assurgeva a grandezza o a maggiore libertà, il Comune sentiva anche più vivo il bisogno della sua indipendenza da ogni altra servitù [...] Uno di questi bisogni, sentito quanto mai, [...] fu senza dubbio quello di poter avere in patria delle scuole speciali, o degli speciali maestri, ai quali avessero potuto rivolgersi tutti quelli che avevano desiderio di procurarsi una proficua istruzione specialmente nelle scienze legali, sia civili che canoniche, e nella medicina” (1).

Nel 1314 viene fondato lo Studio Generale o Università di Treviso, istituzione purtroppo effimera (con appena un decennio di vita). La scuola trevigiana del tardo Medioevo si mantiene comunque vitale ed efficiente: sono attive alcune scuole pubbliche e private e nel 1360 Pietro di Baone, Vescovo di Treviso, istituisce la Confraternita di San Liberale, dedicata all’istruzione degli allievi meno abbienti.

Una dettagliata trattazione meriterebbero inoltre le Accademie, sorte in Treviso tra il Cinquecento ed il Seicento: il medico Bartolomeo Burchelati promuove la costituzione delle Accademie dei Cospiranti, degli Anelanti e

degli Aggiustati; dello stesso periodo sono le Accademie degli Intronati e degli Occulti. Così Giovanni Bonifaccio, nella monumentale *Istoria di Trivigi* del 1744, ricorda la fondazione di alcune Accademie trevigiane:

“[1518] Cessato lo strepito dell’arme, i Trivigiani col favore d’Alteniero Avogaro degli Azzoni, e di Ortensio Tiretta Dottore delle Leggi drizzarono una onoratissima Accademia nella quale condotti diversi Professori di lettere, e maestri di cantare, suonare, schermire, ballare, e cavalcare, s’attendea a’ studj nobili, e ad esercizj cavallereschi. [1585] Nel medesimo tempo in Trivigi fu eretta la nostra Accademia de’ Solleciti, la cui impresa è una Musa di marmo mezza fornita col motto di Fidia DONEC AD UNGUEM. [1608] La quale [Città] però molto consolata restò, per essersi in essa, così anco esortando detto suo Rettore, eretta una nobile Accademia di lettere, e d’arme, con nome agli Accademici de’ Perseveranti, de’ quali fu primiero Principe Girolamo Tiretta, Gentiluomo onoratissimo, e ad un tratto fu provvisto di casa capace per gli esercizj militari, e letterarj, e furono condotti ministrj a ciò necessari con degni stipendj; e nel seguente anno [1609] nel giorno della Natività della B. V., fu con una solennissima Messa cantata aperta essa Accademia, e agli Accademici esercizj dato cominciamento” (2).

L’Accademia dei Solleciti opera sino alla metà del XVIII secolo (alcuni Soci di tale istituzione fonderanno la Colonia del Sile, collegata con l’Arcadia, fino all’inclusione nell’Accademia Agraria, nata il 28 luglio 1769 con un decreto del Senato Veneto) (3).

Paolo Aproino (1586-1638), Canonico della Cattedrale di Treviso

Il contesto culturale di Treviso nella prima Età moderna è dunque assai ricco e vivace: molti sono i trevigiani ai quali spetta ben più di una citazione nella storia della scienza. Alcuni studiosi operanti nella Marca, tuttavia, sono ricordati solo marginalmente; tra questi, merita un’ampia presentazione e forse una rivalutazione adeguata Paolo Aproino, nato a Treviso nel 1586 e morto a Venezia nel 1638, Canonico della Cattedrale di Treviso, scienziato dai molteplici interessi e corrispondente e collaboratore di Galileo Galilei (4).

Il rapporto che lega Paolo Aproino a Galileo (rapporto che da una fattiva collaborazione scientifica si evolve presto in sincera amicizia) è centrale per una corretta comprensione della personalità scientifica dello studioso trevigiano: al seguito di un così grande maestro, Aproino si occupa di fisica generale, di idrologia, di astronomia, di acustica (sottopone a Galileo un originale progetto per la realizzazione di un amplificatore). E Galileo non manca di apprezzare le qualità del corrispondente trevigiano: Paolo Aproino è

ricordato nella Sesta Giornata del galileiano *Dialogo delle Nuove Scienze*, in occasione di una dissertazione di argomento fisico ⁽⁵⁾.

Uno dei più significativi contributi culturali di Aprino è collegato ad un'acuta osservazione contenuta in una lettera (1613) del trevigiano a Galileo, e riguarda l'opportunità di approssimare una circonferenza con un poligono regolare (con un "grande" numero di lati): una tecnica geometrica che affonda, come vedremo, le proprie radici nella storia della matematica. Proprio su tale approssimazione si è infatti basata, per secoli, la ricerca del valore "esatto" dell'area di un cerchio, noto il diametro di esso.

Prima di illustrare la posizione di Paolo Aprino, descriviamo brevemente lo svolgersi della secolare questione riferita al problema della *quadratura del cerchio* con una selezione dei tentativi che hanno caratterizzato la ricerca ⁽⁶⁾.

L'approssimazione del cerchio con i poligoni regolari

Il calcolo approssimato dell'area del cerchio e quello della misura della circonferenza, nella storia della matematica, rappresentano una questione importante ed affascinante: innumerevoli sono i tentativi di approssimazione di una delle più celebri costanti della matematica, π , il rapporto tra la misura di una circonferenza e quella del suo diametro.

L'adozione del simbolo π per indicare il rapporto tra le misure di una circonferenza e del suo diametro risale a *Synopsis palmariorum matheseos* (1706) di William Jones (1675-1749). Ma il problema dell'approssimazione di π è ben più antico e può essere riferito addirittura alle matematiche pre-elleniche.

Gli Egizi raggiungono risultati apprezzabili nell'approssimazione di π : nel papiro Rhind (1650 a.C., probabilmente copia di un documento databile intorno al 2000-1800 a.C.) troviamo enunciata una regola che equivale ad approssimare π con 3,16049. Tale valore, tuttavia, non è indicato come costante, ma è solamente desumibile da esempi pratici.

La Bibbia propone un'approssimazione di π meno precisa (databile intorno al X sec. a.C.): nel I Libro dei Re leggiamo che Salomone fa costruire

“un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti” (1 Re, 7, 23).

Evidentemente ciò equivale a considerare pari a 3 il rapporto tra la misura della circonferenza e quella del suo diametro.

Anche presso i Babilonesi è inizialmente accettato, per π , il valore 3; ma in una tavoletta si trova un elenco di dati sulla misura del raggio di un cerchio,

basata sulla misura del perimetro dell'esagono regolare inscritto, che equivale all'approssimazione di π con 3,125.

Il più efficace approccio al problema della determinazione di π , adottato, nei secoli, dagli studiosi consiste nell'approssimare il cerchio con una successione di poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio dato: al crescere del numero dei lati di questi, diminuisce la differenza tra l'area del poligono e l'area del cerchio, nonché tra la misura del perimetro del poligono e la misura della circonferenza. Archimede (287-212 a.C.) giunge all'approssimazione $3,1408 < \pi < 3,1428$. Uno dei più precisi valori di π calcolato nell'Antichità è dovuto a Tolomeo, che intorno al 150 d.C. propone $3,1416$ (lo stesso valore, nella forma $\frac{3393}{1080}$, sarà adottato dall'indiano Aryabhata, tra il V ed il VI secolo).

Ricordiamo infine un'interessante opera cinese dedicata al calcolo di π , intitolata *Tsu-Chung-Chih* (430-501 d.C.), pervenutaci purtroppo incompleta. L'approssimazione raggiunta in tale lavoro è $3,1415926 < \pi < 3,1415927$ e l'Autore è consapevole che essa è collegata alla valutazione del perimetro dei poligoni regolari inscritti in una circonferenza, o circoscritti ad essa ⁽⁸⁾.

Il calcolo di π nell'età moderna

L'interesse per il calcolo di un valore approssimato di π rinasce nel mondo occidentale quattordici secoli dopo Tolomeo, con Adrien van Roomen (1561-1615), Ludolph van Ceulen (1540-1610) e Willebrod Snell (1581-1614). I procedimenti utilizzati sono ancora legati all'approssimazione del cerchio con poligoni regolari inscritti o circoscritti, ma la scrittura dei numeri in forma decimale e l'uso tecnicamente evoluto delle frazioni consentono di raggiungere un grado di precisione assai più elevato di quello conseguito nell'Antichità ⁽⁹⁾.

Utilizzando il descritto metodo di approssimazione, anche Francois Viète (1540-1603) si occupa del calcolo di π ; egli, nel 1593, ricava un'elegante formula per il calcolo di π . Considerando i poligoni regolari di 4, 8, 16, 32, ... lati, Viète giunge all'espressione che può essere modernamente indicata con:

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{90^\circ}{2} \cdot \cos \frac{90^\circ}{4} \cdot \cos \frac{90^\circ}{8} \cdot \dots = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \dots$$

Il prodotto infinito di Viète inaugura un importante filone di ricerca attinente al calcolo di π : al tentativo di determinare un grande numero di cifre decimali si sostituisce la più moderna proposta di algoritmi esatti (ma *infiniti*), che forniscono π con una precisione dipendente dal numero dei passi eseguiti.

Anche lo sviluppo del calcolo infinitesimale rende possibile l'elaborazione di importanti espressioni per π : ci limiteremo a menzionare le ricerche di Wallis (1655), di Brouncker (1660), di Leibniz (1674) e di Euler (1736).

La ricerca di un valore decimale esatto per π termina nel 1761, anno in cui Johann Heinrich Lambert (1728-1777) dimostra che π è un numero irrazionale, ovvero che non può essere scritto in forma di numero decimale finito né di numero decimale periodico.

Le osservazioni di Paolo Aprozino

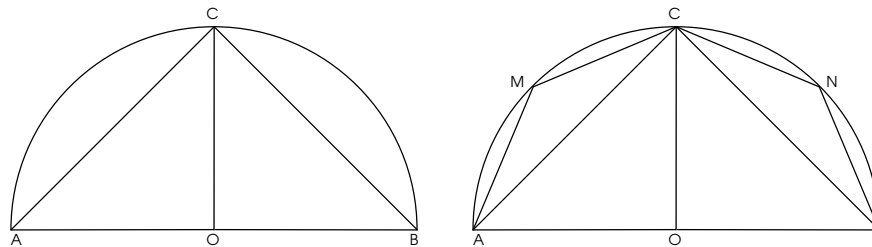
Molti sono, nella storia della scienza, gli estimatori del procedimento di approssimazione del cerchio con un poligono regolare con un numero "molto grande" di lati. Ma tale metodo, certamente importante e fecondo, ha trovato anche qualche contestatore: uno di questi è proprio Paolo Aprozino.

In una lettera di Aprozino a Galileo Galilei, datata 27 luglio 1613 ⁽¹⁰⁾, sono sinteticamente riportate alcune interessanti osservazioni dello studioso trevigiano sull' "*infinibile*" e sull' "*immensurabile*". In particolare, riportiamo quanto scrive Aprozino sull'approssimazione del cerchio con il poligono regolare:

[Mi sembra che] non si adatti a bastanza il transito di comparatione che si fa dal poligono di moltissimi lati al circolo, imaginandolo di infiniti; perché *se ben in quantità si va prossimando alla misura, nella specie però della figura si va sempre più allontanando*, ché il poligono di mille lati mi pare più differente dal circolo che non è il triangolo, tanto quanto mille è più differente da uno che non è tre" (il corsivo è nostro).

L'approccio di Aprozino è dichiaratamente qualitativo, e non esclusivamente quantitativo come invece tradizionalmente avviene nel caso in questione. Infatti è ben noto (e lo era anche all'inizio del XVII secolo) che, al crescere del numero dei lati, la misura del perimetro di un poligono regolare approssima sempre più la misura della circonferenza del cerchio circoscritto (o, equivalentemente, inscritto) a tale poligono; in modo del tutto analogo, l'area di tali poligoni, al crescere del numero dei lati, fornisce una sempre migliore approssimazione dell'area del cerchio. Se però accettiamo di considerare la circonferenza come una figura delimitata da "un solo" lato (e *priva di angoli*), l'osservazione di Aprozino può apparire giustificabile ed addirittura profonda: al crescere del numero dei lati e degli angoli del poligono regolare, la "struttura" della figura (*dal punto di vista del numero dei lati e degli angoli*) può sembrare

progressivamente ed irrimediabilmente allontanarsi dalla “struttura” del cerchio.



Impostando la questione con la moderna analisi matematica (che Aprouino, nel 1613, non poteva certo conoscere), notiamo che la funzione espressa da $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ ha per grafico cartesiano una semicirconfenza di raggio $r > 0$ (nella figura, una semicirconfenza di centro O); è noto che tale funzione è continua in tutto il proprio dominio $\{x \in \mathbf{R}: -r \leq x \leq r\}$ ed è derivabile in ogni punto interno ad esso, ovvero in ogni punto dell'insieme $\{x \in \mathbf{R}: -r < x < r\}$.

Passando dalla semicirconfenza alla spezzata, vengono ad inserirsi uno o più punti di non derivabilità: ad esempio, la funzione espressa dalla spezzata ACB è continua in tutto il proprio dominio $\{x \in \mathbf{R}: -r \leq x \leq r\}$, ma *non* risulta derivabile in *ogni* punto interno ad esso, per la presenza di un punto angoloso C in corrispondenza di $x = 0$. Al crescere del numero n dei lati della spezzata (si consideri AMCNB, con M e N punti medi rispettivamente degli archi AC e CB) viene a crescere il numero di punti di non derivabilità (i punti angolosi), e questo sembra concordare con le osservazioni dello studioso trevigiano.

Aprouino non è però in grado di analizzare la situazione limite, al tendere di n a $+\infty$, in cui il numero dei punti interni di non derivabilità non ammette un limite infinito, bensì si riduce a 0 (nel caso della semicirconfenza). Egli si limita alla pur importante considerazione delle situazioni poligonali e sottolinea che, per tali casi, la “specie” della figura sembra essere progressivamente contrastata dal procedimento di approssimazione (“nella specie però della figura si va sempre più allontanando”).

L'osservazione dello studioso trevigiano è originale, insolita, e rivela un'acuta autonomia di valutazione. Essa può e deve essere apprezzata e storicamente rivalutata, in particolare nell'ambito di una moderna impostazione formale del problema dell'approssimazione delle figure geometriche.

Note e riferimenti bibliografici

(1) In: **A. Marchesan**, *Treviso medievale*, v. II, Tipografia Funzionari Comunali, Treviso 1923, pp. 235-267.

(2) In: **G. Bonifaccio**, *Istoria di Trivigi*, Albrizzi, Venezia 1744, pp. 525, 538, 542, una delle più importanti opere sulla storia della città veneta.

(3) **A. A. Michieli**, *Le Accademie e l'Ateneo di Treviso*, Archivio Veneto-Tridentino, Ferrari, Venezia 1923; è citato: **B. Burchellati**, *Commentariorum memorabilium multiplicis historiae tarvisinae locuples promptuarium*, Reghettini, Treviso 1616.

(4) Si vedano le due note: **A.A. Michieli**, *Il Canonico trevigiano Paolo Aproino discepolo ed amico del Galilei*, in: "Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti", a. acc. 1941/42, t. CI, parte II, Venezia 1942, **A.A. Michieli**, *Ancora del Can. Paolo Aproino, della sua gente e della coltura del suo tempo (nota II)*, in: "Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti", a. acc. 1946/47, t. CV, Venezia 1947. Dello stesso Autore: **A.A. Michieli**, *Storia di Treviso*, Istituto Tipografico dei Comuni, Treviso 1958 (riedizione a cura di **G. Netto**, Istituto Tipografico dei Comuni, Treviso 1981). **G.T. Bagni**, *L'approssimazione di π ed un'annotazione del trevigiano Paolo Aproino (1586-1638)*, in: "Atti dell'Ateneo di Treviso", anno acc. 1994-1995, Treviso, in via di pubblicazione (1995).

(5) Si veda: **M. Giuia**, *Storia delle scienze ed epistemologia. Galilei, Boyle, Planck*, Chiantore, Torino 1945. Aproino è ricordato in: **G. Galilei**, *Le Opere*, a cura di **A. Favaro**, Barbera, Firenze 1890-1909: interessanti sono le lettere di Galilei ad Aproino sui "periodi del flusso e riflusso" del Sile, v. XVII, lett. 3678, pp. 286-287, nonché il paragone con il galileiano *Discorso sul flusso e reflusso del mare*, v. V, pp. 371-395. La citazione di Aproino nel *Dialogo delle Nuove Scienze* è nel v. VIII, pp. 321-322.

(6) Si vedano: **O. Neugebauer**, *The exact sciences in Antiquity*, Brown University Press, Providence, Rhode Island 1957 (traduzione italiana di A. Carugo: *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano 1974); **H.C. Schepler**, *The Chronology of Pi*, in: "Mathematics Magazine", 23, 1949-1950). Inoltre: **G.T. Bagni**, *L'approssimazione di π , i poligoni regolari e la circonferenza*, in: "L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate", v. 17B, n. 4 (8-1994), Paderno del Grappa 1994;

(7) Si vedano: **M. Kline**, *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento*, Einaudi, Torino 1991; **G. Loria**, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino 1929-1933 (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

(8) Interessante ed agevole è: **P.J. Davis**, *Il mondo dei grandi numeri*, Zanichelli, Bologna 1965. Rileva Davis (p. 74): "Non sembra che gli antichi abbiano avuto molto successo o molto interesse a calcolare π con molta precisione. Forse i loro metodi, un po' scomodi sebbene teoricamente perfetti, li ostacolarono. Forse furono messi in difficoltà dal loro sistema di numerazione, che era ancor più scomodo. Forse consideravano il problema da un punto di vista troppo pratico e non incontrarono mai un problema che richiedesse una risposta tanto precisa".

(9) Anche Dante Alighieri (1265-1321) ricorda la quadratura del cerchio:

“Qual è ‘l geomètra che tutto s’affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond’elli indige,
tal era io a quella vista nova;
veder volea come si convenne
l’imago al cerchio e come vi s’indova”

(*Paradiso*, XXXIII, 133-138). Dante ricorda il problema della quadratura del cerchio anche in due altre occasioni; in *Monarchia*, III, III, 2: «geometra circuli quadraturam ignorat, non tamen de ipsa litigat»; ed in *Convivio*, II, XIII, 27: «lo cerchio, per lo suo arco, è impossibile a quadrare perfettamente, e però è impossibile a misurare a punto». Si veda: **B. D’Amore**, *Cenni sulla presenza della matematica nell’opera di Dante*, in: **AA.VV.** *Dante e l’Enciclopedia delle scienze*. Atti del Convegno, Bologna 24 maggio 1990.

⁽¹⁰⁾ In **A.A. Michieli**, *Il Canonico trevigiano Paolo Aproino discepolo ed amico del Galilei*, cit., p. 171.