Cassamarca (1995) 11, IX, 2, 77-82

Il primo manuale di matematica stampato al mondo: *Larte de labbacho* (Treviso, 1478)

GIORGIO T. BAGNI
Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"
Ateneo di Treviso

I manuali medievali di aritmetica pratica

Nei primi decenni del XIII secolo, la diffusione in Europa dei risultati matematici arabi ed indiani è senza dubbio uno dei più importanti elementi di rinascita della matematica occidentale. La figura di maggior rilievo in àmbito europeo è Leonardo da Pisa, detto Fibonacci (1180-1250). Figlio di un funzionario pisano, Leonardo viaggia molto ed ha quindi la possibilità di entrare in contatto con le tradizioni culturali straniere; nel 1202 egli pubblica il manuale intitolato *Liber Abaci*, opera fondamentale per la storia della matematica ([1]).

La fortuna dei manuali di matematica, ed in particolare di quelli di aritmetica pratica, dunque, risale ad alcuni secoli prima dell'introduzione della stampa a caratteri mobili. Ma proprio l'invenzione della stampa determina il rapido diffondersi di alcuni interessanti testi didattici di aritmetica ([2]): poco più di due decenni dopo la pubblicazione della *Bibbia* ad opera di Giovanni Gutenberg a Magonza (1456), vede la luce a Treviso il primo libro di matematica a stampa pubblicato al mondo, *Larte de labbacho*, un manuale anonimo noto anche come l'*Aritmetica di Treviso* ([3]).

Gli studiosi concordano nell'accettare il 10 dicembre 1478 quale data di pubblicazione de *Larte de labbacho*, come peraltro riportato nell'incunabolo. Qualche discordanza emerge invece per quanto riguarda l'ignoto stampatore, che secondo alcuni sarebbe il fiammingo Gerardo da Lisa ([4]), secondo altri Michele Manzolo, detto Manzolino ([5]). Non si dimentichi che l'attivissimo capoluogo della Marca nel XV secolo può vantare, nel settore editoriale, una forte tradizione: già centocinquant'anni prima della pubblicazione de *Larte de labbacho*, Pace da Fabriano, indicato quale inventore della carta di lino, si stabiliva nella città veneta (Giuliano Romano, nella presentazione di una recente ristampa anastatica de *Larte de labbacho*, ricorda che ben sedici sono le tipografie operanti in Treviso nella seconda metà del XV secolo) ([6]). Notiamo inoltre che particolarmente stretta deve essere stata la collaborazione tra l'anonimo Autore del manuale di aritmetica ed il tipografo-editore: infatti, alcune considerazioni sulle fasi lunari sono riferite al *"decembrio del 1478"*: ciò confermerebbe che la stesura degli ultimi capitoli dell'opera in esame avviene pressoché contemporaneamente alla stampa delle prime sezioni del libro.

Il manuale trevigiano del 1478

Larte de labbacho è un manuale costituito da sessantadue pagine non numerate ([7]). L'opera, dichiaratamente dedicata *"a ciascheduno che vuole usare larte de la merchadantia chiamata vulgarmente larte de labbacho"*, è caratterizzata da una chiara impostazione didattica, ed è impreziosita da un ricco corredo di esempi, sapientemente calibrati per difficoltà.

L'opera si apre con la precisazione di alcune definizioni: innanzitutto, viene detto *numero "una moltitudine congregata* [...] *da molte unitade . et al meno de la do unitade : come e 2 el quale e lo primo e menore numero che se truova"* (ne *Larte de labbacho* sono considerati esclusivamente i numeri interi non negativi). Sono indicati come fondamentali, nella pratica aritmetica, cinque *"atti"*: il contare (con la numerazione in base dieci) e le quattro operazioni. Ne *Larte de labbacho* non compaiono i segni con i quali, modernamente, sono indicate le operazioni aritmetiche (+, –, ×, :), in quanto, rispetto alla data di pubblicazione del manuale trevigiano (1478), l'introduzione di tali segni è più tarda ([8]). Le operazioni aritmetiche sono così denominate:

- *"iongere"* (sommare), operazione indicata dalla parola *"et"*;
- *"levare*, *cavare"* (sottrarre), operazione indicata dalla parola *"de"*;
- *"moltiplicare"*, operazione indicata dalla parola *"fia"*;
- *"partire"* (dividere), operazione indicata dalla parola *"in"*.

Dal punto di vista pratico, l'Autore, pur ricordando la validità della proprietà commutativa dell'addizione, suggerisce di eseguire l'operazione in colonna disponendo sempre l'addendo maggiore sopra l'addendo minore; all'attenzione del lettore è inoltre segnalata l'opportunità di controllare l'esattezza dei calcoli effettuati, ad esempio attraverso la "prova del nove".

Per quanto riguarda la sottrazione, l'Autore ricorda che *"mazor da menore non puo fir cavato"* ed illustra numerosi esempi pratici (tratti dagli esempi già proposti per l'addizione), eseguiti in colonna.

Il metodo pratico di sottrazione

Il procedimento pratico di sottrazione "in colonna" presentato nel manuale si differenzia in modo significativo da quello maggiormente diffuso ai giorni nostri: mentre oggi la decina eventualmente "presa in prestito" viene tolta dalla cifra delle decine del minuendo, ne *Larte de labbacho* essa viene aggiunta alla cifra delle decine del sottraendo ([9]). Per descrivere l'esecuzione di 452−348, l'anonimo Autore scrive: *".8. de .2. non se puo cavare: ma .2. me compie .10. quel .2. che te ha compi el to .10. tu die iongere a laltro .2. che sora .8. dicendo .2. e .2. fa .4. el qual tu die scrivere per resto sotto quel .8. con questa conditione: che a la figura seguente al .8. zoe al .4. tu die iongere .1."*

Dal punto di vista dell'utilità pratica, il procedimento de *Larte de labbacho* (che non prevede il "prestito" tra le cifre del minuendo) appare di più agevole esecuzione rispetto al procedimento oggi usato (che prevede tale "prestito"). Ad esempio, si voglia eseguire, in colonna, la sottrazione 1002−824:

$$\begin{array}{r} 1\,0\,0\,2\,- \\ 8\,2\,4\,= \\ \hline 1\,7\,8 \end{array}$$

Il procedimento oggi diffuso (del "prestito" tra le cifre del minuendo) può comportare difficoltà per l'allievo; l'esecuzione di 2−4 non è possibile e la necessità di prendere in "prestito" una decina per eseguire 12−4 può apparire tecnicamente delicata: la più vicina cifra non nulla si trova infatti *tre cifre a sinistra* del nostro 2! I "prestiti" devono quindi avvenire ripetutamente, ed essi devono essere tutti tenuti ben chiari in mente (la sequenza 1-0-0-2 diviene: 0-9-9-10): tutto ciò potrebbe essere causa di qualche imbarazzo per l'allievo non abilissimo.

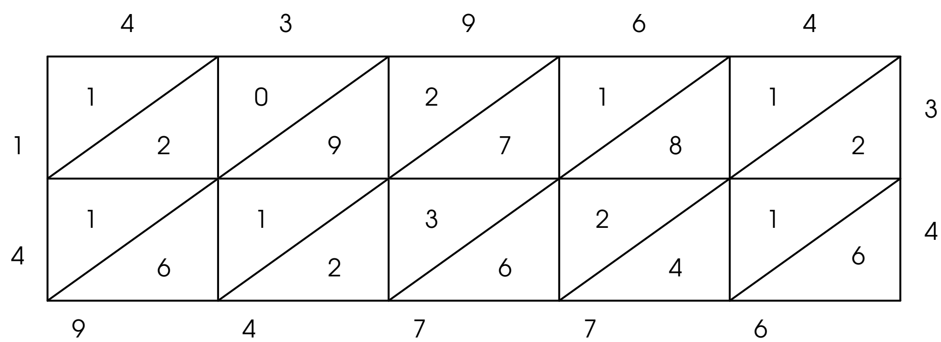
Il procedimento descritto ne *Larte de labbacho* si rivela più semplice: per "salire" da 4 a 12 (giacché da 4 a 2 non è possibile) si scrive 8 e si aumenta il 2 (seconda cifra da destra del sottraendo) di 1, ottenendo 3; da 3 a 10 (giacché da 3 a 0 non è possibile) si scrive 7 e si aumenta la cifra 8 di 1, ottenendo 9. Infine: 10−9 = 1, e l'operazione è conclusa. Non è dunque necessaria la lunga sequenza mnemonica delle "prese in prestito" e l'esecuzione appare meno insidiosa.

La moltiplicazione “per graticola”

La moltiplicazione, ne *Larte de labbacho*, è così introdotta: “*moltiplicare uno numero* [...] *per uno altro : non e altro* [...] *che trovare uno terzo numero : el quale tante volte contien uno de quelli numeri : quante unitade sono nel altro”*. Anche per questa operazione è evidenziata la proprietà commutativa; tuttavia, nell’esecuzione di una moltiplicazione tra due fattori (analogamente a quanto indicato per l’addizione) l’Autore suggerisce di considerare sempre come moltiplicando il numero maggiore e come moltiplicatore il minore.

Il metodo pratico che presenteremo, detto anche “moltiplicazione fulminea” o “a gelosia” o “a reticolo”, era già noto agli Arabi, probabilmente ripreso dalla matematica indiana. Moltiplicando e moltiplicatore devono essere scritti ai lati di una tabella rettangolare, all’interno della quale vengono disposti i prodotti parziali (in proposito si esamini l’esempio riportato di seguito). Il risultato finale si ottiene sommando diagonalmente quanto scritto nelle caselle, considerando gli eventuali riporti, e può essere letto ai due lati della tabella nei quali non sono scritti i fattori.

Nell’esempio seguente è riportata la moltiplicazione 43964×34 eseguita per graticola; si predispone la tabella e si eseguono i prodotti parziali:



Il risultato (1494776) si legge a sinistra e al di sotto della tabella allineando le cifre in senso antiorario, ovvero leggendo il numero costituito dalle cifre a sinistra della tabella (dall’alto in basso) ed al di sotto di essa (da sinistra a destra).

La divisione “per battello”

La divisione è così introdotta: “*partire e de do numeri propositi : truovare uno terzo numero : el quale se trova tante volte nel mazore : quante unitade sono nel menore”*. Dunque essa è definita come l’operazione inversa della moltiplicazione, e ciò consente di verificare l’esattezza dei calcoli effettuati nell’esecuzione di una di tali operazioni mediante l’altra. A proposito della divisione, nota l’Autore: *“chel numero che de fir partito sempre de essere mazore : o vero al mancho eguale al partitore. E quando quelli sono eguali : sempre nasce .1. per parte”*.

La divisione “per battello” si basa su di un procedimento apparentemente complicato, ma assai diffuso nel Medioevo, direttamente riferibile alla *“divisio aurea”* eseguita sulle tavolette dell’abaco; soltanto nel XVII secolo essa sarà sostituita definitivamente dal metodo utilizzato ai giorni nostri, denominato *“divisione per danda”* .

Illlustriamo la divisione per battello attraverso l’esempio:

51411 : 324 = 158   (con resto 219)

Si scrivono il dividendo ed il divisore secondo la seguente disposizione:

(dividendo)   5 1 4 1 1 |
(divisore)   3 2 4

Si determina, quindi, la prima cifra del quoziente (che è 1) e si scrive, sopra il dividendo, il primo “resto parziale”: esso si ricava, cominciando da sinistra, moltiplicando $3\times1 = 3$ e scrivendo $2 = 5-3$ sopra la cifra 5. Quindi, si calcola $2\times1 = 2$ e si scrive $9 = 11-2$ sopra la cifra 1; si noti che la decina “presa in prestito” deve essere tolta dal 2 (prima cifra del “resto”), per cui nella riga superiore dovrà essere scritto 1 $(2-1)$ sopra la cifra 2. Si calcola infine $4\times1 = 4$ e si scrive $0 = 4-4$ sopra la cifra 4. Il “resto parziale” individuato è dunque 190 (si osservi che, per limitare le possibilità di errore, il metodo originale prevede che ogni cifra “utilizzata” venga cancellata con un tratto di penna).

1
~~2~~ 9 0
~~5~~ ~~1~~ 4 1 1 | 1
~~3~~ ~~2~~ 4

Il divisore (324) viene quindi riscritto al di sotto dello schema, spostato verso destra di una posizione ed in modo da occupare le posizioni eventualmente libere nelle righe superiori.

Si ripete quindi l’operazione precedente dividendo il numero 19011 (che può essere letto nella parte superiore dello schema) per il divisore, 324: la seconda cifra del quoziente è dunque 0.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & 2 & & & & & & \\
 & \cancel{3} & 8 & & & & & \\
\cancel{1} & 4 & \cancel{0} & & & & & \\
\cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{0} & 0 & & & & \\
\cancel{5} & \cancel{1} & 4 & \cancel{1} & 1 & \qquad & \Big| & \quad 1\,5 \\
\cancel{3} & \cancel{2} & 4 & 4 & & & & \\
 & \cancel{3} & \cancel{2} & & & & &
\end{array}
$$

Infine, si completa lo schema determinando la terza (ed ultima) cifra del quoziente: 8. Il risultato dell'operazione è quindi 158 ed il resto, 219, può essere letto nella parte superiore dello schema completato.

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 2 & & & & & \\
 & \cancel{2} & 4 & & & & & \\
 & \cancel{3} & \cancel{8} & 1 & & & & \\
\cancel{1} & 4 & \cancel{0} & 4 & & & & \\
\cancel{2} & \cancel{9} & \cancel{0} & \cancel{0} & 9 & & & \\
\cancel{5} & \cancel{1} & 4 & \cancel{1} & \cancel{1} & \qquad & \Big| & \quad 1\,5\,8 \\
\cancel{3} & \cancel{2} & 4 & 4 & 4 & & & \\
 & \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2} & & & & \\
 & & \cancel{3} & & & & &
\end{array}
$$

Il metodo ora descritto presenta tuttavia l'inconveniente di non poter essere facilmente corretto: un eventuale errore rende opportuno ripetere dall'inizio l'intera operazione.

Larte de labbacho nella storia della matematica

Da una semplice collocazione storica nello sviluppo della cultura matematica tardo-medievale, appare evidente che il valore de *Larte de labbacho* non può essere ricercato nell'importanza o nell'originalità dei procedimenti presentati; il manuale trevigiano non si discosta infatti dalla scia magistralmente tracciata, quasi tre secoli prima, dal *Liber abaci*, né è caratterizzato dalla ricchezza e dalla preziosità concettuale del capolavoro di Fibonacci. L'interesse de *Larte de labbacho* per la storia delle scienze, e più generalmente per la storia della cultura, va riferito alle notevoli possibilità di divulgazione derivanti, anche per l'aritmetica, dall'invenzione della stampa a caratteri mobili; nel manuale esaminato troviamo, quindi, un ampio spaccato della cultura matematica "pratica" medievale, che, proprio grazie alla stampa, raggiunge un numero sempre più elevato di lettori e di utilizzatori.

Il più vasto lavoro moderno di analisi critica de *Larte de labbacho* risale al biennio 1862-1863 ed è dovuto a Baldassarre Boncompagni ([10]). La recente disponibilità di riproduzioni anastatiche de *Larte de labbacho* è particolarmente importante, in quanto sono note pochissime copie dell'edizione originale del manuale: nel 1888, F.G. Pichi elenca soltanto otto copie originali de *Larte de labbacho* e sebbene tale valutazione sia da aggiornare ([11]), essa è sufficiente per affermare l'estrema rarità bibliografica dell'opera.

Note e riferimenti bibliografici

([1]) Le cifre indo-arabe si diffondono nell'Europa medievale anche grazie ad Alessandro di Villedieu, autore del *Carmen de algorismo*, ed a Giovanni di Halifax detto Sacrobosco, autore dell'*Algorismus vulgaris*. Anche la terminologia aritmetica prende forma in quel periodo: Leonardo da Pisa latinizza in "zephirum" il vocabolo "sifr" usato dagli arabi per indicare lo zero: "quod arabice zephirum appellatur").

([2]) Nonostante una generale rinascita degli interessi culturali nell'Europa del XIII secolo, dobbiamo rilevare che Fibonacci è una figura tendenzialmente isolata nel mondo scientifico medievale: il suo capolavoro, il *Liber Abaci*, dopo la prima pubblicazione (1202), viene riedito nel 1228, ma pubblicato a stampa solo nel XIX secolo.

([3]) Pochi anni dopo la pubblicazione de *Larte de labbacho*, altri manuali di aritmetica vengono stampati in varie località dell'Europa: nel 1483, a Bamberg (Baviera) viene stampato un manuale dovuto ad Ulrico Wagner; nello stesso anno viene pubblicato a Padova l'*Algorismi tractatus* di Prosdocimo Beldomandi, e l'anno seguente un manuale di Pietro Borghi è stampato a Venezia. Una segnalazione di G. Libri sull'opuscolo *Ars Numerandi* che sarebbe stato stampato nel 1471 è riportata in **P. Deschamp-G. Brunet**, *Manuel du Libraire, Supplement*, T. I, Parigi 1878. Ma dell'esistenza di tale opuscolo non sussistono prove certe.

([4]) **D.E. Rhodes**, *La stampa a Treviso nel secolo XV*, Biblioteca Comunale, Treviso 1983; **Q. Bortolato-A. Contò**, *Il carteggio inedito Boncompagni-Fapanni sull'Aritmetica di Treviso, 1478*, in: "Studi Trevisani", a. II, n. 4, Treviso 1985. Le lettere sono conservate nel Fondo Fapanni, Biblioteca Comunale di Treviso, b. VII, fasc. II. La data di pubblicazione de *Larte de labbacho*, 1479 invece di 1478, riportata nell'interessante articolo, è dovuta ad un refuso editoriale (**Q. Bortolato**, *comunicazione privata all'Autore*).

([5]) **D.M. Federici**, *Memorie trevigiane sulla tipografia del secolo XV per servire alla storia letteraria d'Italia*, Venezia 1805; **F. D'Acais-B. Porro** (a cura di), *L'Aritmetica di Treviso*, copia anastatica, Società Tipografica Cremonese, Roma, 1969; **G. Romano** (a cura di), *Larte de labbacho*, copia anastatica, Longo e Zoppelli, Treviso 1969; **E. Picutti**, *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano 1977.

([6]) **G. Romano** (a cura di), *Larte de labbacho*, copia anastatica, Longo e Zoppelli, Treviso 1969, edizione promossa e curata dalla Cassa di Risparmio della Marca trevigiana. Si veda inoltre **F.S. Fapanni**, *Catalogo dei libri stampati a Treviso nel secolo XV, disposti per ordine d'anni, giuntivi alcuni di stampatori trevigiani altrove impressi*, Treviso, Biblioteca Comunale, manoscritto n. 1662; **A.A. Michieli**, *Storia di Treviso*, Istituto Tipografico dei Comuni, Treviso 1958 (riedizione con aggiornamento ed integrazione a cura di **G. Netto**, Istituto Tipografico dei Comuni, Treviso 1981).

([7]) La numerazione delle pagine dell'esemplare conservato nella Biblioteca Capitolare di Treviso non è originale; altri esemplari, come quello della Biblioteca Universitaria di Bologna, non hanno le pagine numerate.

([8]) I segni di addizione e di sottrazione sono introdotti nel 1489, da G. Widmann; quello di uguaglianza nel 1557 da R. Recorde; quello di moltiplicazione nel 1631, da G. Oughtred; quello di divisione nel 1657, da G. Oughtred. Si veda: **W.W. Rouse Ball**, *Le Matematiche dall'antichità al Rinascimento*, Zanichelli, Bologna 1927; **G.T. Bagni**, *L'Aritmetica di Treviso*, in: **B. D'Amore-F. Speranza** (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica*, v. I, pp. 27-34, Armando, Roma 1989; **G.T. Bagni**, *Numeri e operazioni nel Medioevo: Larte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478)*, in: "La matematica e la sua didattica", 1994, n. 4, pp. 432-444, Bologna, 1994.

([9]) Una dettagliata analisi dei procedimenti pratici di sottrazione è in **G.T. Bagni**, *I metodi pratici di sottrazione nei manuali di aritmetica*, in: "La matematica e la sua didattica", 1994, n. 4, pp. 364-373, Bologna, 1994.

([10]) **B. Boncompagni**, *Intorno ad un trattato d'Aritmetica stampato nel 1478*, in: "Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei", a. XVI, t. XVI, 1862 -1863.

([11]) **F.G. Pichi**, *Di un nuovo esemplare dell'Abbaco di Treviso del 1478 posseduto dalla Biblioteca della Regia Università di Bologna*, Bologna 1888; ma si veda anche **D.E. Smith**, *History of Mathematics*, v. I, p. 249, Dover, New York 1958.