Il Volterriano, 9, 39–48 (2003)

La ricerca delle terne pitagoriche: un problema storico e geografico

GIORGIO T. BAGNI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

Abstract In this paper we propose some historical and geographical considerations about the research of Pythagorean triples. Important and interesting methods were provided by Babylonians, by Chinese mathematicians, by Plato and by Diophantus.

Introduzione

L'importanza di una corretta considerazione dell'aspetto geografico nella valutazione dell'evoluzione storica della Matematica emerge da molti temi della storia della nostra disciplina. La stessa rivalutazione dell'impostazione multiculturale sta assumento importanza crescente nella ricerca contemporanea (molti dei più importanti convegni internazionali riservano a tale approccio spazi sempre più rilevanti: si veda ad esempio *Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues*, sezione curata da Lucia Grugnetti e da Leo Rogers in *History in Mathematics Education. The ICMI Study*: Fauvel & van Maanen, 2000, pp. 39-62).

Nel presente lavoro proporremo alcune riflessioni attraverso la considerazione di un celebre esempio collegato alle tradizioni matematiche dell'Antichità: la ricerca delle *terne pitagoriche*, ovvero delle terne di interi positivi (a; b; c) tali che: $a^2+b^2 = c^2$. (Ricordiamo che una terna pitagorica *primitiva* è una terna pitagorica in cui i numeri a, b, c sono coprimi, cioè non hanno alcun fattore comune).

In base al teorema di Pitagora, tali terne forniscono le misure dell'ipotenusa e dei cateti di un triangolo rettangolo (e tale caratteristica determinò l'importanza pratica attribuita alla conoscenza delle terne pitagoriche in molte tradizioni

matematiche: grazie alla conoscenza di una terna pitagorica era infatti semplice disegnare un triangolo rettangolo, cioè costruire un angolo retto).
La storia della ricerca delle terne pitagoriche è molto antica, certamente di molto precedente al periodo (585?-497? a.C.) in cui viene tradizionalmente collocata la figura di Pitagora di Samo. Questa ci è nota solo in modo incerto ed indiretto, attraverso le testimonianze di Autori quali Platone ed Erodoto; come Talete, Pitagora viaggiò molto: secondo la tradizione si recò in Egitto, a Babilonia e forse addirittura in India; quarantenne, si stabilì a Crotone dove fondò una scuola con le caratteristiche di una confraternita religiosa, filosofica, scientifica e politica. Dopo aspri contrasti con alcune fazioni politiche di Crotone, Pitagora dovette fuggire a Metaponto, dove fu assassinato nel 497 a.C., ma di tutte queste notizie mancano i riscontri storici.

Una tavoletta babilonese

A parte le gravi incertezze a proposito della storicità della biografia di Pitagora, interessante e significativa appare l'esplicita connessione tra la dottrina pitagorica e le culture orientali (Swetz & Kao, 1977). Inizieremo infatti con il rilebvare che alcune tecniche per la ricerca delle terne pitagoriche risalgono addirittura ai Babilonesi: ci riferiamo particolarmente alla tavoletta Plimpton 322, databile tra il 1900 ed il 1600 a.C. (Neugebauer, 1974; Van der Waerden, 1983, p. 2). In essa troviamo la seguente tabella (che riprendiamo liberamente da: Joseph, 2000, p. 124):

Colonna 1 (interpretazione incerta)	**Colonna 2** (valore *a*)	**Colonna 3** (valore *c*)	**Colonna 4** (num. riga)	**Colonna 5** (valore *b*)
1;59;0;15	1;59	2;49	1	2;0
1;56;56;58;14;50;6;15	56;7	1;20;25	2	57;36
1;55;7;4;1;15;33;45	1;16;41	1;50;49	3	1;20;0
1;53;10;29;32;52;16	3;31;49	5;9;1	4	3;45;0
1;48;54;1;40	1;5	1;37	5	1;12
1;47;6;41;40	5;19	8;1	6	6;0
1;43;11;56;28;26;40	38;11	59;1	7	45;0
1;41;33;33;59;3;45	13;19	20;49	8	16;0
1;38;33;36;36	8;1	12;49	9	10;0
1;35;10;2;28;27;24;26;40	1;22;41	2;16;1	10	1;48;0
1;33;45	45	1;15	11	1;0
1;29;24;54;2;15	27;59	48;49	12	40;0
1;27;0;3;45	2;41	4;49	13	4;0
1;25;48;51;35;6;40	29;31	53;49	14	45;0
1;23;13;46;40	56	1;46	15	1;30

Sottolineiamo che i valori $a(13)$, $c(2)$, $c(6)$, $c(15)$ riportati nella tabella sono stati corretti, in sostituzione di quelli sbagliati della tavoletta originale.
Prendiamo ad esempio in considerazione i valori a, b, c desunti dalle prime quattro righe:

2; 0	1; 59	2; 49
57; 36	56; 7	1; 20; 25
1; 20; 0	1; 16; 41	1; 50; 49
3; 45; 0	3; 31; 49	5; 9; 1

Si tratta di numeri scritti in base sessagesimale (il primo numero a destra rappresenta le unità; il secondo deve essere moltiplicato per 60; il terzo per 3600); posti in forma decimale, essi sono facilmente riconoscibili come terne pitagoriche:

120;	119;	169	(risulta $120^2+119^2 = 169^2$)
3456;	3367;	4825	(risulta $3456^2+3367^2 = 4825^2$)
4800;	4601;	6649	(risulta $4800^2+4601^2 = 6649^2$)
13500;	12709;	18541	(risulta $13500^2+12709^2 = 18541^2$)

Analogamente per le altre righe della tavoletta.
La decifrazione della tavoletta Plimpton 322 ha lasciato aperte due questioni: innanzitutto non è stato chiarito il ruolo della prima colonna (qualche studioso ha avanzato l'ipotesi di un suo collegamento con una proto-trigonometria babilonese, ma l'ipotesi, per quanto suggestiva, appare un po' fantasiosa: Josepf, 2000, p. 125); inoltre non conosciamo il procedimento mediante il quale i Babilonesi hanno ricavato le terne pitagoriche riportate.

Le formule di Platone

A tempi più vicini a noi risalgono le formule attribuite a Platone (427-347 a.C.) da Proclo di Alessandria (410-485, autore di un *Commento al I libro degli Elementi*), il quale ricorda anche qualche leggendaria ricerca di Pitagora:

$$a = 2x$$
$$b = x^2-1$$
$$c = x^2+1$$

Oggi osserveremmo che per $x = 0$, $x = 1$ esse non portano a risultati significativi (si tratta infatti delle terne: 0, –1, 1 e 2, 0, 2; ricordiamo peraltro che 0 e 1 non erano considerati veri e propri "numeri" dai Greci).
Per $x = 2$ otteniamo:

$$a = 4$$
$$b = 3$$
$$c = 5$$

e si tratta dell'unica terna pitagorica così ottenuta per la quale è: $b<a$ (per tutte le altre terne risulta infatti: $a<b<c$).
Osserviamo quindi che per x dispari si ottengono terne pitagoriche non primitive (costituite da tre numeri pari):

$x = 3$		$a = 6$	$b = 8$	$c = 10$
	(multipla di:	$a = 3$	$b = 4$	$c = 5$)
$x = 4$		$a = 8$	$b = 15$	$c = 17$
$x = 5$		$a = 10$	$b = 24$	$c = 26$
	(multipla di:	$a = 5$	$b = 12$	$c = 13$)
$x = 6$		$a = 12$	$b = 35$	$c = 37$
$x = 7$		$a = 14$	$b = 48$	$c = 50$
	(multipla di:	$a = 7$	$b = 24$	$c = 25$)
...		...	...	...

Si può dimostrare che applicando le formule attribuite a Platone si trovano tutte le terne pitagoriche della forma (a; b; b+2), ma non tutte le terne pitagoriche (primitive) hanno tale caratteristica. Dunque le formule platoniche superano la ricerca del semplice esempio per concentrarsi su di un procedimento in grado di fornire molte (infinite) soluzioni; ma nonostante ciò, esse non forniscono una completa soluzione al problema della determinazione di terne pitagoriche.

La soluzione completa

Per trovare la risoluzione completa del problema presentato dobbiamo fare nuovamente ricorso ad esperienze culturali extraeuropee e considerare un testo cinese del periodo Han collocabile tra il 200 a.C. e il 220 d.C. (van der Waerden, 1983, pp. 1 e 5-8; Martzloff, 1987; Needham, 1985; osserviamo però che la datazione delle opere matematiche cinesi è sempre impresa delicata: il materiale riportato nella redazione finale potrebbe essere più antico). La Matematica cinese è ricca di procedimenti apparentemente ludici, collegati a situazioni pratiche o a curiosità; ma a tali procedimenti sono spesso associati contenuti matematici profondi e importanti.
Illustriamo innanzitutto la soluzione cinese del problema. Dopo avere scritto:

$$a^2+b^2 = c^2 \qquad \text{da cui:} \qquad (c+b)(c-b) = a^2$$

consideriamo un numero dispari come prodotto di due fattori:

$$a = mn$$

L'ultima equazione è verificata da:

$$\begin{matrix} c+b = m^2 & & c = \frac{1}{2}(m^2+n^2) \\ & \text{da cui:} & \\ c-b = n^2 & & b = \frac{1}{2}(m^2-n^2) \end{matrix}$$

Ad esempio possiamo scrivere:

$a = 3\cdot 1 = 3$	da cui:	$b = 4$	e	$c = 5$
$a = 5\cdot 1 = 5$	da cui:	$b = 12$	e	$c = 13$
$a = 5\cdot 3 = 15$	da cui:	$b = 8$	e	$c = 17$

Interessante è osservare che un'analoga impostazione della questione, e dunque un'analoga sua soluzione, compare nel Problema I del VI libro dell'*Aritmetica* di Diofanto di Alessandria (vissuto tra il 250 e il 350 d.C.).
La soluzione diofantea parte dalla considerazione di un numero pari:

$$a = 2pq$$

L'equazione $(c+b)(c-b) = a^2$ può essere verificata da:

$$\begin{cases} c+b = 2p^2 \\ c-b = 2q^2 \end{cases} \quad \text{da cui:} \quad \begin{cases} c = p^2+q^2 \\ b = p^2-q^2 \end{cases}$$

Al lettore non sfuggirà l'evidente analogia dei due procedimenti: la soluzione cinese, sopra indicata, equivale alla soluzione diofantea sostituendo:

$$(m, n) \quad \text{con} \quad (p+q;\, p-q).$$

È possibile dimostrare che le due soluzioni del problema della determinazione delle terne pitagoriche così ottenute (sia quella cinese che quella diofantea) hanno il requisito della generalità che mancava alla soluzione platonica: ciò significa che *tutte le terne pitagoriche primitive* possono essere ottenute dalle formule ricordate (van der Waerden, 1983, p. 2). Per confermare dunque il valore del procedimento diofanteo (e dell'analogo procedimento cinese), proponiamo il ricavo delle formule utilizzate in termini moderni.
Ovviamente la verifica diretta non può essere considerata un *ricavo* delle formule considerate. In altri termini, affinché una verifica di tali formule abbia senso, e sia proponibile ad esempio dal punto di vista didattico, è indispensabile che esse siano note.
Le formule in questione possono essere ricavate nell'ambito della moderna geometria analitica considerando l'intersezione della circonferenza di raggio unitario avente centro nell'origine degli assi e di una retta passante per il punto di coordinate $(0; -1)$ con il coefficiente angolare t non nullo:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + 1 = tx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + (tx-1)^2 = 1 \\ y = tx - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2t}{t^2+1} \\ y = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases}$$

Se: $t = \dfrac{a}{b}$:

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\dfrac{a}{b}}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 1} \\ y = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 - 1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2} \\ y = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

e in coordinate omogenee:

$$\begin{cases} x = 2ab \\ y = a^2 - b^2 \\ z = a^2 + b^2 \end{cases}$$

Quello ora accennato è un procedimento che presuppone alcune conoscenze non del tutto banali. Più elegante e più semplice è il procedimento seguente.
Data l'equazione diofantea:

$$x^2+y^2 = z^2$$

cercheremo le sue soluzioni (intere) supponendo che MCD(x; y; z) = 1, cioè ci occuperemo delle terne pitagoriche primitive (ciò non è restrittivo).
Tale assunzione comporta che x e y non siano entrambi pari, in quanto se lo fossero risulterebbe pari anche z, contro l'ipotesi che vuole 1 il MCD(x; y; z). Inoltre x, y non possono essere entrambi dispari; se così fosse, ovvero se

$$x = 2m+1 \quad \text{e} \quad y = 2n+1$$

avremmo:

$$z^2 = (2m+1)^2+(2n+1)^2 = 2(2m^2+2n^2+2m+2n+1)$$

ovvero z^2 risulterebbe il doppio di un numero dispari: ciò sarebbe impossibile (in quanto tale numero, avendo uno ed un solo fattore 2, non sarebbe un quadrato). Scriviamo quindi:

$$x = 2\alpha \quad \text{e} \quad y = 2\beta+1$$

da cui segue:

$$4\alpha^2 = z^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{z+y}{2} \cdot \frac{z-y}{2}$$

Mostriamo ora che i due numeri $\frac{z+y}{2}$ e $\frac{z-y}{2}$ devono essere coprimi; se infatti così non fosse, risulterebbe:

$$\frac{z+y}{2} = pq \quad \text{e} \quad \frac{z-y}{2} = ps \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = p(q+s) \\ z = p(q-s) \end{cases}$$

contro l'ipotesi che sia 1 il MCD(x; y; z).
Attraverso le opportune posizioni possiamo quindi scrivere:

$$\begin{cases} \dfrac{z+y}{2} = a^2 \\ \dfrac{z-y}{2} = b^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2ab \\ y = a^2 - b^2 \\ z = a^2 + b^2 \end{cases}$$

formule nelle quali è condensata la soluzione diofantea (e, con le segnalate sostituzioni, quella cinese) della determinazione di terne pitagoriche.

Tradizioni culturali e trasmissioni

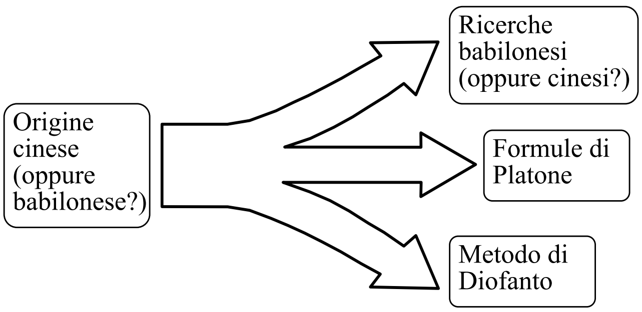
La stretta analogia delle due soluzioni del problema precedentemente illustrate non può non porre alcuni interrogativi, il primo dei quali (ma non necessariamente il più importante) può riguardare la priorità cronologica. Esaminando le datazioni attribuite, appare che la soluzione cinese del problema sembra essere la più antica delle due soluzioni complete. Viene quindi spontaneo domandarsi: in generale, quale influenza possono avere avuto i Cinesi nello sviluppo della Matematica di altre civiltà, orientali e occidentali? Più particolarmente, quali legami possiamo ipotizzare tra l'impostazione cinese della risoluzione del problema delle terne pitagoriche e quella diofantea?
È opinione oggi abbastanza diffusa (Boyer, 1982; Struik, 1981) che l'antica Matematica cinese abbia avuto un'influenza trascurabile sullo sviluppo della Matematica occidentale. Quest'affermazione potrebbe però essere affrettata: per quanto riguarda la Matematica cinese, infatti, una fonte assolutamente autorevole è il grande trattato di Needham, ed in tale opera troviamo alcuni riferimenti interessanti sui

> "contatti che sembra vi siano stati fra matematici cinesi e di altre grandi aree culturali del mondo antico [sebbene] in misura limitata" (Needham, 1985, p. 183).

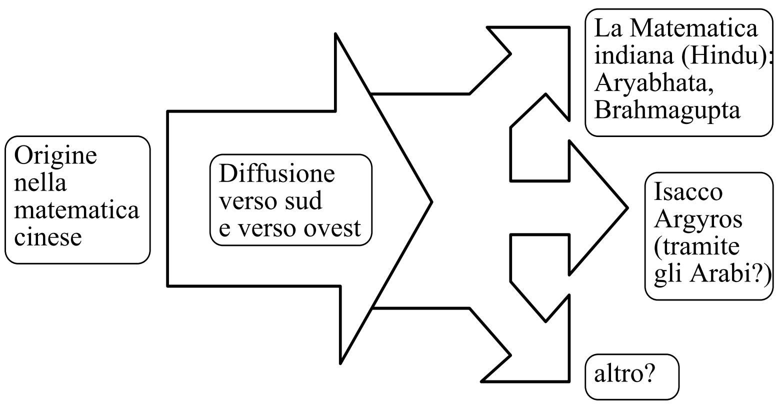
Needham parla di alcune

"concezioni matematiche propagate dalla Cina verso il Meridione [dunque verso l'India] e verso l'Occidente" (Needham, 1985, p. 185)

e ricorda i numerali, l'estrazione di radici quadrate e cubiche, la *regola del tre*, la scrittura di frazioni, l'idea di numeri negativi, alcuni elementi di Geometria (tra i quali una dimostrazione del teorema di Pitagora), il metodo di *falsa posizione* e la celebre disposizione di coefficienti binomiali che viene tuttora chiamata *triangolo di Tartaglia-Pascal*.
Per quanto riguarda l'Analisi indeterminata (settore al quale possiamo far risalire la ricerca delle terne pitagoriche), sembra che dalla Cina siano passate alcune idee in India (intorno al V-VII secolo d.C.) e da lì, forse, al monaco bizantino Isacco Argyros (XIV secolo d.C.), probabilmente con la mediazione di studiosi arabi (Needham, 1985, p. 185).
Dunque possiamo così ipotizzare gli eventuali contatti che avrebbero portato i matematici occidentali (oppure del vicino oriente) a conoscere le originali ricerche cinesi (oppure babilonesi) sulle terne pitagoriche; alcuni secoli prima dell'inizio dell'Era volgare, ad esempio, avrebbe potuto avvenire quanto rappresentato nello schema seguente:



Alcuni secoli dopo l'inizio dell'era volgare, invece, avrebbe potuto verificarsi la situazione così schematizzata:



Le due possibilità schematizzate non eludono però un quesito fondamentale: le ricerche sulle terne pitagoriche (e più in generale le ricerche che, nelle varie epoche storiche, hanno portato all'elaborazione di teorie matematiche simili in ambiti culturali diversi) sono da porre in relazione reciproca o sono frutto di iniziative originali, autonome?
L'ipotesi della comune origine (probabilmente cinese) delle ricerche sulle terne pitagoriche è sostenuta da B.L. van der Waerden, il quale osserva che

> "con pochissime eccezioni, le grandi scoperte in Matematica, in Fisica e in Astronomia sono state fatte una volta sola" (Van der Waerden, 1983, p. 10).

Pur senza voler smentire l'ipotesi di van der Waerden, peraltro plausibile, non possiamo non osservare che la ricerca di terne pitagoriche è una questione che può sorgere spontaneamente, anche per ragioni pratiche (la segnalata necessità di costruire facilmente un angolo retto): il fatto di trovare molti matematici che, in epoche ed in paesi diversi, si sono interessati ad essa non ci dovrebbe dunque sorprendere e non ci sembra un elemento determinante per propendere per una comune origine delle varie ricerche in tale campo.

Conclusione

Non pretendiamo di dare una risposta ai molti interrogativi che ancora restano a proposito dell'origine e dello sviluppo delle ricerche sulle terne pitagoriche. Riteniamo però significativa la presenza stessa di tali questioni aperte: la ricostruzione scientifica della storia e della geografia della Matematica non è sempre agevole e le difficoltà che si presentano a tale riguardo sono spesso collegate all'assenza di testi scritti, databili con sicurezza.
Possiamo tuttavia concludere che un esame obiettivo della storia della nostra disciplina, ed in particolare della collocazione geografica delle ricerche, prova che la Matematica non può essere considerata patrimonio di una particolare tradizione culturale. Se non è difficile riconoscere che molti dei più elevati risultati della Matematica contemporanea sono maturati nell'ambito della cultura occidentale, è parallelamente indispensabile rendersi conto che la storia della Matematica non può che essere concepita in termini di evoluzione delle diverse istituzioni culturali e dunque delle varie tradizioni. La considerazione e la valorizzazione di tali diversità appare elemento essenziale per comprendere correttamente la ricchezza di tradizioni matematiche che talvolta sono state troppo frettolosamente considerate secondarie.

Bibliografia

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).
Boyer, C.B. (1982), *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).
Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).
Eves, H. (1983), *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York.
Fauvel, J. & van Maanen, J. (a cura di) (2000), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer, Dodrecht.
Joseph, G.G. (2000), *C'era una volta un numero. La vera storia della Matematica*, Il Saggiatore, Milano (edizione originale: *The Crest of the Peacock. Non-European Roots of Mathematics*, 1991).
Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).
Martzloff, A. (1987), *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris (*A History of Chinese Mathematics*, Springer, Berlin 1997).
Needham, J. (1985), *Scienza e civiltà in Cina*, III, La Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia, Einaudi, Torino (*Science and civilisation in China*, Cambridge Un. Pr. 1959).
Neugebauer, O. (1974), *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano (*The exact sciences in Antiquity*, Brown Un. Pr., Providence Rhode Island 1957).
Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).
Swetz, F.J. & Kao, T.I. (1977), *Was Pythagoras Chinese? An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China*, University Park and London, The Pennsylvania State University Press.
Van der Waerden, B.L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, Berlin.
Weil, A. (1993), *La teoria dei numeri*, Einaudi, Torino (*Number theory*, Birkhäuser, Boston 1984).