

Comunicazione al Convegno “Andrea Luchesi”, Venezia, Università Ca’ Foscari,
Dipartimento di Matematica Applicata, 14-15 novembre 2003

Progetto Alice, 2004 (in via di pubblicazione)

La storia della scienza: dall’epistemologia alla didattica

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica,
Università di Roma “La Sapienza”

Riassunto Nel presente lavoro consideriamo alcune questioni didattiche riferite all’uso di riferimenti storici: presentiamo alcuni quadri teorici ed evidenziamo le assunzioni epistemologiche da essi implicate. Sottolineiamo l’importanza della contestualizzazione socio-culturale e proponiamo alcuni esempi: sono esaminate alcune opere di Jacopo, Vincenzo e Giordano Riccati e di Gian Maria Ciassi con riferimento a ricerche di altri Scienziati ed al contesto socio-culturale del XVII e del XVIII secolo.

Abstract In this paper we consider some educational issues related with the use of historical references: some theoretical frameworks are presented and the epistemological assumptions needed by them are pointed out. We underline the importance of the socio-cultural contextualisation and propose some examples: works by Jacopo, Vincenzo and Giordano Riccati and by Gian Maria Ciassi are examined, with reference to connected researches by other Authors and to socio-cultural context of 17th and 18th centuries.

Quadri teorici e assunzioni epistemologiche

La matematica: una scoperta o un’invenzione? La questione ha fatto discutere a lungo matematici, filosofi e storici: da un lato il matematico potrebbe essere assimilato allo scopritore, dunque a chi individua e studia oggetti in qualche modo già dotati di una propria esistenza; dall’altro, sarebbe chi crea autonomamente la matematica, la inventa mantenendo un margine di libertà, pur nel rispetto dei

vincoli ad esempio connessi alla logica (Bagni, 2004b). Queste due scelte, rispettivamente platonista e costruttivista, hanno conseguenze filosofiche vaste e profonde (si veda ad esempio: Lolli, 2002; Speranza, 1997).¹

Dal punto di vista storiografico, il dilemma è talvolta impostato (Giusti, 1999, p. 74; Grugnetti & Rogers, 2000, p. 40) secondo una concezione che presenta non pochi punti di contatto con la moderna didattica della matematica. Un nuovo concetto verrebbe inizialmente “incontrato” da un matematico in fasi operative (nella risoluzione di un problema ovvero all’interno di una dimostrazione), per essere, decenni o secoli più tardi, rielaborato e inquadrato teoricamente alla luce dei mutati standard di rigore o di nuove esigenze. Un’evoluzione simile può essere rilevata anche in ambito didattico: il primo contatto di un allievo con una nuova nozione matematica avviene spesso in una fase tipicamente operativa (Sfard, 1991, p. 10); ma un apprendimento limitato alla considerazione di un processo risulterebbe incompleto: la formazione compiuta di un concetto matematico richiede perciò una sequenza di fasi, un progressivo avvicinamento.²

Non è difficile segnalare un possibile parallelismo tra l’evoluzione storica e lo sviluppo cognitivo (affermato ad esempio: Frajese, 1950, p. 338). Ma fino a che punto possiamo spingere l’analogia? Il processo di insegnamento-apprendimento ha luogo oggi, dopo il completo sviluppo del *savoir* (e talvolta apprendere la matematica può significare reinventarla: Freudenthal, 1973); si tratta però di una completezza relativa al momento attuale: mentre il processo di insegnamento-apprendimento può essere strutturato, in singole fasi, con riferimento a obiettivi predeterminati, l’evoluzione storica, in divenire, non porta alla costruzione di un oggetto già intravisto o intuito dai matematici dei secoli precedenti.

L’accettazione dell’analogia sopra indicata porta dunque ad affrontare alcune delicate questioni epistemologiche (come osservato ad esempio in: Radford, 1997): possiamo riferire l’intera evoluzione storica alla nostra attuale concezione della matematica? Quale ruolo va attribuito ai fattori culturali e sociali che hanno influenzato i singoli periodi? (Furinghetti, 2002).

¹ Il presente lavoro riprende alcune considerazioni teoriche pubblicate in: Bagni, 2004b. Gli esempi storici proposti nella seconda parte dell’articolo sono stati oggetto di una comunicazione dell’Autore al *Convegno di Studi su Andrea Luca Luchesi*, tenutosi a Venezia, Università Ca’ Foscari, Dipartimento di Matematica Applicata, il 14-15 novembre 2003.

² Il passaggio da un’introduzione basata su di un processo ad una concezione che consideri l’oggetto matematico (*object-oriented*) viene indicata con il termine *reificazione*. Alcuni Autori osservano comunque una qualche mancanza di chiarezza in cui si incorre nel riferimento ad una comprensione *object-oriented* di un’idea (Slavit, 1997, p. 265). Recenti tendenze sembrano non imporre una struttura rigidamente gerarchica.

Se un diretto parallelismo tra sviluppo cognitivo ed evoluzione storica (la ben nota tesi espressa in: Piaget & Garcia, 1983) può apparire problematico, certamente la trasposizione didattica (Chevallard, 1985), che inizialmente deve rendere possibile una conoscenza intuitiva, può basarsi sui risultati raggiunti nelle varie fasi dello sviluppo storico del sapere. Ciò dovrà accadere mantenendo alcune precauzioni metodologiche e chiarendo le assunzioni epistemologiche che stanno alla base dei vari quadri teorici.

Il ruolo della storia nella didattica della matematica costituisce un argomento di dibattito spesso approfondito dalla comunità scientifica internazionale (Swetz, 1995): l'analisi delle molte possibilità che l'impiego di riferimenti storici offre alla didattica è riconosciuta come un settore importante della ricerca.³ Tuttavia l'accordo sulle modalità attraverso le quali la storia può concretamente intervenire nella pratica didattica è lontano dall'essere unanime (Pepe, 1990). Ad esempio, diversi sono i livelli di lavoro ai quali la storia sembra poter essere collocata nei processi di insegnamento-apprendimento: un livello aneddotico è considerato come quello più elementare (e superficiale, sebbene in grado di stimolare la motivazione: Radford, 1997); ad esso si affiancano livelli più elevati ed impegnativi, nei quali vengono di volta in volta valorizzate connessioni interdisciplinari o possibilità metacognitive collegate ai riferimenti storici (Furinghetti & Somaglia, 1997). Tali livelli di lavoro non riflettono solamente scelte di opportunità didattica, bensì implicano l'assunzione di posizioni epistemologiche sensibilmente diverse. Luis Radford sottolinea giustamente che

“la considerazione della storia della matematica come una specie di laboratorio epistemologico in cui esplorare lo sviluppo della conoscenza matematica [...] richiede l'assunzione di un punto di vista teorico che giustifichi il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno” (Radford, 1997, p. 26, la traduzione è nostra).

Per realizzare tale collegamento è dunque necessario affrontare questioni importanti: innanzitutto la selezione dei dati storici da considerare significativi, tutt'altro che epistemologicamente neutra (citiamo ancora: Radford, 1997; si veda: Pizzamiglio, 2002, p. 33); inoltre i problemi connessi alla loro interpretazione, che viene sempre condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali (Gadamer, 1975; Barbin, 1994; Furinghetti & Radford, 2002).

A partire dagli anni Settanta, Guy Brousseau introdusse l'importante concetto di ostacolo epistemologico: egli concepiva la conoscenza come la soluzione

³ Una ricca selezione di interventi è presentata nel volume: Fauvel & van Maanen, 2000.

ottimale a un problema, caratterizzato da esigenze e da vincoli; e l'ostacolo epistemologico può interpretarsi alla stregua di una sistematica difficoltà che gli individui incontrano (a causa della quale compiono errori) nell'affrontare alcuni problemi (Brousseau, 1983). Questa impostazione porta ad una concezione dello studio storico il cui scopo principale è quello di evidenziare tali esigenze (*situations fondamentales*), in modo da poter interpretare, attraverso il loro studio, la conoscenza matematica che a partire da essi si è sviluppata. La nota suddivisione degli ostacoli in epistemologici, ontogenetici, didattici e culturali (Brousseau, 1989) sottolinea la separazione della sfera della conoscenza dalle altre sfere ad essa collegate. L'approccio descritto è caratterizzato da importanti assunzioni epistemologiche: la prima riguarda la ricomparsa nei processi attuali di apprendimento di uno stesso ostacolo manifestatosi in un periodo storico; una seconda si collega più specificamente al piano didattico e prevede che lo studente apprenda in modo sostanzialmente isolato, senza interazioni con l'insegnante o con l'ambiente (Radford, Boero & Vasco, 2000).

A quella ora delineata si affiancano altre impostazioni teoriche, basate su differenti assunzioni epistemologiche: secondo l'approccio socio-culturale di Luis Radford la conoscenza è collegata alle attività nelle quali i soggetti si impegnano e ciò è in relazione con le istituzioni culturali dell'ambiente sociale. Dunque essa non si produce nel rapporto esclusivo tra il discente ed il problema da risolvere, ma viene costruita socialmente (Radford, 1995, 1996, 1997 e 2003). In tale quadro teorico, all'impostazione unidirezionale di una costruzione della conoscenza basata sui superamenti di ostacoli epistemologici si sostituisce un progresso dialogico; il ruolo della storia deve essere interpretato con riferimento alle diverse culture e fornisce una preziosa occasione per una ricostruzione critica dei contesti culturali del passato (Vygotsky, 1990). Di grande interesse dal punto di vista didattico è inoltre l'approccio "voci ed echi" di Paolo Boero (Radford, Boero & Vasco, 2000, pp. 165-166; risultati sperimentali sono riportati in: Garuti, 1997; Lladò & Boero, 1997; Tizzani & Boero, 1997).⁴

Storia e geografia della matematica: la "Schola Riccatiana"

Nel presente lavoro esamineremo alcuni esempi tratti dalla storia della scienza (con specifico riferimento ad un periodo e ad un'area geografica determinati) e

⁴ Si osservi che i quadri teorici sopra tratteggiati non sono in reciproca opposizione, ma possono rappresentare l'evoluzione di uno sforzo interpretativo condotta alla luce delle mutate sensibilità culturali e sociali (D'Amore, 2003; Bagni, 2004a e 2004b).

cercheremo di evidenziare come l'assunzione di un punto di vista che tenga conto del contesto socio-culturale favorisca in termini assai rilevanti la piena e corretta comprensione di un periodo storico nonché della conoscenza matematica che in esso si è sviluppata. In particolare esamineremo alcune note questioni di priorità cronologica (collegate ad argomenti di analisi matematica, di fisica matematica e di meccanica) e noteremo che spesso esse sono collegate ad una fase di elaborazione di tecniche e di concetti che, resa possibile e stimolata da una ben precisa situazione sociale e culturale, ha favorito o addirittura determinato il contemporaneo approccio alle questioni in gioco da parte di studiosi diversi.

Con l'espressione "Schola Riccatiana" si è soliti indicare quel vivace clima culturale che pervase nel XVIII secolo la regione a nord di Venezia, intorno a Treviso (la "Marca trevigiana"; si veda: Bagni, 1988, 1993 e 1996, II); il termine fa esplicito riferimento all'opera di Jacopo Riccati (1676-1754) e di tre dei suoi figli, Vincenzo (1707-1775), Giordano (1709-1790) e Francesco (1718-1791). Ricordiamo le parole con le quali Maria Laura Soppelsa presenta la vasta eredità culturale dei Riccati (in particolare di Jacopo):

“Attraverso i figli la sua scuola s'irradiò, in misura meno efficace sul fronte europeo ma in termini più capillari, nell'ambito del territorio, ora dalla villa di Castelfranco, ora dal palazzo di famiglia di Treviso ove vennero iniziati alla *media armonica* e ai *temperamenti* musicali valenti architetti e musicisti, quali Francesco Maria Preti, Luigi Rizzetti, Giambattista Bortolani e Ignazio Spergher” (Soppelsa, 1991, p. 27).

Il fermento culturale nell'area geografica tra le città di Treviso, Padova e Venezia non deve essere considerato limitatamente al Secolo dei Lumi. Nel presente lavoro ci occuperemo infatti anche di un'opera pubblicata nella seconda metà del Seicento da Gian Maria Ciassi (1654-1679), un fisico e botanico le cui intuizioni nel campo della meccanica non ebbero immediata risonanza, ma meritano, almeno modernamente, un'attenta considerazione storica (notiamo sin d'ora che Ciassi morì a soli venticinque anni).⁵

⁵ Non ci faremo guidare dall'ordine cronologico, in base al quale saremmo tenuti a presentare i lavori di Jacopo, Vincenzo e Giordano Riccati preceduti da quello di Ciassi; terremo invece presente che, come sopra osservato, l'opera di quest'ultimo fu poco considerata nel periodo che seguì la pubblicazione (1677) e la sua interpretazione potrebbe essere utilmente introdotta da alcune affermazioni contenute nel *Dialogo, dove ne' congressi di più giornate delle forze vive e dell'azioni delle forze morte si tien discorso* di Vincenzo Riccati (Riccati, V., 1749).

Jacopo Riccati, Daniel Bernoulli e le equazioni differenziali

Il XVIII secolo fu uno dei periodi più vivaci della storia della matematica: l'ambiente scientifico era pervaso dall'entusiasmo per l'introduzione dei concetti del calcolo infinitesimale e per la loro applicazione, in particolare a questioni di meccanica. Jacopo Riccati nacque a Venezia il 28 maggio 1676; dopo avere compiuto gli studi a Brescia ed a Padova, ritornò nel palazzo di famiglia a Castelfranco Veneto e sposò Elisabetta Onigo, dalla quale ebbe diciotto figli. La vita di Jacopo si svolse quasi interamente tra Castelfranco e Treviso, dove lo studioso si stabilì definitivamente nel 1749; morì a Treviso il 15 aprile 1754 e fu sepolto nella Cattedrale trevigiana (Bagni, 1997).

Jacopo Riccati si dedicò a questioni di matematica, di fisica, di idrologia, di scienze naturali, di storia, di filosofia, di teologia, di pedagogia, di architettura, di economia; scrisse ampi trattati, innumerevoli note e memorie, alcune opere letterarie.⁶ La storia della cultura lo ricorda particolarmente per alcuni importanti contributi nel campo dell'analisi matematica, tra i quali spicca l'*equazione differenziale di Riccati*, equazione non lineare presentata da Riccati e successivamente generalizzata da Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783). L'equazione di Riccati è presente in tutti i trattati di analisi, dal Settecento ai giorni nostri; così Vincenzo Brunacci (1768-1818) la ricorda nel proprio vasto *Corso di Matematica sublime* del 1804:

“Andiamo [...] a parlare della separazione delle variabili nella celebre equazione conosciuta sotto il nome di equazione Riccatiana, perché il Conte Jacopo Riccati è stato il primo che ne abbia cercata la separazione delle variabili, ed abbia assegnati i casi, nei quali questa separazione succede” (Brunacci, 1804, III, p. 99).

⁶ I lavori di Jacopo Riccati sono raccolti nella grande edizione lucchese (Riccati, J. 1761-1765) alla quale contribuirono largamente i figli Vincenzo e Giordano; in essa (tomo IV) è inclusa l'importante nota biografica di C. Di Rovero, *Vita del Conte Jacopo Riccati*. Per quanto riguarda le equazioni differenziali, si veda in particolare: *Della separazione delle indeterminate nelle equazioni differenziali di primo grado, e della riduzione delle equazioni differenziali del secondo grado, e d'altri gradi ulteriori*, in cui sono riportate e commentate le lezioni tenute dall'Autore a Lodovico da Riva ed a Giuseppe Suzzi nel 1722 (Riccati, 1761-1765, I, pp. 433-598). L'equazione differenziale di Jacopo Riccati è presentata, originariamente, nelle due memorie riccatiane *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus* e *Appendix in animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, pubblicate originariamente nel 1722 e nel 1723 negli *Acta Eruditorum Lipsiae* (anche queste note sono riportate in Riccati, 1761-1765, III, pp. 83-88 e 90-97; Bagni, 1988, 1995a e 1995b).

Il ruolo di Jacopo negli studi sull'equazione di Riccati, ricordato da Brunacci, merita un approfondimento. L'integrazione di questa equazione è stata infatti a lungo attribuita a Daniel Bernoulli (1700-1782) che enunciò nel 1724 la propria soluzione (in forma di anagramma, per "fissare la priorità"); ma alcune lettere aprono importanti spiragli: Jacopo Riccati aveva infatti proposto l'equazione a Nikolaus II Bernoulli (1687-1759), cugino di Daniel, già nel 1719; e da un carteggio tra Jacopo Riccati e Nikolaus III Bernoulli (1695-1726), fratello di Daniel, inedito fino a pochi anni fa (studiato da Lucia Grugnetti; si veda in particolare: Grugnetti, 1986),⁷ appare che il contributo di Riccati alla ricerca è assolutamente essenziale: il suo studio deve dunque essere considerato decisivo nell'elaborazione del procedimento di risoluzione che viene utilizzato anche ai giorni nostri.

L'equazione differenziale di Riccati viene applicata in molti settori della matematica moderna. Storicamente, tuttavia, l'importanza attribuita a tale equazione è collegata all'innovativa impostazione dei metodi risolutivi proposti: grazie ad un cambiamento di variabile, Jacopo Riccati riuscì infatti a ridurre l'equazione del secondo ordine ad un'equazione differenziale del primo ordine, aprendo così la via a studi di notevole importanza per l'evoluzione della disciplina.⁸ Nella risoluzione dell'equazione di Riccati, quindi, troviamo esemplificato uno spunto assai fecondo: la ricerca di una trasformazione per ottenere la riduzione dell'ordine dell'equazione, idea che porterà Leonhard Euler (1707-1783) ad elaborare il metodo generale per l'integrazione delle equazioni differenziali lineari non omogenee di ordine qualsiasi.

Questo primo esempio ci suggerisce alcune riflessioni: non ci sembra che il punto fondamentale da chiarire per una corretta presentazione (ad esempio didattica) delle radici storiche degli studi sulle equazioni differenziali sia la discussione sulla priorità delle osservazioni che hanno portato all'elaborazione del procedimento risolutivo per l'equazione di Riccati. In questo senso è necessario distinguere tra la ricerca storica e uso didattico della storia della matematica: lo storico è giustamente interessato ad una ricostruzione dettagliata; il didattico è

⁷ È la nota fondamentale per l'attribuzione della paternità della risoluzione dell'equazione differenziale di Riccati. Si veda anche: Grugnetti, 1985.

⁸ Scrive a tale proposito Morris Kline: "L'opera di Riccati è significativa non soltanto perché considerò equazioni differenziali del second'ordine, ma anche perché ebbe l'idea di ricondurre le equazioni del second'ordine a equazioni del prim'ordine. Quest'idea di ridurre l'ordine di un'equazione differenziale ordinaria con un qualche artificio si rivelerà uno dei metodi fondamentali per la trattazione delle equazioni differenziali ordinarie di ordine superiore" (Kline, 1991, pp. 564-565. Si veda in particolare: Bagni, 1995).

invece orientato al globale ed organico chiarimento della più vasta situazione culturale che ha portato alla progressiva precisazione di un concetto matematico (A. Sfard parlerebbe di *reificazione*: Sfard, 1991). Riprenderemo tali considerazioni esaminando alcuni esempi ulteriori.

Fisica matematica: Giordano Riccati, d'Alembert, Euler

Tra i “quattro Riccati”, “matematici e poligrafi”, nelle parole di Adriano Augusto Michieli che a lungo ne studiò l'opera,⁹ Giordano (Fig. 1) fu uno studioso particolarmente versatile e originale. Fu il quinto figlio di Jacopo e di Elisabetta Onigo; i suoi interessi culturali, vastissimi, furono simili a quelli del padre assai più di quanto non si possa dire a proposito di quelli dei fratelli Vincenzo, che si concentrò prevalentemente su questioni fisico-matematiche, e Francesco.¹⁰ In particolare Giordano si occupò di matematica e di fisica, di teoria musicale e di architettura e curò numerose pubblicazioni; mantenne una fitta corrispondenza con molti protagonisti del mondo della cultura del Settecento e si dedicò con passione e competenza alla sistemazione delle opere del padre e del fratello Vincenzo.

Come testimonia il biografo Domenico Maria Federici (Fig. 2), la formazione scientifica di Giordano Riccati fu personalmente seguita dal padre:

“Egli [Giordano] apprese aveva le sublimi scienze dell’Aritmetica, Geometria, Algebra ed Analisi dal genitore, e quanto in tutte queste fosse versato lo dimostrano le Opere date alla luce, e tante altre inedite al numero di sessanta, molte delle quali sono lavoro de’ suoi verdi anni” (Federici, 1790, p. 14).

Con il matematico bresciano Ramiro Rampinelli (1697-1759), Giordano Riccati proseguì gli studi presso l’Università di Padova. Nello stesso periodo seguì le lezioni di idraulica di Poleni, di letteratura e di filosofia e teologia di Lazzarini e Serry e di disegno di Natale Melchiorri.

⁹ Si vedano i saggi storici: A.A. Michieli, *Una famiglia di matematici e poligrafi trevigiani: i Riccati. I. Jacopo Riccati*, in: “Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti”, CII, II, Ferrari, Venezia 1943; *II. Vincenzo Riccati*, ibid., CIII, II, Ferrari, Venezia 1944; *III. Giordano Riccati*, ibid., CIV, II, Ferrari, Venezia 1946; *IV. Francesco Riccati*, ibid., CIV, II, Ferrari, Venezia 1946.

¹⁰ Nel presente lavoro non ci occuperemo specificamente di Francesco Riccati. Rimandiamo ad esempio alla quarta memoria di Michieli citata nella precedente nota ed a: Bagni, 1993.



Fig. 1

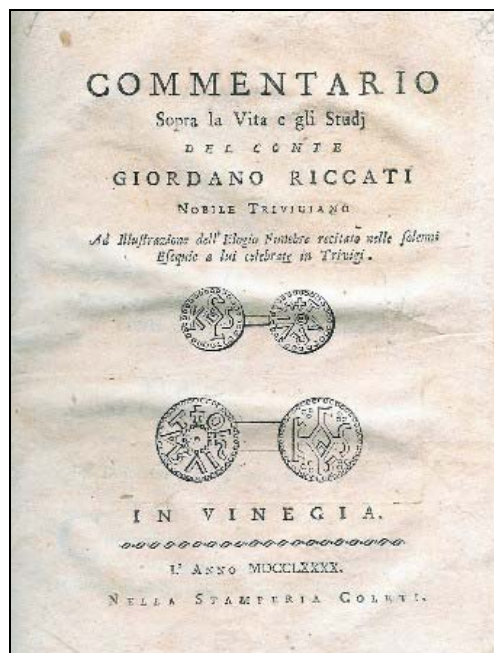


Fig. 2

Nella produzione matematica di Giordano Riccati spiccano alcune ricerche teoriche, come quelle sulla questione dei logaritmi dei numeri negativi, sugli isoperimetri e sulle equazioni algebriche. Ma egli non fu un matematico puro: la sua concezione della matematica appare spesso collegata ad altri campi del sapere, talvolta orientata alle applicazioni.¹¹ Una simile impostazione culturale è per molti versi caratteristica dell'intero Settecento (Crombie, 1995);¹² e per quanto riguarda

¹¹ Si veda anche l'inusuale nota: *Che lo studio delle Matematiche non favorisce la miscredenza*, Raccolta Calogerà, XXVII, 1775. Altre opere matematiche e fisiche notevoli sono: *Teorema. Il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale*, in: "Mem. della Soc. Ital.", IV, 116, 1778; *Lettera al Signore Jacopo Ab. Pellizzari sopra i logaritmi de' numeri negativi*, in: "Continuazione del Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia", XVI, Modena 1778; *Riflessioni sopra la vera origine, e natura della forza centrifuga. Dissertazione fisico-matematica*, Giuseppe Rocchi, Lucca 1763; *Sui pendoli*, Manoscritto Riccati, b. 3, n. 8, Biblioteca Comunale di Treviso.

¹² Così scrive Kline nell'illustrare la progressiva matematizzazione delle scienze in generale, e della fisica in particolare, propria del XVII e XVIII secolo: "[Nel Seicento e nel Settecento] il programma iniziato da Galileo e proseguito consciamente da Newton, consistente nell'esprimere i principi fisici fondamentali sotto la forma di enunciati matematici quantitativi e nel dedurre nuovi

la ricerca nel campo della fisica matematica, uno dei settori che vide Giordano Riccati impegnato in una ricerca continua e innovativa è la meccanica delle vibrazioni, cioè lo studio delle “corde ovvero fibre elastiche”, questione trattata da alcuni dei maggiori matematici del periodo. A questo tema sono dedicate l’importante opera pubblicata a Bologna nel 1767 *Delle corde ovvero fibre elastiche. Schediasmi fisico-matematici* (ma quasi certamente elaborata nel precedente quarto di secolo: Riccati, G., 1767) e la dissertazione *Della vibrazione delle corde*, prodromo della “Nuova Enciclopedia Italiana”, pubblicata nel 1779 a Siena (Riccati, G. 1779).

Rilevante importanza, a partire dalla metà del secolo, fu attribuita agli studi riccatiani sulla vibrazione delle corde elastiche: molti scienziati citarono largamente gli otto *Schediasmi* scritti dello studioso. Ricordiamo ad esempio Girolamo Barbarigo, docente presso lo Studio di Padova, il quale in *Principi di fisica generale*, nel 1780, così introduce le proprie riflessioni nel capitolo intitolato “Della resistenza delle corde”:

“Le macchine non solo si allontanano dalla precisione della teoria, che intorno ad esse i Meccanici tutti dimostrano, pello sfregamento scambievole delle loro parti, m’ancora non poche di esse ciò fanno pelle corde le quali per porle in moto s’adoprano. Per misurare con qualche precisione la di lui forza sembrami necessario distinguere nelle corde, lo che non suol farsi comunemente, col dottissimo Sig. Co. Giordano Riccati ne’ suoi Schediasmi delle corde ovvero fibre elastiche stampati in Bologna l’anno 1767 due rigidità. ‘L’una, dic’egli, pag. 1, che chiamo naturale, consiste in una ripugnanza che ha la corda di lasciarsi allungare, anche prima che le venga applicata veruna forza tendente. L’altra che chiamo l’artificiale s’eguaglia all’accrescimento di ripugnanza di essere ulteriormente distesa, che dalla forza o peso tendente della corda proviene. Le due rigidità si possono parimente nominare intrinseca, ed estrinseca, dipendendo quella da cagione interna, e dall’intralcio delle sue fibre, e questa da cagione esterna, cioè a dire dalla forza stirante” (Barbarigo, 1780, pp. 252-253).

Per meglio apprezzare l’importanza storica dei citati studi riccatiani può essere interessante la ricostruzione della successione cronologica delle opere scritte e pubblicate sulle “corde ovvero fibre elastiche” nel Settecento, annoverate tra i

risultati fisici con ragionamenti matematici, aveva fatto smisurati passi in avanti” (Kline, 1991, p. 719).

capolavori della storia della fisica-matematica. Lo stesso Giordano Riccati, nella dedica del proprio *Saggio sopra le leggi del contrappunto* (Fig. 3), scriveva:

“Sino dall’anno 1742 [...] avendo intrapreso il lavoro, mi crebbe talmente la materia fra le mani, che ne provenne l’Opera mentovata, la quale dovrebbe essere ormai ridotta al termine, se dagli studj Fisico-matematici, e principalmente dall’Acustica, e dall’ordinare per la stampa l’Opere del Co: Iacopo mio Padre non fosse stata lungamente, e frequentemente interrotta” (Riccati, G. 1762, seconda p. non numerata).¹³

Questa annotazione può essere significativa per la collocazione cronologica degli studi riccatiani: gli “studj Fisico-matematici, e principalmente l’Acustica” sarebbero dunque tra i responsabili di un rallentamento dell’attività di ricerca teorica musicale nel ventennio 1742-1762. Pertanto una prima datazione del periodo di elaborazione degli studi riccatiani sulle “corde ovvero fibre elastiche” ci viene indirettamente fornita dallo stesso Riccati. Anche secondo A.A. Michieli (cit. in nota 8), Giordano Riccati scrisse i propri *Schediasmi* tra il 1740 ed il 1760, sebbene egli li pubblicò a stampa soltanto nel 1767, a Bologna. Al momento di questa edizione, tuttavia, il sessantenne Euler ed il cinquantenne d’Alembert avevano già pubblicato le proprie opere sulla questione.

Notiamo che, per la maggior parte degli studiosi, il vero sistematore della “teoria delle corde vibranti” deve essere considerato d’Alembert (che riprese, in parte, anche alcuni precedenti tentativi di Brook Taylor e di Jean Bernoulli).¹⁴ Sempre per quanto riguarda gli studi pubblicati prima degli *Schediasmi* riccatiani, Gino Loria ricorda che Euler si occupò dell’argomento in questione soltanto dopo avere esaminato la memoria di d’Alembert pubblicata a Berlino (Loria, 1929-1933):¹⁵ l’attenzione del grande matematico svizzero era particolarmente concentrata sulle equazioni differenziali alle derivate parziali del secondo ordine nelle quali il problema risultava sintetizzato. Pertanto, gli studi euleriani (che risalgono agli anni 1748-1753) si collocherebbero intorno alla metà del periodo

¹³ L’opera citata è un ampio compendio del trattato G. Riccati, *Le leggi del contrappunto dedotte dai fenomeni e confermate dal raziocinio*, Manoscritto 1026, 1-2, Biblioteca Comunale di Udine; la citazione è tratta dalla dedica “Al Nobile Signor Fioravante degli Azzoni Avogari”.

¹⁴ D’Alembert fu certamente uno dei massimi esponenti della fisica matematica di ogni tempo. Ma per evidenziare una qualche analogia dei suoi interessi culturali e di quelli di Giordano Riccati ricordiamo che d’Alembert fu anche valente trattatista in campo musicale; si veda: J. d’Alembert, *Eléments de musique théorique et pratique, suivant les principes de M. Rameau*, Bruyset, Lion 1769.

¹⁵ “Mem. Ac. Berlin”, IV, 1748 (Boyer, 1980).

(1740-1760) in cui Giordano Riccati si dedicò all'elaborazione ed alla stesura dei propri *Schediasmi*.

Possiamo dunque concludere che gli autori delle principali pubblicazioni di questa prima fase delle ricerche fisico-matematiche sulle “corde vibranti” furono, nell'ordine:

- d'Alembert (Berlino 1747);
- Euler (Berlino 1748 e Pietroburgo 1753);
- Giordano Riccati (Bologna 1767).

Ma per quanto riguarda l'effettiva priorità delle ricerche e dell'elaborazione teorica risulterebbe della massima importanza un attento riesame critico degli studi riccatiani degli anni 1740-1760.

Il confronto dettagliato delle opere in questione esula dagli scopi del presente lavoro. E non intendiamo certamente svalutare le ricerche storiche ora ricordate, miranti a ricostruire l'evoluzione di alcuni importanti settori della scienza; ma anche in questo caso l'assegnazione della priorità cronologica può apparire secondaria. Riteniamo più importante e significativa la presenza di un contesto socio-culturale che ha determinato lo sviluppo, in ambiti diversi, di ricerche analoghe e, dal punto di vista dei metodi e dei risultati, sostanzialmente convergenti (Crombie, 1995; Radford, 2003).¹⁶

È inoltre interessante rilevare che la personalità scientifica di Giordano Riccati è significativamente poliedrica: parallelamente agli studi fisico-matematici di acustica egli sviluppò un interesse specifico ed approfondito per la teoria

¹⁶ Alle questioni di priorità, nel Settecento, si affiancavano le (ben più importanti e feconde) “controversie letterarie”, che videro impegnato anche Giordano Riccati con alcuni dei massimi studiosi del periodo (ricordiamo la controversia sulla natura dei logaritmi dei numeri negativi che sarà definitivamente risolta da Leonhard Euler: Naux, 1971, Giusti, 1982, Giuntini, 1984, Bagni, 1994 e 2003). Su tale celebre controversia si possono inoltre vedere: G. Riccati, *Lettera al Signore Iacopo Ab. Pellizzari sopra i logaritmi de' numeri negativi*, cit. (nella Biblioteca Civica di Udine sono conservate *Dieci lettere del P. Vincenzo Riccati all'ab. Jacopo Pellizzari sulla questione della Logistica*, nel t. XXI del “Commercio Epistolare del Co. Giordano Riccati”, intitolato: *Prima raccolta di lettere sopra la questione: Se la Logistica abbia un doppio ramo*); G. Riccati, *Teorema. Il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale*, cit. (dello stesso anno, 1778, è la breve nota: G. Riccati, *Risposta alle riflessioni analitiche del Signor Abate Giovacchino Pessuti, Professore di Matematica nel corpo de' Cadetti Nobili di Peterburg, sopra una lettera scrittagli dal Signor Conte Vincenzo Riccati*); P.M. Caldani, *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi*, Lelio Della Volpe, Bologna 1782.

musicale.¹⁷ Ecco la definizione che lo studioso propone per la musica nel proprio *Saggio sopra le leggi del contrappunto* (compendio dell'inedito trattato *Le leggi del contrappunto dedotte dai fenomeni e confermate dal raziocinio*):

“La Musica è una mistura d’armonia, e di melodia: dichiarandomi che per armonia intendo più suoni, che unitamente si sentano; e per melodia più suoni, l’uno de’ quali all’altro succeda. Questa spiegazione suggerisce una definizione ancora più chiara della Musica, la quale altro non è se non una successione di armonici accompagnamenti, che o s’odono effettivamente, o almeno si sottintendono” (Riccati, G., 1762, p. 3).

La teoria musicale riccatiana è basata essenzialmente sul metodo sperimentale: l’armonia, nella visione di Riccati, è regolata da leggi oggettive precise, rilevabili anche empiricamente attraverso lo studio degli effetti prodotti sull’uomo da determinati accordi; essa non può dunque essere analizzata che con metodo scientifico, al fine di codificare definitivamente la stessa musica (ovvero l’arte di comporre melodie corrette) attraverso la fisica del suono.¹⁸

Giordano Riccati fu inoltre un valente architetto ed un teorico dell’architettura (l’applicazione della media proporzionale armonica è considerata la principale sua realizzazione teorica).¹⁹ L’importanza dell’architettura nell’ambito dell’opera

¹⁷ Oltre alle opere citate ricordiamo: G. Riccati, *Esame del sistema musico del Sig. Giuseppe Tartini*, in: “Continuazione del Nuovo Giornale de’ Letterati d’Italia”, XX, Modena 1780; G. Riccati, *Esame del sistema musico di M. Rameau*, in: “Continuazione del Nuovo Giornale de’ Letterati d’Italia”, XX, Modena 1780; G. Riccati, *Lettera I intorno al risorgimento della musica all’onoratissimo Padre D. Giovenale Sacchi*, Modena 1788.

¹⁸ R. Bortolozzo nota: “L’aspetto logico-matematico e percettivo dunque coesistono ed interagiscono nella musica in forma evidente, come l’intera opera del Riccati conferma; ciò che per Giordano significò, oltre che una scoperta, l’inizio di un approccio ‘moderno’ al discorso musicale e la possibilità di trattare scientificamente il materiale sonoro attraverso strumenti concettuali e tecnici di raffinata precisione” (Bortolozzo, 1991, p. 120). Si veda inoltre: P. Barbieri, *Padre Martini e gli armonisti fisico-matematici: Tartini, Rameau, Riccati, Vallotti*, in: “Padre Martini. Musica e cultura nel Settecento europeo” (Atti del Convegno, 1984), a cura di A. Pompilio, 173-209, Firenze 1987. Interessante è il rapporto tra Giordano Riccati e Giuseppe Tartini (1692-1770): Riccati conobbe personalmente e (nonostante alcune divergenze di impostazione culturale) sinceramente apprezzò il grande violinista piranese: il vivace epistolario Riccati-Tartini è una miniera di spunti di riflessione sul ruolo assunto dalla matematica nella teoria musicale nel XVIII secolo (in A. Capri, *Giuseppe Tartini*, Garzanti, Milano 1945, è riportata un’analisi documentata del vivace epistolario Tartini-Riccati).

¹⁹ Si veda: F.M. Preti, *Elementi d’Architettura*, Gatti, Venezia 1780, con la Prefazione di G. Riccati, in cui viene sottolineata la priorità di Jacopo Riccati nella scoperta della media

riccatiana, tuttavia, non è riducibile alle innovazioni teoriche o alle realizzazioni pratiche. La concezione che Giordano Riccati ebbe dell'architettura è infatti confrontabile con quella che lo stesso studioso manifestò nei confronti della musica: la matematica, e più in generale l'approccio razionale, non possono essere esclusi dall'impegno culturale in ogni disciplina, in ogni fase dell'elaborazione di un'opera. Anzi, la ragione umana, coltivata ed educata attraverso lo studio e la pratica delle scienze esatte, viene ad essere guida e sostegno nella corretta concezione e realizzazione dell'opera d'arte.

Da questo punto di vista, lo studio delle leggi del contrappunto o l'uso della media armonica nel tentativo di immaginare e di progettare una costruzione dalle proporzioni ideali sono espressioni della medesima volontà di raggiungere il controllo, da parte della ragione, dell'emozione che giunge all'uomo attraverso il messaggio artistico: una concezione che perfettamente si inserisce nel Secolo dei Lumi.



Fig. 3



Fig. 4

proporzionale armonica; F. Riccati, *Lettere intorno alla scoperta della media proporzionale armonica*”, Pietro Pianta, Brescia 1760.

Dalla matematica alla fisica: Vincenzo Riccati e Gian Maria Ciassi

Vincenzo Riccati (Fig. 4) fu il quarto figlio di Jacopo e di Elisabetta Onigo e nacque a Castelfranco Veneto l'11 gennaio 1707; a dieci anni iniziò gli studi presso il Collegio di San Francesco Saverio di Bologna, retto dai religiosi della Compagnia di Gesù sotto la guida del matematico Luigi Marchenti; il 20 settembre 1726 Vincenzo entrò nel Noviziato di Piacenza della Compagnia come aspirante. Nel 1729 venne assegnato al Collegio di Padova, dove si dedicò allo studio ed all'insegnamento; nel 1734 si recò ad insegnare lettere italiane e latine presso il Collegio di Santa Caterina di Parma e nel 1735 iniziò lo studio della Teologia, prima nell'Educandato di San Rocco a Parma, poi (1736-1739) nell'Istituto di Sant'Ignazio a Roma. Dal 1739 insegnò matematica nel Collegio bolognese di Santa Lucia, succedendo a Marchenti; il 2 febbraio 1741 prese i voti. Nel lungo periodo bolognese, tra gli allievi di Vincenzo Riccati ricordiamo V. Cavina, J. Mariscotti, G.F. Malfatti, G.A. Pedevilla, L. e P. Caldani, P. Giannini.²⁰ Vincenzo Riccati rimase a Bologna fino al 1773, quando, a causa della soppressione della Compagnia di Gesù, ritornò a Treviso, ospite dei fratelli Montino e Giordano; nello stesso anno rifiutò le cattedre di matematica presso le Università di Bologna e di Pisa.²¹ Dopo meno di due anni, il 17 gennaio 1775, Vincenzo morì a Treviso, dove venne sepolto, accanto al proprio padre Jacopo, nella tomba di famiglia nella Cattedrale (Bagni, 1993).

²⁰ Così scrive di Vincenzo Riccati il matematico Bernardino Zendrini: "Dolce, piacevole, modesto e la cui grande penetrazione nelle cose matematiche faceva tenero contrasto colla sua innocenza nelle mondane; come la pietà, il fervor d'orazione e l'inespugnabile sua fede sono bello, ma non unico esempio da opporsi a' calunniatori dei matematici" (voce "Vincenzo Riccati", in *Galleria dei letterati ed artisti illustri delle Province veneziane nel secolo decimottavo*, Alvisopoli, Venezia 1824; si veda anche: A. Fabroni, *Vitae Italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII et XVIII floruerunt*, Pisa 1778-1791).

²¹ La seguente citazione del fisico Girolamo Barbarigo conferma il ruolo di Vincenzo Riccati nell'ambiente accademico del XVIII secolo e ricorda l'opera dello studioso impegnato nella ricerca a fianco delle massime personalità della cultura settecentesca: "Nell'anno 1758, l'Accademia Reale di Berlino propose, come far suole, il Problema in cui ricercava, 'Se le leggi della Statica e della Meccanica (che sono le leggi del Moto) siano necessarie o contingenti', cioè se le leggi, delle quali parla il Problema, siano dalla natura della materia determinate, e volute, oppure se Iddio abbia a suo arbitrio alla materia stessa quelle leggi che più gli piacque di moto prescritte. Se questo si affermi la contingenza delle leggi del moto si riconosce, se quello la loro necessità si sostiene. Questa viene difesa dall'Eulero e dall'Ab. Vincenzo Riccati principalmente; quella è abbracciata da Daniel Bernoulli e da que' tutti che del sistema Leibniziano son persuasi" (Barbarigo, 1780, p. 91).

Da un primo raffronto tra le opere di Vincenzo Riccati e quelle di Jacopo emerge una qualche differenza tra i caratteri scientifici dei due studiosi: a fronte della personalità poliedrica di Jacopo (indole che ritroviamo anche in Giordano e, forse in misura lievemente minore, in Francesco), gli interessi di Vincenzo appaiono meno diversificati e si concentrarono prevalentemente sulle scienze matematiche e fisiche.

Il principale ambito di ricerca di Vincenzo Riccati fu l'analisi matematica: spesso egli si occupò della trattazione analitica di problemi meccanici, condotta attraverso l'impostazione e la risoluzione di equazioni differenziali. Tra le opere matematiche di Vincenzo Riccati, degno di particolare nota è il breve ma vivace trattato *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius* (Fig. 5), pubblicato a Bologna, presso la Tipografia di Lelio della Volpe nel 1752 (72 pagine con 16 figure: Riccati, V., 1752). Nella prefazione a tale lavoro sono ricordati alcuni studi dei Bernoulli, di Jacob Hermann, di Gabriele Manfredi e dello stesso Jacopo Riccati sull'integrazione di equazioni differenziali con il procedimento di separazione delle variabili; è poi esaminata la possibilità di ottenere quadrature anche evitando il ricorso a tale diffuso metodo²² e sono proposti alcuni esempi applicativi. Il procedimento analitico descritto nel *Commentarius* è basato su di un modello fisico e riprende una ricerca di Alexis Claude Clairaut (1713-1765).²³

Nel *Commentarius* non si trovano ricerche teoriche radicalmente innovative: l'importanza di quanto proposto da Vincenzo Riccati va ricercata proprio in rapporto alla ricerca di situazioni applicative e di procedimenti di integrazione delle equazioni differenziali, nell'ambito della cultura analitica del Settecento matematico.²⁴ Con il lavoro citato, Vincenzo Riccati non si impegnò nel tentativo

²² Vincenzo Riccati cita una tecnica proposta da Leonhard Euler: "Primus, ac solus Eulerus, quantum quidem mihi constat, in tomo sexto Ac. Petrop. aequationis peculiaris maxime simplicis constructionem invenit per rectificationem ellipsis, in qua aequatione non solum indeterminatae non separantur, sed ne separari quidem posse, constructio docet" (Riccati, V., 1752, p. 4).

²³ Pubblicata "in monumentis Ac. Reg. Paris." nel 1742. Scrive Vincenzo Brunacci, riferendosi alle ricerche di Clairaut e di Riccati: "Anche Clairaut [...] e Vincenzio Riccati [...] adoprando, per integrare un'equazione differenziale, l'artificio di differenziarla, per ottenerne una equazione di un ordine superiore, ma scomponibile in due fattori [ottennero] due integrali differenti, uno dei quali era l'integrale completo, l'altro una relazione tra le variabili priva di costante arbitraria" (Brunacci, 1804, p. 43).

²⁴ Così Kline descrive lo stato della ricerca sull'integrazione delle equazioni differenziali nel XVIII secolo: "Il tentativo di risolvere problemi fisici che all'inizio comportavano soltanto delle quadrature condusse gradualmente alla consapevolezza che era stato creato un nuovo ramo della matematica, la teoria delle equazioni differenziali ordinarie [...] L'interesse per i metodi generali di

di ottenere metodi generali di integrazione: egli rivolse invece la propria attenzione ad alcuni tipi particolari di equazioni differenziali e ne propose l'esame attraverso un procedimento semplice ma non usuale, ovvero attraverso la considerazione di un modello fisico. In tale contesto si mostrò ricercatore profondo e creativo, nonché attento ed aggiornato conoscitore dei principali risultati del calcolo e delle tecniche analitiche messe a punto dai matematici del proprio tempo: alla ricerca, ricorda lo stesso Riccati, partecipò anche Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), brillante autrice del manuale *Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana*, “foemina doctissima et in analyticis rebus versatissima” (Riccati, V., 1752, p. 7).²⁵

Vincenzo Riccati si occupò anche di fisica pura. Il *Dialogo, dove ne' congressi di più giornate delle forze vive e dell'azioni delle forze morte si tien discorso* (Fig. 6: Riccati, V., 1749) pubblicato a Bologna nel 1749 è interessante sia dal punto di vista fisico che da quello letterario. In esso, Riccati si occupò della “questione delle forze vive”, la controversia che vide schierati gli studiosi leibniziani opposti ai cartesiani: è facile comprendere come, nell'ambiente culturale settecentesco, sia impossibile per un matematico e fisico famoso come Vincenzo Riccati esimersi dal prendere posizione sulla questione.²⁶

soluzione scemò, perché vennero trovati metodi parziali che si adattavano però a quei tipi di equazioni richieste nelle applicazioni... Nel complesso, questo campo di ricerche ha continuato ad essere costituito da una serie di tecniche separate per i vari tipi di equazioni differenziali” (Kline, 1991, pp. 583-585; inoltre: Bagni, 1995a e 1995b).

²⁵ Viene citata l'opera: M.G. Agnesi, *Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana*, I-II, Nella Regia Ducal Corte, Milano 1748, uno dei primi manuali di analisi della storia della matematica, in cui è incluso il “Metodo de' Polinomi” di Jacopo Riccati. Ricordiamo inoltre la collaborazione tra V. Riccati ed il proprio discepolo Girolamo Saladini (1731-1813); essa non si limitò alla stesura delle *Institutiones Analyticae* in due volumi pubblicati a Bologna nel 1765-1767 presso la Stamperia di San Tommaso d'Aquino (Saladini curò la traduzione italiana, edita nel 1776 nella stessa tipografia, *Istituzioni Analitiche del Co. Vincenzo Riccati, compendiate da Girolamo Saladini, Canonico della Metropolitana*); si veda, ad esempio, la riccatiana *Lettera al p. D. Girolamo Saladini nella quale trattasi della combinazione del moto rotatorio col progressivo*, in: “Raccolta di Opuscoli”, Firenze 1771 e 1774, e la *Lettera al P. Girolamo Saladini*, Anno 1768, Manoscritto 4137, 6, nella Biblioteca universitaria di Bologna; alcune altre lettere di Saladini a Vincenzo Riccati sono in “Frammenti del Commercio Epistolare del Co. Vincenzo Riccati”, nella Biblioteca Avogadro in Castelfranco Veneto.

²⁶ Così Giovanni Fantuzzi presenta la controversia sulla “forze vive” (con riferimento all'opera di F.M. Zanotti, che si oppose ad alcune tesi riccatiane): “Era a quel tempo in sommo grido presso i Filosofi la questione: Se la forza, che ha un corpo movendosi, e che chiamasi Viva, misurar debbasi dalla velocità, che egli ha, come piacque a Des Cartes, o dal quadrato di essa, come volle il Leibnitzio. Essendo divisi tra queste due opinioni i Matematici più famosi d'Europa,

Nel *Dialogo* lo studioso si mostra assertore delle tesi leibniziane. Egli riporta un'immaginaria discussione tra Cesare, Lelio e Nestore, tre interlocutori ai quali, in undici Giornate, spetta di esporre e confrontare le tesi più accreditate nell'ambiente scientifico del tempo in tema di "forze vive" (Cesare rappresenta lo studioso cartesiano, Lelio quello d'ispirazione leibniziana, cioè il portatore delle idee dello stesso Riccati, e Nestore il colto "non addetto ai lavori", un personaggio che si dichiara a tratti vicino alle idee di Cesare, a tratti, e poi definitivamente, vicino a quelle di Lelio).

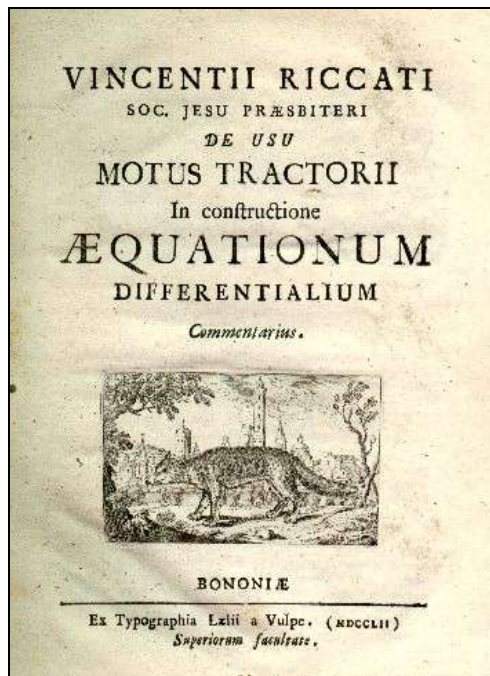


Fig. 5



Fig. 6

il celebre P. Riccati gesuita trattò tutta la questione ampiamente in un grosso volume, composto di moltissimi dialoghi in volgar lingua; e sostenendo l'opinione del Leibnitzio, espressamente si oppose a non so qual proposizione, che avea detta il Zanotti in alcun luogo de' Commentarj dell'Instituto [Zanotti] scrisse dunque sopra la forza viva tre Dialoghi, benché così legati tra loro, che possono facilmente pigliarsi per uno solo; e trattando la questione non come i più fanno, ma riducendola a principj più certi, e metafisici, sostenne l'opinione di Des Cartes" (G. Fantuzzi, *Notizie della vita e degli scritti di Francesco Maria Zanotti*, Stamperia di San Tommaso d'Aquino, Bologna 1778).

Analogamente a quanto sopra notato per gli *Schediasmi* di Giordano Riccati, anche l'esame dettagliato del contenuto del *Dialogo* esula dagli scopi del presente lavoro; riprenderemo tuttavia alcune affermazioni contenute in tale opera con riferimento alla posizione che era stata implicitamente assunta, nella "questione delle forze vive" da Gian Maria Ciassi, alcuni decenni prima.²⁷

Il problema intorno al quale si sviluppa il dibattito sulle "forze vive" è la determinazione della grandezza fisica da considerare causa del moto di un corpo: secondo René Descartes (1596-1650) ed i pensatori di ispirazione cartesiana (Michieli, 1949)²⁸ un oggetto in movimento compirebbe lavoro a spese della propria quantità di moto ("quantitas motus"), il prodotto della massa per la velocità del moto (Bagni, 2001 e 2003). Per contrastare tale affermazione che, com'è oggi noto, si rivelerà errata, Leibniz pubblicò nel 1686 la memoria dal titolo *Brevis demonstratio erroris memorabilis Cartesii, et aliorum circa legem naturalem, secundum quam volunt a Deo eamdem semper quantitatem motus conservari; qua et in re mechanica abutuntur*²⁹ in cui smentì la conclusione cartesiana e segnalò l'esigenza di definire in termini nuovi una "forza motrice".

²⁷ Concludiamo questa sintetica presentazione del *Dialogo* ricordando l'opera, pubblicata pochi anni dopo di esso, *Della forza de' Corpi, che chiamano viva*, del fisico, letterato e filosofo bolognese Francesco Maria Zanotti (1692-1777). In essa, l'Autore contrasta le tesi espresse da Vincenzo Riccati sulla questione delle forze vive, in nome di un'impostazione rigorosamente cartesiana (F.M. Zanotti, *Della forza de' corpi che chiamano viva*, Eredi di Constantino Pifarri e Giacomo Filippo Primodi, Impressori del S. Officio, Bologna 1752). Vincenzo Riccati impostò una replica all'opera di Zanotti che rimase manoscritta: *Lettere del P. Vincenzo Riccati che servono di risposta al Libro del Signor Francesco Maria Zanotti della Forza dei Corpi, che chiamano viva* (la lettera è conservata nella biblioteca della Famiglia Avogadro).

²⁸ Si tratta del lavoro che segna la moderna riscoperta dell'opera ciassiana.

²⁹ Queste sono le considerazioni esposte nello scritto leibniziano: "Suppono, primo corpus cadens ex certa altitudine acquirere vim eousque rursus assurgendi, si directio eius ita ferat, nec quicquam externorum impediatur [...] Suppono item secundo, tanta vi opus esse ad elevandum corpus A unius librae usque ad altitudinem CD quatuor ulnarum, quanta opus est ad elevandum corpus B quatuor librarum, usque ad altitudinem EF unius ulnae [...] Hinc sequitur corpus A delapsum ex altitudine CD praecise tantum acquisivisse virium, quantum corpus B lapsum ex altitudine EF. Nam corpus A postquam lapsu ex C pervenit ad D, ibi habet vim reassurgendi usque ad C, per suppos. 1, hoc est vim elevandi corpus unius librae (corpus scilicet proprium) ad altitudinem quatuor ulnarum. Et similiter corpus B postquam lapsu ex E pervenit ad F, ibi habet vim reassurgendi usque ad E, per suppos. 1, hoc est vim elevandi corpus quatuor librarum (corpus scilicet proprium) ad altitudinem unius ulnae. Ergo per suppos. 2, vis corporis A existentis in D, et vis corporis B existentis in E, sunt aequales". Leibniz conclude affermando "itaque magnum est

La “vis motrix”, introdotta da Leibniz nella memoria *Specimen dynamicum pro admirandis naturae legibus circa corporum vires et mutuas actiones detergendis et ad suas causas revocandis* del 1695, sostituì quindi nella storia della fisica la cartesiana quantità di moto nel ruolo di “serbatoio energetico” a spese del quale un corpo compie lavoro: ma questa “vis motrix”, o “vis viva”, non fu definita con precisione neppure da Leibniz, il quale si limitò a distinguerla dalla “forza morta”, intesa come semplice pressione; si tratta, comunque, di una grandezza fisica nuova, proporzionale non alla *velocità* del corpo considerato (come la quantità di moto), ma al *quadrato di tale velocità*.

Con la sensibilità scientifica del nostro tempo rileviamo dunque che anche l’impostazione teorica leibniziana dovrebbe essere considerata concettualmente carente: l’imprecisione di Leibniz può essere oggi identificata nel persistente collegamento, più o meno esplicito, della nuova grandezza introdotta al concetto di “forza”. Ma la “forza viva” di Leibniz non può essere considerata una vera e propria “forza”: l’approssimazione con cui sembra essere delineata, tra il XVII ed il XVIII secolo, l’intera questione è causata dalla mancanza di una precisa consapevolezza del concetto di lavoro (e di energia).

Ribadiamo però che la storia della scienza impone un atteggiamento rigoroso su alcune questioni metodologiche; in particolare, come spesso osservato, lo studio di ogni richiamo storico deve essere adeguatamente contestualizzato, cioè impostato con riferimento al periodo in esame: l’evoluzione del *savoir savant* (riprendiamo il termine da: Chevallard, 1985) non può essere concepita in termini assoluti, ma deve essere riferita alla corrispondente evoluzione delle istituzioni culturali (Furinghetti & Radford, 2002; Bagni, 2004a) e dunque un atteggiamento modernamente critico su questioni terminologiche avrebbe ben poco significato. L’introduzione della “forza viva” da parte di Leibniz deve essere considerata una svolta della storia della fisica: l’energia associata ad un corpo in movimento (oggi detta “energia cinetica”) è infatti proporzionale al quadrato della velocità raggiunta dal corpo stesso, proprio come accade, originariamente, per la “vis motrix” leibniziana. Per questo motivo, a Leibniz viene generalmente attribuito un ruolo primario nella soluzione del problema delle “forze vive”.

Prima di introdurre la figura di Gian Maria Ciassi, segnaliamo che un’annotazione interessante è stata espressa da Vincenzo Riccati nel proprio *Dialogo* del 1749 (opera in cui Riccati sostiene, come notato, la tesi leibniziana):

discrimen inter vim motricem, et quantitatem motus, ita ut unum per alterum aestimari non possit”.
La memoria è inclusa in: G.G. Leibnitii *Opera Omnia* (Leibniz, 1768).

“Propongo [...] argomenti, i quali alla legge dello spazio danno la preferenza, e fanno vedere che l’azioni vogliono misurarsi per gli spazi, e che per conseguenza le forze vive a’ prodotto delle masse ne’ quadrati delle velocità sono proporzionali” (Riccati, V., 1749, p. 8).

Due intere giornate (la VII e la VIII: Riccati, V., 1749, pp. 202-284) del *Dialogo* riccatiano sono dedicate al ruolo della “legge dello spazio” nel problema delle “forze vive”. Non ripercorreremo la lunga argomentazione dell’Autore: per interpretare il riferimento a tale “legge”, osserviamo che nel caso di un corpo in caduta libera l’altezza h percorsa dal corpo risulta proporzionale al quadrato della velocità, essendo tale quadrato esprimibile da $2gh$. Dunque, nelle parole di Vincenzo Riccati, se “l’azioni vogliono misurarsi per gli spazi”, allora “per conseguenza le forze vive a’ prodotto delle masse ne’ quadrati delle velocità sono proporzionali”.

Le osservazioni di Vincenzo Riccati ci inducono a fare un passo indietro, dal punto di vista cronologico: Gian Maria Ciassi è infatti l’autore del *Tractatus physicomathematicus*, pubblicato insieme alle *Meditationes de natura plantarum* a Venezia nel 1677;³⁰ in questo lavoro (Ciassi, 1677, Fig. 7), come vedremo, sono presenti alcune osservazioni interessanti che potranno essere utilmente inquadrare nell’ambito del problema delle “forze vive”. Le ricordate opere (che furono gli unici lavori pubblicati da Ciassi nella sua breve vita) sono contenute in un piccolo volume dedicato al patrizio veneziano Gerolamo Correr (108 ff. in-12, con undici tavole incise: Ciassi, 1677); il suo Autore nacque a Treviso il 20 marzo 1654 e studiò presso la facoltà di medicina e filosofia dell’Università di Padova, dove ottenne la laurea; ma i suoi interessi per la matematica lo portarono a frequentare le lezioni di padre Stefano Degli Angeli nell’ateneo padovano;³¹ secondo alcuni storici, nell’anno (1677) della pubblicazione di *Meditationes de natura plantarum et Tractatus physicomathematicus*, Ciassi fu sul punto di ottenere una cattedra di

³⁰. Sull’opera di Ciassi si vedano: G.B. Nicolai, *Lettera da Trevigi, a data 9 novembre 1754, sulla scoperta da lui fatta del libretto del Ciassi*, in: “Memorie per servire all’Istoria Letteraria”, IV, V, Venezia 1754; I.A. Pellizzari, *Discorso in lode di G.M. Ciassi trivigiano*, Giulio Trento, Treviso 1830; G.B. Rambaldi, *Iscrizioni patrie*, Longo, Treviso 1863. La LXXII iscrizione è dedicata a Ciassi. L’edizione critica del *Tractatus physicomathematicus* è in: G.T. Bagni, *Gian Maria Ciassi fisico trevigiano*, Teorema, Treviso 1991.

³¹ Su Stefano Degli Angeli si veda: A. Favaro, *I successori di Galileo nello studio di Padova fino alla caduta della Repubblica*, in “N. Archivio Veneto”, 65, nuova serie, 1/3, 1917; A.A. Michieli, *Un maestro di Jacopo Riccati (Stefano Degli Angeli)*, in: “Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti”, CVI, II, Ferrari, Venezia 1949.

botanica presso la stessa università. Ma lo studioso si spense prematuramente a Venezia nel 1679 (il giorno della morte è incerto).

Il *Tractatus physicomathematicus* si apre con alcune considerazioni di idrostatica applicate alla botanica, in cui l'Autore riprende la questione, già trattata nelle *Meditationes de natura plantarum*, della salita del liquido dalle radici alle altre parti della pianta; l'ipotesi secondo la quale tale fenomeno sarebbe collegato alla pressione esercitata dall'atmosfera sui liquidi stessi porta Ciassi a riferirsi al principio dei vasi comunicanti. Lo studioso si propone quindi di precisare meccanicamente il fenomeno ipotizzato e di spiegare dunque come le parti sovrastanti di un fluido agiscono su quelle sottostanti; a tale proposito egli presenta un dettagliato approfondimento della meccanica delle leve, collegando alcune considerazioni geometriche al problema dell'equilibrio dei fluidi: Ciassi paragona la situazione statica di una leva a bracci diseguali a quella che caratterizza l'equilibrio di un fluido in vasi comunicanti diversi. Proprio questa è la parte più interessante ed originale dell'intero lavoro ciassiano (che riferiremo alla Fig. 8: Bagni, 2001 e 2003).³²

Interessanti sono le osservazioni seguenti.³³ L'Autore nota che un corpo G posto nella posizione E e sollevato sino al punto A richiede la stessa "forza" ("vis") richiesta da un corpo F posto in M e sollevato sino a B se e soltanto se i pesi di G e di F sono inversamente proporzionali ai rispettivi bracci GC, FC e quindi alle rispettive altezze virtualmente percorse AE e BM (ribadiamo che la fisica seicentesca non aveva ancora consapevolmente acquisito il concetto di

³² La figura è indicata come figura 1 in *Meditationes de natura plantarum et Tractatus physicomathematicus* (Ciassi, 1677). Ciassi dimostra geometricamente attraverso la similitudine dei triangoli CAE e CDB la proporzione: $AC : CD = AE : BD$ e da questa, essendo: $GK = HE = AE/2$ e $FL = ID = BD/2$, giunge infine alla proporzione: $AC : CD = GK : FL$.

³³ "Immo haec ipsa altitudinis linearum a motis corporibus descriptarum reciprocatio cum gravitate ipsorum prior causa est, aequalis momenti, quod Galileus non advertit. Etenim corpus cum alio in hac reciprocatioe constitutum unam tantum unciam gravitans, ut elevetur ad quatuor pollices, eandem vim requirit, ac corpus gravitans quatuor uncias, ut elevetur ad unum pollicem tantum. Puta ut corpus G unam tantum unciam gravitans attollatur per lineam EA, cuius altitudo sit quattuor pollicum; requiritur eadem vis, ac ut corpus F quatuor uncias gravitans attollatur per lineam DB, cuius altitudo sit tantum unius pollicis. Quia scilicet cum in altitudine lineae EA sint quatuor partes, quarum unaquaeque est aequalis altitudini DB totius; licet ad elevandam corpus G ad singulas harum quatuor partium requireretur alias tantum quarta virium pars, quae requiritur in elevatione corporis F ad equalem altitudinem totius DB; in omnibus tamen simul quatuor partibus EA requiritur quadrupla vis; quia quater ea quarta virium pars replicatur" (Ciassi, 1677, pp. 57-59).

lavoro, e ciò porta all'imprecisione terminologica: qui la "forza" può interpretarsi, modernamente, in termini di lavoro).

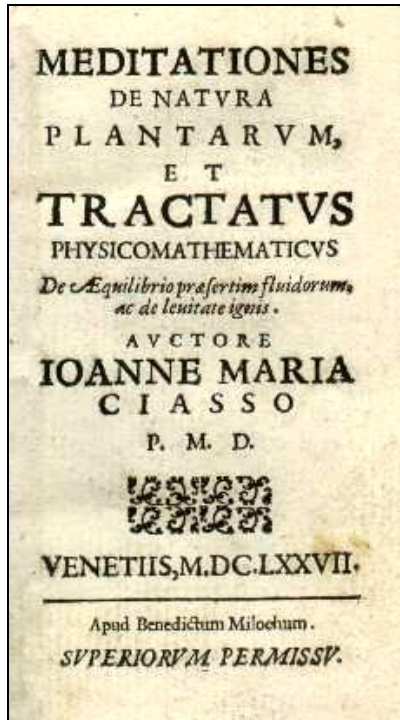


Fig. 7

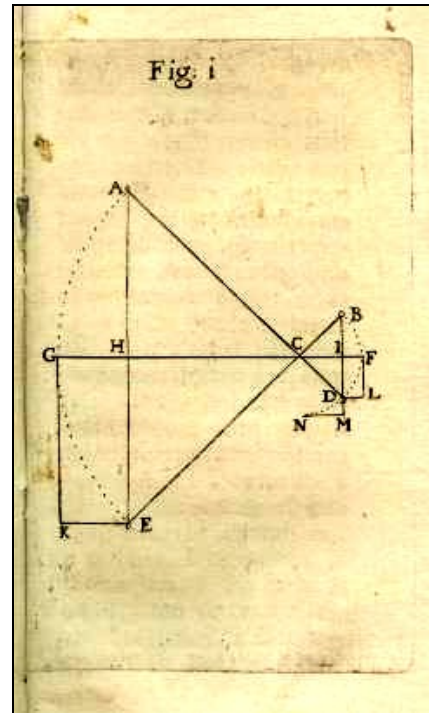


Fig. 8

Per apprezzare l'importanza delle conclusioni del giovane fisico riprendiamo quanto anticipato commentando la citazione dal *Dialogo* di Vincenzo Riccati: affermare che i pesi di due corpi sono inversamente proporzionali alle altezze virtuali percorse h, h' (Vincenzo Riccati dava "la preferenza" alla "legge dello spazio") equivale ad affermare un'analogia proporzionalità con i quadrati delle velocità v, v' dei moti di tali corpi ("le forze vive a' prodotto delle masse ne' quadrati delle velocità sono proporzionali").

Dunque le considerazioni di Ciassi, valutate in tal senso, comporterebbero la proporzionalità della *vis* (oggi interpretata in termini di energia) acquisita da un corpo in caduta alla massa e al quadrato della velocità. Da questo punto di vista

Gian Maria Ciassi si collocherebbe, nella controversia delle “forze vive”, nella direzione della posizione leibniziana; ma all’argomentazione dello studioso manca un chiaro collegamento tra “la legge dello spazio” e la considerazione del quadrato della velocità.

Leibniz, invece, nella propria memoria del 1686 esordisce scrivendo:

“Suppono corpus cadens ex certa altitudine acquirere vim eousque rursus assurgendi, si directio eius ita ferat, nec quicquam externorum impediatur [...]” (Leibniz, 1768, III, 180-181).

Quindi Leibniz, a differenza di Ciassi, considera dichiaratamente un corpo in caduta libera: ciò comporta che un eventuale risultato ciassiano non sarebbe del tutto provato e non è peraltro accompagnato da alcun riferimento alla controversia con i Cartesiani, collocazione critica che appare invece esplicitamente nella memoria di Leibniz.

Sottolineiamo tuttavia che la modesta edizione del *Tractatus* ciassiano (1677) precede di nove anni la pubblicazione negli *Acta Eruditorum Lipsiae* (1686) della memoria leibniziana considerata. Un dettaglio che potrebbe rendere proponibili alcune ipotesi: ad esempio, avrebbe senso domandarsi se Leibniz nel 1686 fosse a conoscenza delle considerazioni elaborate, qualche anno prima, dal giovane e sconosciuto Ciassi.

Il confronto delle traduzioni di due passi (riferiti ad una considerazione preliminare, nel contesto della questione delle “forze vive”) rivela affinità sorprendenti:

Scriva Ciassi nel 1677:

“Un corpo pesante un’oncia, posto con un altro in questo movimento alterno, se sollevato a quattro pollici richiede tanto lavoro quanto un corpo pesante quattro once sollevato ad un pollice” (Ciassi, 1677, p. 57).³⁴

Scriva Leibniz nel 1686:

“Suppongo che sia necessario tanto lavoro per sollevare un corpo del peso di una libbra all’altezza di quattro braccia di quanto ne serva per sollevare un corpo di quattro libbre all’altezza di un braccio” (Leibniz, 1768, III, p. 180).³⁵

³⁴ La traduzione è nostra (il termine “lavoro” traduce “vis”; il termine “movimento alterno” indica una leva di primo genere).

³⁵ La traduzione è nostra (il termine “lavoro” traduce modernamente la leibniziana “vis”).

Concludiamo ribadendo che, per quanto sopra visto, Gian Maria Ciassi non può essere considerato “il solutore del problema delle forze vive”. Tuttavia la questione essenziale è, a nostro avviso, la seguente: che significato ha la ricerca di “un solutore” con riferimento ad una questione teorica, considerata storicamente? Possiamo ad esempio riconoscere che le ricerche del giovane Ciassi hanno apportato, in una fase critica della fondazione della meccanica moderna, un contributo non trascurabile.³⁶ Ma la ricerca di una singola personalità alla quale attribuire diritti di priorità con riferimento alla “risoluzione di un problema teorico” è essa stessa per molti versi fuorviante; molte sarebbero le questioni epistemologiche da affrontare, le domande alle quali bisognerebbe rispondere: che cosa significa “risolvere un problema”? E, soprattutto, che cosa significava “risolvere un problema” nel Seicento? Sarebbe ad esempio necessario considerare la delicata questione del rigore formale, tenendo però conto che il rigore stesso è un concetto storico che deve sempre essere valutato con riferimento agli standard del periodo in esame e non alle nostre attuali concezioni (Radford, 1997 e 2003; Bagni, 2004a e 2004b): dunque il rigore formale delle osservazioni di Ciassi e Leibniz dovrebbe essere valutato rispetto agli standard degli anni 1677-1686, non rispetto a quelli della fisica del 2004.

E forse, così facendo, finiremmo per ammettere che sia Ciassi che Leibniz erano “rigorosi”... a modo loro.

Riflessioni conclusive

La storia delle scienze offre occasioni di grande importanza dal punto di vista formativo: tra queste, la possibilità di una riflessione metacognitiva e quella di ottenere una conoscenza socio-culturale di un periodo storico (Furinghetti & Somaglia, 1997; Bagni, 2004b). Tali possibilità sono mutuamente collegate, in quanto il trasferimento di spunti e di riflessioni dalla storia alla didattica non può avvenire per semplice analogia: comporta e richiede una più ampia dimensione e il coinvolgimento di punti di vista socio-culturali. Dunque proprio la seconda delle possibilità sopra ricordate giustifica, dal punto di vista teorico, la prima.

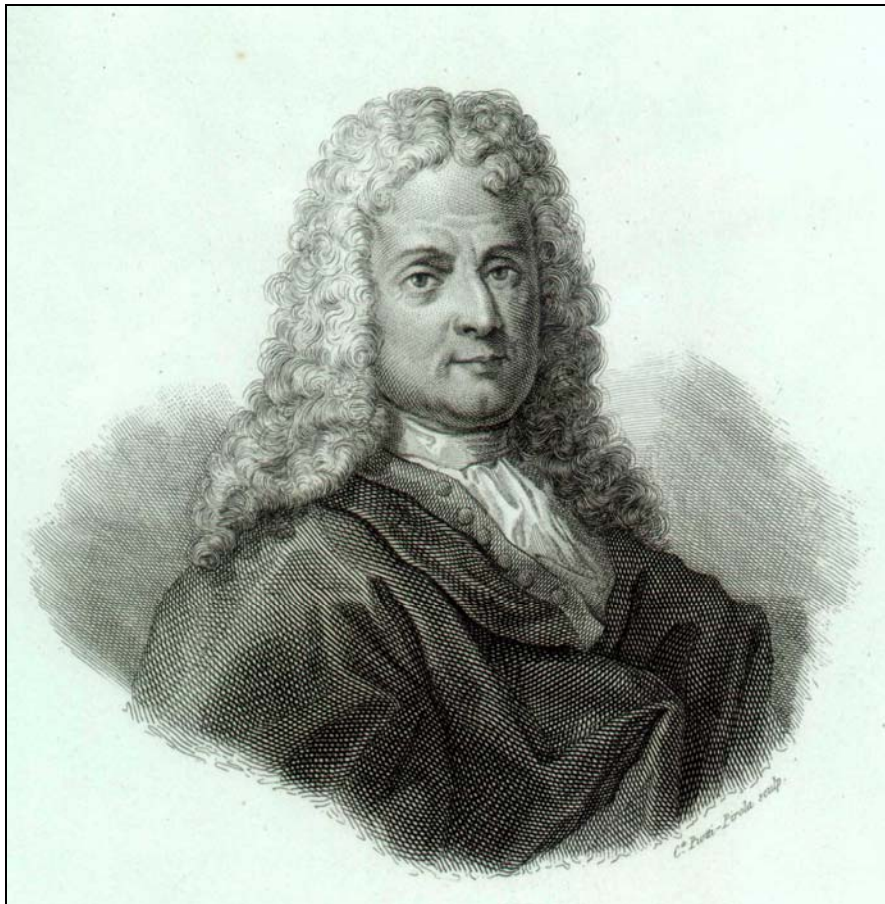
Per sfruttare tali possibilità è necessario che i richiami storici che vengono proposti siano compresi correttamente dall’allievo. Pertanto è indispensabile che l’inserimento della storia nella didattica della matematica sia accompagnato da

³⁶ Sottolineiamo inoltre il *Tractatus* ciassiano è interessante anche dal punto di vista metodologico: l’uso dello strumento geometrico nell’argomentazione di soggetto fisico è significativo e “didatticamente” moderno (Bagni, 2001 e 2003).

un'adeguata conoscenza storica in senso generale. E sottolineiamo esplicitamente che tale esigenza si traduce nella corretta formazione storica e storico-matematica degli insegnanti: ulteriori ricerche potranno chiarire le caratteristiche di iniziative da proporre in tal senso.

Ringraziamenti

L'autore ringrazia Regina Michieli Piccin, figlia di Adriano Augusto Michieli, e Duilio Piccin per la preziosissima collaborazione.



Jacopo Riccati

Bibliografia

- Bagni, G.T., 1988, Jacopo Riccati matematico, *La matematica e la sua didattica*, II, 3, 45-50
- Bagni, G.T., 1993, *La matematica nella Marca: Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati*, Edizioni Teorema, Treviso
- Bagni, G.T., 1994, Una “controversia” della matematica del Settecento: i logaritmi dei numeri negativi, *Periodico di Matematiche*, VII, 2, 2/3, 95-106
- Bagni, G.T., 1995a, I procedimenti di Jacopo e di Vincenzo Riccati nella storia delle equazioni differenziali, *Rivista di Matematica dell'Università degli Studi di Parma*, 5, 4, 7-13
- Bagni, G.T., 1995b, Jacopo Riccati (1676-1754) e la storia delle equazioni differenziali, Gagatsis, A. (a cura di), *History and Didactics of Mathematics*, Erasmus ICP-94-G-2011/11, 207-218 e 617-628, Thessaloniki
- Bagni, G.T., 1996, *Storia della Matematica*, I-II, Pitagora, Bologna
- Bagni, G.T., 1997, Riccati's grave in the Cathedral of Treviso (Italy), *The Mathematical Intelligencer*, 19, 49
- Bagni, G.T., 2001, Mathematical formal models for the learning of Physics: the role of an historical example, Michelini, M. & Cobal, M. (a cura di), *Developing Formal Thinking in Physics. First International Girep Seminar 2001. Selected Contributions*, Udine, 2-6 sept. 2001, 188-191
- Bagni, G.T., 2003, Storia delle Scienze per la Didattica. Una controversia tra il XVII e il XVIII secolo, Anichini, G. (a cura di), *Atti del XXIII Convegno UMI-CIIM, Loano 3-5 ottobre 2002, Notiziario dell'Unione Matematica Italiana*, Supplemento al n. 7, XXX, 109-113
- Bagni, G.T., 2004a, Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, in via di pubblicazione
- Bagni, G.T., 2004b, Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche, *La matematica e la sua didattica*, in via di pubblicazione
- Barbarigo, G., 1780, *Principi di fisica generale*, Al Ponte di San Lorenzo, nella Stamperia Conzatti, Padova
- Barbin, E., 1994, Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de Géométrie, Gagatsis, A. (a cura di), *Histoire et enseignement des Mathématiques: Cahiers de didactique des Mathématiques*, 14-15, 135-158
- Bortolozzo, R., 1991, Giordano Riccati e la fisica del suono, *Atti del Convegno “I Riccati e le scienze nel Settecento veneto”*, Mirano, 115-122

- Boyer, C.B., 1982, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano
- Brousseau, G., 1983, Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques, *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 165-198
- Brousseau, G., 1989, Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, Bednarz, N. & Garnier, C. (a cura di), *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*, Agence d'Arc, Montreal, 41-64
- Brunacci, V., 1804, *Corso di Matematica sublime*, Allegrini, Firenze
- Chevallard, Y., 1985, *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Pensée Sauvage, Grenoble
- Ciassi, G.M., 1677, *Meditationes de natura plantarum et Tractatus physico-mathematicus De æquilibrio praesertim fluidorum, ac de levitate ignis*, Benedetto Miloco, Venezia
- Crombie, A.C., 1995, Commitments and Styles of European Scientific Thinking, *History of Sciences*, 33, 225-238
- D'Amore, B., 2003, La complessità de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée, *For the Learning of Mathematics*, 23, 1, 47-51
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (a cura di), 2000, *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer, Dodrecht
- Federici, D.M., 1790, *Sopra la vita e gli studii del Conte Giordano Riccati*, Coletti, Venezia
- Frajese, A., 1950, Storia della matematica ed insegnamento medio, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, III, 337-342
- Freudenthal, H., 1973, *Mathematics as an educational task*, Riedel, Dodrecht
- Furinghetti, F., 2002, *Matematica come processo socioculturale*, Studi e Ricerche, IPRASE Trentino, Trento
- Furinghetti, F. & Radford, L., 2002, Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (a cura di), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654, Erlbaum, New Jersey
- Furinghetti, F. & Somaglia, A., 1997, Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1
- Gadamer, H.-G., 1975, *Truth and Method*, Crossroad, New York
- Garuti, R., 1997, A classroom discussion and a historical dialogue: a case study, *Proceedings of the PME-21*, Lathi, Finland, 2, 297-304
- Giuntini, S., 1984, Una discussione sulla natura dello zero e sulla relazione fra numeri immaginari e numeri reali (1778-1799), *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 4, 1, 25-63

- Giusti, E., 1982, Problemi e metodi di analisi matematica nell'opera di Gianfrancesco Malfatti, *Atti del Convegno su Gian Maria Malfatti, Ferrara, 23-24 ottobre 1981*, 37-56
- Giusti, E., 1999, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino
- Grugnetti, L. & Rogers, L., 2000, Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, Fauvel, J. & van Maanen, J. (a cura di), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, 39-62, Kluwer, Dodrecht
- Grugnetti, L., 1985, Sulla vecchia ed attuale equazione di Riccati, *Rendiconti del Seminario della Facoltà di Scienze dell'Università di Cagliari*, LV, 1, 7-24
- Grugnetti, L., 1986, L'equazione di Riccati: un carteggio inedito tra Jacopo Riccati e Nicola II Bernoulli, *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, VI, 2, 45-82
- Kline, M., 1991, *Storia del pensiero matematico*, Einaudi, Torino
- Leibniz G.W., 1768, *Opera Omnia*, Fratres de Tournes, Genevae
- Lladò, C. & Boero, P., 1997, Les interactions sociales dans la classe et le role mediateur de l'enseignant, *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal 171-179
- Lolli, G., 2002, *Filosofia della Matematica. Eredità del Novecento*, Il Mulino, Bologna
- Loria, G., 1929-1933, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino
- Michieli, A.A., 1949, Le sventure di uno scienziato trevigiano (G. M. Ciassi), *Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, CVII, II
- Naux, C., 1971, *Histoire des logarithmes de Neper a Euler*, Blanchard, Paris
- Pepe, L., 1990, Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33
- Piaget, J. & Garcia, R., 1983, *Psychogenèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris
- Pizzamiglio, P., 2002, *Matematica e Storia. Per una didattica interdisciplinare*, La Scuola, Brescia
- Radford, L., 1995, Before the other unknowns were invented: didactic inquiries on the methods and problems of Mediaeval Italian Algebra, *For the Learning of Mathematics*, 15(3), 23-28
- Radford, L., 1996, An Historical Incursion into the Hidden Side of the Early Development of Equations, Giménez, J., Campos Lins, R. & Gómez, B. (Eds.), *Arithmetic and Algebra Education*, Universitat Rovira I Virgili, Tarragona, 120-131

- Radford, L., 1997, On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching as Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33
- Radford, L., 2003, On Culture and Mind, Anderson, M. & Al. (a cura di), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, 49-79, Legas, Ottawa
- Radford, L., Boero, P. & Vasco, C., 2000, Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, J. Fauvel-J. van Maanen (a cura di), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer, Dordrecht, 162-167
- Riccati, G., 1762, *Saggio sopra le leggi del contrappunto*, Giulio Trento, Castelfranco Veneto
- Riccati, G., 1767, *Delle corde ovvero fibre elastiche. Schediasmi fisico-matematici*, Stamperia di San Tommaso d'Aquino, Bologna
- Riccati, G., 1779, Della vibrazione della corde, Prodrómo della *Nuova Enciclopedia Italiana*, Bindi, Siena
- Riccati, J., 1761-1765, *Opere*, tomi I, II, III, Jacopo Giusti, Lucca (1761, 1762, 1763); tomo IV, Giuseppe Rocchi, Lucca (1765)
- Riccati, V., 1749, *Dialogo, dove ne' congressi di più giornate delle forze vive e dell'azioni delle forze morte si tien discorso*, Lelio Della Volpe, Bologna
- Riccati, V., 1752, *De usu motus tractorii in constructione Aequationum Differentialium Commentarius* Lelio della Volpe, Bologna
- Sfard, A., 1991, On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36
- Slavit, D., 1997, An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281
- Soppelsa, M.L., 1991, I Riccati e l'Illuminismo veneto, *Atti del Convegno "I Riccati e le scienze nel Settecento veneto"*, Mirano, 9-38
- Speranza, F., 1997 *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora, Bologna
- Swetz, F.J., 1995, To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88
- Tizzani, P. & Boero, P., 1997, La chute des corps de Aristote à Galilée: voix de l'histoire et échos dans la classe, *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal, 369-376
- Vygotsky, L.S., 1990, *Pensiero e linguaggio*, Laterza, Bari